

防波堤捨石部透過流による副振動の解析

堀 口 孝 男*・小 坂 俊 吉**

1. 対象とする解析の範囲

洋上タンクによる石油の備蓄は、ここ数年来検討されてきており、備蓄量が 300 万 Kl、平面的にみて 1000 m × 400 m 程度、水深が 30 m 前後の長方形水域を全て大型の防波堤で遮蔽する方式が考案されている。また陸上施設を必要とするので、かかる長方形水域は離島に隣接して計画されるのが普通である。越波を極力防ぐ構造であるため、水域内の振動は防波堤捨石部から流入する透過流によって生ずるものと考えられる。そこでこの小論では、微小振幅波のポテンシャル論を用い、擾乱波にはフーリエ変換とその逆変換を採用し、現実在即する二つの配置計画を対象にして、解析法を展開したものである。ただし式の展開が複雑となるので、捨石部透過流は入射波に対面する一辺から生ずるものとしており、したがって、一般の場合にはかかる方法の拡張として考察されるべきものである。

2. 透過流とフーリエ変換の表現

静水面上に x, y 軸をとり、鉛直上方に z 軸をとる直交座標系において、一様な海底面を $z = -h$ とおき、捨石部は $-h \leq z \leq -h_1$ の範囲とする場合、 $g(z)$ なる関数を取り、

$$\left. \begin{array}{ll} -h_1 \leq z \leq +h_1 & \text{において } g(z)=0 \\ -h \leq z \leq -h_1, \quad h_1 \leq z \leq h & \text{において } g(z)=1 \end{array} \right\}$$

というようにすると、 z に関するフーリエ級数の表現から次式が得られる。

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{h-h_1}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{h} h_1 \cos \frac{n\pi}{h} z \\ &= \frac{h-h_1}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi \cos n\pi} \cos \frac{n\pi}{h} (h+z) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

微小振幅波に基づく流れを

$$u_0 = V e^{i\omega t} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}$$

とするならば、波による捨石部の透過流は近似的に

$$\begin{aligned} v_0 &= V e^{i\omega t} \left\{ \frac{h-h_1}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi \cos n\pi} \cos \frac{n\pi}{h} (h+z) \right\} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \\ &= V e^{i\omega t} \left[\frac{h-h_1}{h} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi \cos n\pi \cosh kh} \left\{ \cos \left(\frac{n\pi}{h} + ik \right) (h+z) + \cos \left(\frac{n\pi}{h} - ik \right) (h+z) \right\} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

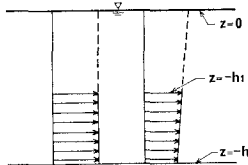


図-1 捨石部透過流の模式図

と表現することができよう (図-1 参照)。ここで i は虚数単位であり、また V は複素数値関数である。捨石部透過流を規定する運動方程式は、地下水のそれを規定するものと類似していると考えれば、

$$\frac{1}{\lambda g} \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{v_0}{\beta} = -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となり、ここで λ は捨石部の空隙率、 β は透水係数を示す。もっとも純然たる地下水の流れと比較して捨石部透過流の流速は大きくなるから、定常時で示せば、

$$-\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial y} = av_0 + bv_0^2 = v_0(a + bv_0) = \frac{v_0}{\beta}$$

となり、現象は非線形となることが予想される。このため、 β の操作によってこれを線形化し簡略にすることが望まれる。

次にかかる透過流によって生ずる擾乱波について、その速度ポテンシャルを求めてみよう。一般に入射波に対

* 正会員 工博 東京都立大学教授 土木工学科

** 正会員 東京都立大学助手 土木工学科

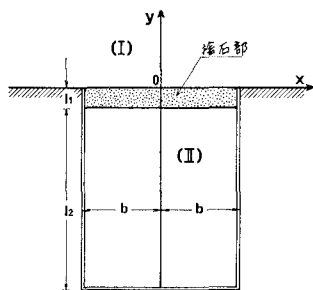


図-2 ケース (1) の配置図

して地形や構造物によって生ずる擾乱は、フーリエ変換によって表現することが適当であるから、図-2 のような設置条件のとき、領域 (I) に出現する擾乱について考察を進めてみる。いま速度ポテンシャルを

$$\phi = f(x, y)Z(z)e^{i\omega t}$$

とおくとき、境界条件として

$$\left. \begin{aligned} &|x| > b \text{ において} \\ &\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=0} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=0} Z(z)e^{i\omega t} = 0 \\ &|x| < b \text{ において} \\ &\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=0} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=0} Z(z)e^{i\omega t} = v_0 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

を設定する。\$\phi\$ はラプラスの方程式を満足するから、\$x\$ のフーリエ変換においても、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) e^{ixu} dx = 0$$

ここで \$f(x, y)\$ は、\$x^2 + y^2 \rightarrow \infty\$ なるとき \$f(x, y) = 0\$ である。いま

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{ixu} dx = F(u, y)$$

とおくならば、上記の関係から

$$\frac{1}{F} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - u^2 F \right\} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \pm q^2 \dots (5)$$

が導かれ、底面の境界条件 \$\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=-h} = 0\$ を考察する

と式 (5) から \$Z(z)\$ の解は

$$\left. \begin{aligned} Z(z) &= A_1 \cos q(h+z) \\ Z(z) &= B_1 \cosh q(h+z) \end{aligned} \right\}$$

となる。ここで、\$A_1, B_1\$ は任意定数である。これらに対応して

$$\begin{aligned} \phi &= V e^{i\omega t} \cdot \frac{h-h_1}{h} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin ub}{u \sqrt{u^2 - k^2}} e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y} e^{-ixu} du \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V e^{i\omega t} \sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi \cos n\pi \cosh kh} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin ub}{u} \left\{ \frac{e^{-\sqrt{u^2 + p_n^2} y}}{\sqrt{u^2 + p_n^2}} \cos p_n(h+z) + \frac{e^{-\sqrt{u^2 + q_n^2} y}}{\sqrt{u^2 + q_n^2}} \cos q_n(h+z) \right\} e^{-ixu} du \end{aligned} \dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} F(u, y) &= C_1(u) e^{\sqrt{u^2 + q^2} y} + C_2(u) e^{-\sqrt{u^2 + q^2} y} \\ F(u, y) &= D_1(u) e^{\sqrt{u^2 - q^2} y} + D_2(u) e^{-\sqrt{u^2 - q^2} y} \end{aligned} \right\}$$

が得られる。式 (2), (4) の関係と、\$y \rightarrow \infty\$ において有限となる条件から、第 1 の組は、

$$q = \frac{n\pi}{h} \pm ik \text{ で}$$

$$F(u, y)Z(z) = \{C_2(u) e^{-\sqrt{u^2 + q^2} y}\} A_1 \cos q(h+z)$$

の解が有効であり、また第 2 の組では、入射波は波数 \$k\$ 以外に存在しない条件を用いると、

$$q = k \text{ で}$$

$$F(u, y)Z(z) = \{D_2(u) e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y}\} B_1 \cosh q(h+z)$$

が有効な解となる。以上の結果から改めて表現すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} F(u, y)Z(z) &= A(u) e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n(u) e^{-\sqrt{u^2 + p_n^2} y} \cos p_n(h+z) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n(u) e^{-\sqrt{u^2 + q_n^2} y} \cos q_n(h+z) \end{aligned} \dots (6)$$

ここで

$$p_n = \frac{n\pi}{h} + ik, \quad q_n = \frac{n\pi}{h} - ik$$

式 (4) の境界条件から、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y=0} Z(z) e^{i\omega t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=0} Z(z) e^{i\omega t} e^{ixu} dx \\ &= - \int_{-b}^b v_0 e^{ixu} dx \\ &= -v_0 \frac{2 \sin ub}{u} \end{aligned}$$

と表わされる故、式 (6) を代入してそれぞれの対応する項でまとめると、各係数は次のように決定される。

$$\left. \begin{aligned} A(u) &= V \frac{h-h_1}{h} \frac{2 \sin ub}{u \sqrt{u^2 - k^2}} \\ B_n(u) &= - \frac{V \sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi \cos n\pi \cosh kh} \frac{2 \sin ub}{u \sqrt{u^2 + p_n^2}} \\ C_n(u) &= - \frac{V \sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi \cos n\pi \cosh kh} \frac{2 \sin ub}{u \sqrt{u^2 + q_n^2}} \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

かくするとき、\$\phi\$ はこれらの逆フーリエ変換で求められ、次式のようになる。

3. ケース(1)における副振動

図-2 の場合をケース(1)として、長方形水域内部の幅振動を求めてみよう。まず、外海側の領域(I)における波動の速度ポテンシャルは、 $\phi_{(1)} = \phi_{(1)}^1 + \phi_{(1)}^2$ とおかれ、 $\phi_{(1)}^1$ は

$$\begin{aligned} \phi_{(1)}^1 = & V e^{i\omega t} \cdot \frac{h-h_1}{h} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ub}{u \sqrt{u^2 - k^2}} e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y} \cos ux \, du \\ & - \sum_{n=1}^\infty \frac{V e^{i\omega t} \sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi \cos n\pi \cosh kh} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ub}{u} \left\{ \frac{e^{-\sqrt{u^2 + p_n^2} y}}{\sqrt{u^2 + p_n^2}} \cos p_n(h+z) + \frac{e^{-\sqrt{u^2 + q_n^2} y}}{\sqrt{u^2 + q_n^2}} \cos q_n(h+z) \right\} \cos ux \, du \end{aligned} \quad \dots\dots(10)$$

となる。次に領域(II)の速度ポテンシャルは、捨石部が y 軸に対称で、 $x = \pm b$ まで透過流が存在するときには、 x 方向の振動が生じなくなるので、ラプラスの方程式を満足し、 $y = -(l_1 + l_2)$ において y 方向の流速が消失する関数形を選択すればよい。いうまでもなく式(9)、(10)に対応するから、

$$\begin{aligned} \phi_{(2)} = & A' \cos k(y+l_1+l_2) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{i\omega t} \\ & + \sum_{n=1}^\infty B'_n \cosh \{p_n(y+l_1+l_2)\} \cos p_n(h+z) e^{i\omega t} \\ & + \sum_{n=1}^\infty C'_n \cosh \{q_n(y+l_1+l_2)\} \cos q_n(h+z) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad \dots\dots(11)$$

透過流は非圧縮性であり、流量の連続性から

$|x| < b$ において

$$\left(-\frac{\partial \phi_{(1)}}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(-\frac{\partial \phi_{(2)}}{\partial y} \right)_{y=-l_1}$$

$$\begin{aligned} \phi_{(2)} = & V e^{i\omega t} \frac{h-h_1}{h} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \frac{\cos k(y+l_1+l_2)}{k \sin kl_2} \\ & + \sum_{n=1}^\infty \frac{V e^{i\omega t} \sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi \cos n\pi \cosh kh} \left\{ \frac{\cosh p_n(y+l_1+l_2)}{p_n \sinh p_n l_2} \cos p_n(h+z) + \frac{\cosh q_n(y+l_1+l_2)}{q_n \sinh q_n l_2} \cos q_n(h+z) \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots(14)$$

透過流を規定する方程式(3)において、右辺の圧力勾配に速度ポテンシャルを適用すると、近似的に

$$\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{1}{l_1} \left\{ \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_{(1)}}{\partial t} \right)_{y=0} - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_{(2)}}{\partial t} \right)_{y=-l_1} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_{(1)}}{\partial t} \right)_{y=0} = & \frac{e^{i\omega t}}{\cosh kh} \left[2a + \frac{i\sigma}{g} V \frac{h-h_1}{h} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ub}{u \sqrt{u^2 - k^2}} \cos ux \, du \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^\infty \frac{i\sigma}{g} \frac{V \sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi \cos n\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ub}{u} \left\{ \frac{1}{\sqrt{u^2 + p_n^2}} + \frac{1}{\sqrt{u^2 + q_n^2}} \right\} \cos ux \, du \right] \\ \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_{(2)}}{\partial t} \right)_{y=-l_1} = & \frac{e^{i\omega t}}{\cosh kh} \left[\frac{i\sigma}{g} V \frac{h-h_1}{h} \frac{\cos kl_2}{k \sin kl_2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{i\sigma}{g} \frac{V \sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi \cos n\pi} \left\{ \frac{\coth p_n l_2}{p_n} + \frac{\coth q_n l_2}{q_n} \right\} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots(15)$$

$\cos ux$ については、 $x = -b$ から $x = b$ までの平均値で与えると、

$$\frac{1}{2b} \int_{-b}^b \cos ux \, dx = \frac{\sin ub}{bu}$$

となるから、これを代入するならば、式(15)にみられる

$$\phi_{(1)}^1 = \frac{g2a}{i\sigma} \cos ky \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{i\omega t} \quad \dots\dots(9)$$

に示されるように、領域(I)における重複波を表わす。 $\phi_{(1)}^1$ は式(8)で表わされるもので、捨石部による擾乱を示している。これを波数 u の正の領域に変換して示せば、

が成立する。よってそれぞれ対応する項から、まず

$$A' k \sin kl_2 = V \frac{h-h_1}{h} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ub}{u} \cos ux \, du$$

ここで

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ub}{u} \cos ux \, du = \begin{cases} 1 & |x| < b \\ 0 & |x| > b \end{cases} \quad \dots\dots(12)$$

であるから

$$A' = V \frac{h-h_1}{h} \frac{1}{k \sin kl_2}$$

同様にして、

$$\begin{aligned} B'_n = & \frac{1}{p_n \sinh p_n l_2} \frac{V \sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi \cos n\pi \cosh kh} \\ C'_n = & \frac{1}{q_n \sinh q_n l_2} \frac{V \sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi \cos n\pi \cosh kh} \end{aligned} \quad \dots\dots(13)$$

式(13)を式(11)へ代入することにより、 $\phi_{(2)}$ は次のように決定される。

V を求めるには、 $z = -h$ において適用すると取扱いが簡単になる。すなわち、 $z = -h$ において

$$v_0 = V e^{i\omega t} \frac{1}{\cosh kh}$$

積分などは、多少の演算を加えて次のように示される。

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ub}{u \sqrt{u^2 - k^2}} \cos ux \, du = \frac{1}{k} \{-i\phi_1 + \phi_2\} \quad \dots\dots(16)$$

ここで

$$\phi_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{kb} kb \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2 \sqrt{(kb)^2 - \alpha^2}} d\alpha \quad \phi_2 = \frac{2}{\pi} \int_{kb}^{\infty} kb \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - (kb)^2}} d\alpha$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u b}{u} \left\{ \frac{1}{\sqrt{u^2 + p_n^2}} + \frac{1}{\sqrt{u^2 + q_n^2}} \right\} \cos u x du = \frac{1}{k} \phi_3(n) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで

$$\phi_3(n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} kb \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \left[\frac{2\sqrt{\left\{ \alpha^2 + \left(\frac{n\pi}{h} b \right)^2 - (kb)^2 \right\}^2 + \left(\frac{2n\pi kb^2}{h} \right)^2} + 2\left\{ \alpha^2 + \left(\frac{n\pi b}{h} \right)^2 - (kb)^2 \right\}}{\left\{ \alpha^2 + \left(\frac{n\pi}{h} b \right)^2 - (kb)^2 \right\}^2 + \left(\frac{2n\pi kb^2}{h} \right)^2} \right]^{1/2} d\alpha$$

$$I_3 = \frac{\coth p_n l_2}{p_n} + \frac{\coth q_n l_2}{q_n} = \frac{1}{k} \phi_4(n) \quad \dots\dots (18)$$

ここで

$$\phi_4(n) = \frac{k}{\left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 + k^2} \times \frac{\frac{2n\pi}{h} \sinh \frac{2n\pi l_2}{h} - 2k \sin 2kl_2}{\cosh \frac{2n\pi l_2}{h} - \cos 2kl_2}$$

これから判明するように、 ϕ_1 、 ϕ_2 、 $\phi_3(n)$ 、 $\phi_4(n)$ は実数値関数である。以上の結果を用い、 $V = V_0 e^{i\omega}$ において方程式 (3) へ代入し、実数部、虚数部の計算から次のようになる。

$$(\eta_2)_{y=-(l_1+l_2)} = \frac{2a}{\sqrt{M_1^2 + N_1^2}} \sin(\sigma t + \omega)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 + k^2} \frac{\frac{n\pi}{h} \sinh \frac{n\pi l_2}{h} \cos kl_2 - k \cosh \frac{n\pi l_2}{h} \sin kl_2}{\left(\sinh \frac{n\pi}{h} l_2 \cos kl_2 \right)^2 + \left(\cosh \frac{n\pi}{h} l_2 \sin kl_2 \right)^2}$$

$$\times \frac{2a}{l_1} \frac{1}{\sqrt{M_1^2 + N_1^2}} \cos(\sigma t + \omega) \quad \dots\dots\dots (19)$$

式 (19) において、一般に $l_2 \gg h$ であるため級数項の影響は小さく、ほとんど第 1 項で支配されてくる。ここで、

$$M_2 = \left(\frac{gkl_1}{\beta\sigma} \frac{h}{h-h_1} + \phi_1 \right) \sin kl_2$$

$$N_2 = \left\{ \frac{kl_1}{\lambda} \frac{h}{h-h_1} + \phi_2 \right.$$

$$\left. - \frac{h}{h-h_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi \cos n\pi} (\phi_3(n) + \phi_4(n)) \right\}$$

$$\times \sin kl_2 - \cos kl_2$$

したがって、

$$\max \left| \frac{(\eta_2)_{y=-(l_1+l_2)}}{2a} \right| \doteq \frac{1}{\sqrt{M_2^2 + N_2^2}} = R$$

によって、長方形水域における振幅の外海に対する増幅率が判断できる。いまこれを改めて書き直すと、

$$R = \left[\frac{1}{2} (1 + A^2 + B^2) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (1 - A^2 - B^2) \sqrt{1 + \left(\frac{2B}{1 - A^2 - B^2} \right)^2} \right]^{-1/2} \times \cos(2kl_2 + \theta) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\omega = \tan^{-1} \frac{N_1}{M_1}$$

$$V_0 = -\frac{2a}{l_1} \frac{1}{\sqrt{M_1^2 + N_1^2}}$$

ここで

$$M_1 = \frac{1}{\beta} + \frac{\sigma}{gkl_1} \frac{h-h_1}{h} \phi_1$$

$$N_1 = \frac{\sigma}{\lambda g} + \frac{1}{gkl_1} \left\{ \frac{h-h_1}{h} \phi_2 - \frac{h-h_1}{h} \frac{\cos kl_2}{\sin kl_2} \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi \cos n\pi} (\phi_3(n) + \phi_4(n)) \right\}$$

領域 (II) の振動は $y = -(l_1 + l_2)$ において最大となり、その水位 η_2 を実数値で表現すると、

ここで

$$A = \frac{gkl_1}{\beta\sigma} \frac{h}{h-h_1} + \phi_1$$

$$B = \frac{kl_1}{\lambda} \frac{h}{h-h_1} + \phi_2$$

$$- \frac{h}{h-h_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{h} h_1}{n\pi \cos n\pi} (\phi_3(n) + \phi_4(n))$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2B}{1 - A^2 - B^2}$$

式 (20) により、 kl_2 の変化に対して R の挙動が判明する。

4. ケース (2) における副振動

もう一つの配置形態として図-3 に示す地形を考え、これをケース (2) とする。この場合には、 $y=0$ 、 $y=l_1+l_2$ 、 $x=b$ 、 $x=-b$ の線の上に運動を拘束する条件があるので、式 (8) に示すような形式の速度ポテンシャルが 4 個加算されてくる。ところで式 (8) の第 1 項と級数項は取扱いが同等となるので、複雑さを避ける意味で、第 1 項のみの形で説明を行なうことにする。図-3

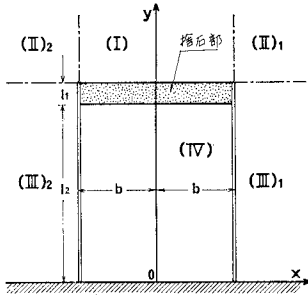


図-3 ケース(2)の配置図

から現象は y 軸に対して対称となるので、外海側では領域 (I), (II)₁, (III)₁ を検討すれば充分である。

領域 (I) の速度ポテンシャルは波数 u, v を用いて、次のようにおく。

$$\begin{aligned}\phi_{(I)} &= \phi_{(I)}^1 + \phi_{(I)}^2 + \phi_{(I)}^3 + \phi_{(I)}^4 + \phi_{(I)}^5 \\ \phi_{(I)}^1 &= \frac{g^2 a}{i\sigma} \cos ky \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{i\sigma t} \\ \phi_{(I)}^2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_1 \frac{\sin \frac{l_1+l_2}{2} v}{v \sqrt{v^2-k^2}} e^{\sqrt{v^2-k^2}(x-b)} \\ &\quad \times \cos \left(y - \frac{l_1+l_2}{2} \right) v dv \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{i\sigma t} \\ \phi_{(I)}^3 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty -B_1 \frac{\sin \frac{l_1+l_2}{2} v}{v \sqrt{v^2+k^2}} e^{-\sqrt{v^2-k^2}(x+b)} \\ &\quad \times \cos \left(y - \frac{l_1+l_2}{2} \right) v dv \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{i\sigma t} \\ \phi_{(I)}^4 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty -C_1 \frac{\sin ub}{u \sqrt{u^2-k^2}} e^{-\sqrt{u^2-k^2}(y-(l_1+l_2))} \\ &\quad \times \cos u(x \mp b) du \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{i\sigma t} \\ \phi_{(I)}^5 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty -D_1 \frac{\sin ub}{u \sqrt{u^2-k^2}} e^{-\sqrt{u^2-k^2}y} \\ &\quad \times \cos u(x \mp b) du \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{i\sigma t}\end{aligned} \quad (21)$$

ここで $\cos u(x \mp b)$ は $x \geq 0, x \leq 0$ でそれぞれをとるこ

$$\begin{aligned}\phi_{(I)} &= \frac{g^2 a}{i\sigma} \cos ky \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{i\sigma t} \\ &\quad + C_1 \frac{2}{\pi} \int_0^\infty -\frac{\sin ub}{u \sqrt{u^2-k^2}} \{ e^{-\sqrt{u^2-k^2}(y-(l_1+l_2))} + e^{-\sqrt{u^2-k^2}(y+l_1+l_2)} \} \times \cos u(x \mp b) du \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{i\sigma t}\end{aligned} \quad (27)$$

かくして、領域 (I) と (IV) との間でケース (1) と同様な操作を行えば解が求められる。

参考文献

- 1) 本間 仁: 水理学, 丸善株式会社, 昭 55.

とを意味する。また、領域 (II)₁, (III)₁ の速度ポテンシャルも、符号は異なるものの同形式におかれ、それぞれの係数が A_2, B_2, C_2, D_2 と A_3, B_3, C_3, D_3 とで与えられる。各領域の境界において、水位の対象性、連続性、流量の連続性を考慮すると、

$$\left. \begin{aligned}A_1 &= -A_2 = -A_3 = -B_1 = -B_2 = -B_3 \\ C_1 &= C_2 = -C_3 \\ D_1 &= D_2 = D_3\end{aligned} \right\} \quad (22)$$

の関係が得られる。 $y=0$ の境界上において

$$\left(-\frac{\partial \phi_{(3)}}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (23)$$

が満足されなければならないので、 $C_3 e^{-\sqrt{u^2-k^2}(l_1+l_2)} + D_3 = 0$ となり、また波数 v のとり値は、

$$\left. \begin{aligned}2 \sin^2 \left(\frac{l_1+l_2}{2} v \right) &= 1 - \cos(l_1+l_2)v = 0 \\ e^{\sqrt{v^2-k^2}b} + e^{-\sqrt{v^2-k^2}b} &= 2 \cosh \sqrt{v^2-k^2}b = 0\end{aligned} \right\} \quad (24)$$

のときのみ A_3 が存在し、それ以外のときは 0 とならなければならない。すなわち

$$\left. \begin{aligned}v &= v_n = \frac{2n\pi}{l_1+l_2} \\ v &= v_n^* = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2n+1}{2b} \pi \right)^2} \\ n &= 0, 1, 2, \dots\end{aligned} \right\} \quad (25)$$

が v のとり得る値である。一方、 $x=b, 0 \leq y \leq l_1+l_2$ の範囲で

$$\left(-\frac{\partial \phi_{(3)}}{\partial x} \right)_{x=b} = 0 \quad (26)$$

の条件が存在する。式 (24) の拘束性から、式 (26) は常に満されるが、かかる拘束性の故に $x=b, y > l_1+l_2$ の境界上では水位が連続であっても流量が不連続となるため、結局のところ、 $A_3=0$ とおかれる。すなわち、 $\phi_{(I)}^2, \phi_{(I)}^3$ など波数 v に関するものは消失する。

以上のような結果から、領域 (I) の $\phi_{(I)}$ は次のようになる。

- 2) 河田龍夫: Fourier 変換と Laplace 変換, 現代応用数学 5, 岩波書店, 1957.

- 3) 合田良実: 長方形および扇形の港の副振動について, 第 10 回海岸工学講演集, 土木学会, 昭 38.