

放物型方程式による屈折・回折の数値計算

橋 本 宏*

1. ま え が き

浅海における波は海岸地形や構造物の影響を受けて、屈折や回折などの波の変形を生じる。これらの波高および波向の変化を予測する方法としては種々のものが提案されている。屈折に関しては、一般的なものとして波向線法があり、図式解法や数値計算法があるが、波向線が交差する場合に問題を生じる。回折に関しては、簡単には半無限の防波堤による解を重ね合わせる方法などが用いられ、またグリーン関数を用いた解法なども検討されている。屈折および回折を同時に取扱う方法としては伊藤・谷本¹⁾の提案した数値波動解析法や Abbott ら²⁾の方法がある。これらの方法は屈折、回折、反射などを計算できるが、計算に際しては大容量の記憶装置を有する計算機を必要とし、また計算時間も長いという短所を有している。

比較的短い計算時間で、屈折および回折による波の変形を計算する方法として放物型の方程式を用いて解く方法が提案されている。一般に微小振幅波は楕円型の方程式で表わされているが、これを放物型の方程式で近似すると数値的には解きやすくなる。球面浅瀬にこの方法を適用した結果についてはすでに Radder³⁾や Lozano⁴⁾らによって検討がなされているが、回折現象を数値的に解くことについてまだ検討がなされていない。近似式であるために、当然式の適用限界が考えられ、また数値計算に際しては計算上の安定性や精度について明らかにしておく必要があろう。本論文は屈折および回折計算に放物型の方程式を適用した場合の式の適用限界や数値計算上の問題について検討を行なった結果を報告するものである。

2. 基 本 式

海底地形変化が緩やかな場合の単一周期を有する微小振幅波は次の式で表わされる⁵⁾。

$$\nabla^2(CC_g \nabla \Phi) + \omega^2 \Phi C_g / C = 0 \quad (1)$$

ここで $\Phi(x, y)$ は複素 2 次元のポテンシャル関数、 ω : 波の角周波数、 C : 波速、 C_g : 群速度であり、 $\nabla \equiv (\partial/\partial x,$

$\partial/\partial y)$ である。

ここで $\phi = \Phi(CC_g)^{1/2}$ とおくと (1) 式は次のようなヘルムホルツの式に変換される。

$$\nabla^2 \phi + k_0^2 \phi = 0 \quad (2)$$

また k_0 は次のように表わされる。

$$k_0^2 = k^2 - \frac{\nabla^2(CC_g)^{1/2}}{(CC_g)^{1/2}} \quad (3)$$

波数 k は角周波数と次の関係にある。

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (4)$$

ここで g : 重力の加速度、 h : 水深である。

式 (2) のヘルムホルツの式を放物型方程式で近似するには、波の場を進行波と逆行波にまず分離する。Radder⁶⁾によれば進行波を ϕ^+ で表わし、逆行波を ϕ^- で表わすと次のようになる。

$$\phi = \phi^+ + \phi^- \quad (5)$$

また $\phi^+ \simeq e^{ikx}$, $\phi^- \simeq e^{-ikx}$ とすると式 (2) は次のようになる。但しここでは k_0 を k としている。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^+}{\partial x} = & \left(ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi^+ \\ & + \left(\frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi^- \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^-}{\partial x} = & \left(\frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial x} - \frac{i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi^+ \\ & + \left(-ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial x} - \frac{i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi^- \quad (7) \end{aligned}$$

入射波に対して、反射による逆行波が小さければ、式 (6) の右辺第二項を省略することができて、次の放物型の式を得る。

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial x} = \left(ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi^+ \quad (8)$$

進行波を $\phi^+ = \phi \exp(ik_0 x)$ とおき、 $\phi(x, y)$ は複素ポテンシャル、 k_0 を代表波数とすると式 (8) は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2ik_0 n \frac{\partial \phi}{\partial x} + f \phi = 0 \quad (9)$$

ここで $n = k/k_0$ であり f は次のようになる。

$$f = k_0^2 n \left[2(n-1) + \frac{i}{k_0} \frac{\partial \ln(n)}{\partial x} \right] \quad (10)$$

* 正会員 建設省土木研究所 海岸研究室長

ここでは波の場を一定の振幅、波数、波向を有する波で近似し、それからの変化を計算することになる。したがって軸と主要な波の進行方向を一致させるのが望ましく、また近似的な波向線が別な方法で求められれば、座標軸をそれに合せて解析することも行なわれている。

数値計算によって解いていく場合には規則的な格子に分割するのが簡単であるために、 x 軸方向に Δx 間隔、 y 軸方向に Δy 間隔で格子を設けて解く。式(9)の差分化の方法としては放物型方程式を解く場合の一般的方法であるクランク・ニコルソン型の差分式を用いる。これは複素ポテンシャルを $\phi(i\Delta x, j\Delta y) = \phi_j^i$ で表わすと次のようになる。

$$\begin{aligned} & \phi_j^{i+1} + \phi_j^{i+1} + \phi_{j+1}^i + \phi_{j-1}^i \\ & + [-2 + (\Delta y)^2 f_j^{i+1/2}] (\phi_j^{i+1} + \phi_j^i) \\ & + 4ik_0 \frac{(\Delta y)^2}{\Delta x} n_j^{i+1/2} (\phi_j^{i+1} - \phi_j^i) = 0 \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここで

$$n_j^{i+1/2} = \frac{1}{2} (n_j^{i+1} + n_j^i) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} f_j^{i+1/2} = k_0^2 n_j^{i+1/2} & \left[2(n_j^{i+1/2} - 1) + \frac{i}{k_0} \ln \left(\frac{n_j^{i+1}}{n_j^i} \right) / \Delta x \right] \\ & \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

である。初期条件 ϕ_j^0 を与えると式(11)を用いて $i+1$ での値を計算することができる。この場合連立方程式を解くことになるが三重対角行列になるので簡単に解くことができる。

3. 数値計算による検討

屈折および回折を放物型方程式をもとにした数値計算法によって解く場合には、放物型方程式による近似の問題と数値計算上の問題がある。前者については波の進行方向と軸が一致しない場合に問題を生じると考えられ、屈折や回折によって波向が変化する場合がこれにあたる。また反射波は小さいとしているために、当然入射波と逆方向に進む波は計算できないが、入射波と同じ方向に反射する波についても入射角が大きくなると精度が悪くなる。数値計算上の問題については計算に際しての安定性、精度、境界条件の処理などがあげられる。安定性に関してはクランク・ニコルソン法は常に安定であり、境界条件や非線形性の影響がなければ問題は無いと考えられ、ここでは検討を行なわなかった。

基本式および計算上の問題点を検討するために、一様斜面上の浅水変形、屈折、突堤や防波堤のように海岸に直角に設けられた構造物による反射および回折、半無限堤による回折などについて数値計算を行ない、その精度等について検討した。

3.1 浅水変形

一様な勾配を有する海岸に波が直角に入射する場合に

ついて計算を行ない、格子間隔 Δx と計算精度の関係について検討した。計算精度は計算範囲、 Δx 、水深の変化状況によって変わると考えられる。計算範囲としては $h/L_0 = 0.1$ から 0.02 までとし、 Δx については $\Delta x/L_0 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$ とし、海底勾配を 1/10, 1/20, 1/40, 1/100 とした場合について計算を行なった。なおここで L_0 は波長である。

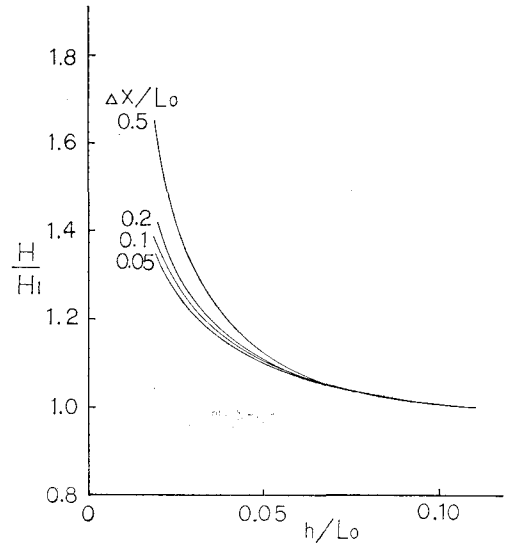


図-1 水深変化による波高変化

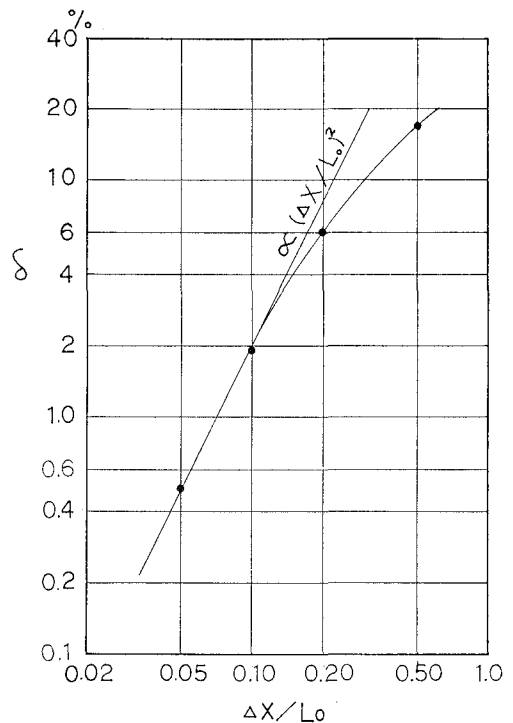


図-2 格子間隔と誤差の関係

水深による波高変化を図-1に示す。基本式は微小振幅波理論によっているために、当然理論値に一致しなければならないが、計算結果によれば $\Delta x/L_0$ が小さいほど誤差は小さくなっている。また海底勾配によっては誤差はあまり変わっていない。比水深 $h/L_0=0.02$ における波高についての誤差 δ と $\Delta x/L_0$ の関係を図-2に示す。ここで δ は次式による。

$$\delta = \frac{|H_c - H_t|}{H_t} \times 100 \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで H_c : 計算値, H_t : 理論値である。数パーセントの精度で計算を行なうには $\Delta x/L_0$ としては 0.1 程度が必要であり、この程度の値では δ は $\Delta x/L_0$ の 2 乗に比例している。

3.2 屈 折

ここで採用した放物型の計算式は波の進行方向と x 軸が一致しなければ誤差を生じる。一様勾配を有する海浜に波が斜めに入射する場合の屈折状況について計算を行なった。等深線に対して直角に軸を採り、斜めに波が入射するものとして、海底勾配を $1/20$ とし、 $\Delta x/L_0=0.05$, 入射角を $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ とした場合について計算した。比水深 $h/L_0=0.02$ における波向および波高についての誤差と入射角の関係を示したのが図-3である。等深線が平行な場合の波高と波向については微小振幅波理論によれば次式による関係が成立するために、この関係と計算値の比較を行なった。

$$\frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{C_{g1}}{C_{g2}} \right)^{1/2} \left(\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \right)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{k_1}{k_2} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで H, α はそれぞれ波高と波の入射角であり、添字

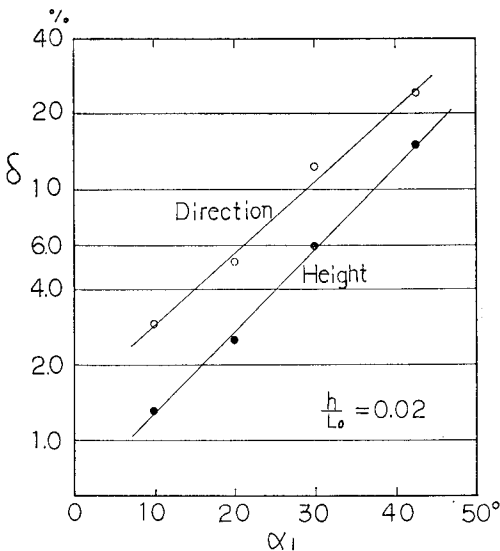


図-3 入射角と誤差の関係

1 と 2 でそれぞれの地点での値を表わす。図-3に示す計算では $h_1/L_0=0.1, h_2/L_0=0.02$ とした。

計算の精度については、当然ではあるが波が等深線に対して直角に入射する場合 ($\alpha_1=0^\circ$) に比較すると悪くなり、 $\Delta x/L_0=0.05$ でも入射角が 30° を越えると精度が悪い。しかし、絶対値としては入射角 $\alpha_1=45^\circ$ に対して $h_2/L_0=0.02$ で理論値は $\alpha_2=20^\circ$ であり、一方計算値は $\alpha_2=24^\circ$ で必ずしも実用的でないとはいえない。

屈折計算を波向線法によって計算する場合に問題となるのは波向線の交差であるが、放物型の計算法ではこのような問題は生じない。伊藤ら⁷⁾が数値波動解析法で計算および実験した球面浅瀬について放物型方程式によって計算した結果を図-4に示す。伊藤らの実験値も合わせて示すが、これらの値はほぼ一致している。このように波の進行方向と座標軸がほぼ一致している場合には、放物型方程式による方法は威力を発揮する。

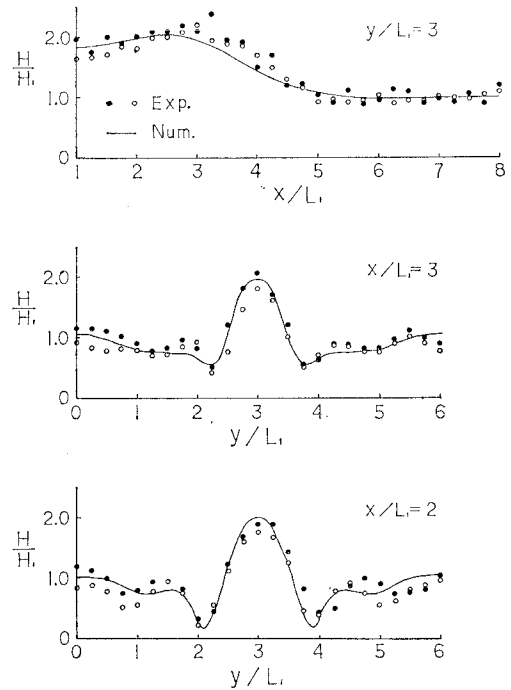


図-4 球面浅瀬による波高変化

数値波動解析法は xy 平面を放物型方程式による方法と同様に波長の $1/10$ 程度の格子に分割し、また時間については周期の $1/10$ 程度の時間々隔で数百波について計算を行なう。一方、放物型方程式による方法は一端から他端まで計算すればよいために計算時間は 2 桁程度少なくなり、非常に有効な方法と考えられる。

3.3 回 折

半無限堤に波が斜めに入射する場合には、図-5に示すように反射領域および回折領域が形成される。波の入射角 θ が 45° を越える場合には放物型方程式において

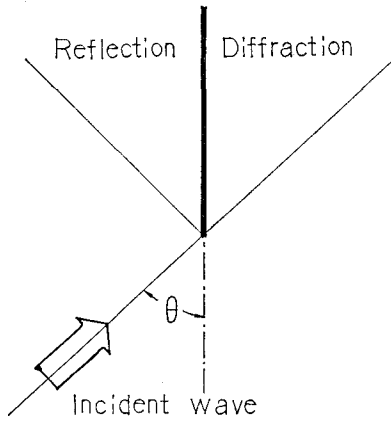


図-5 半無限堤への波の入射

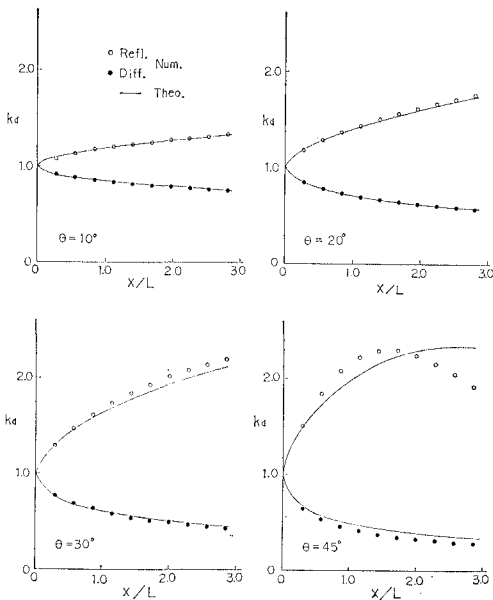


図-6 半無限堤による斜め入射波の反射と回折

は逆行波を無視しているために反射領域の計算はできない。水深が一定で波の入射角が 10° , 20° , 30° , 45° の場合の半無限堤に沿った反射領域および入射領域における波高変化を図-6に示す。ここで $x=0$ は半無限堤の先端を示す。また計算に際しては半無限堤に沿って $\partial\phi/\partial y=0$ という境界条件を与えている。これは x 軸を半無限堤に平行に探っており、堤に直角的な流速成分はないということを表している。

波の入射角が小さい場合には理論値と計算値は反射領域、回折領域とも一致しているが、入射角が 30° になると5%程度の違いを生じる。さらに入射角が大きくなり 45° になると反射領域では大きな違いを生じるようになる。

半無限堤に直的に波が入射する場合について、回折領域での計算を行なった。初期条件として堤のある場所で

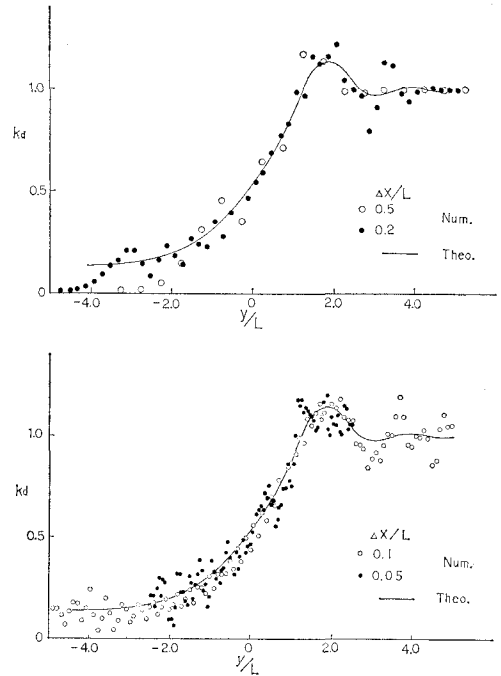


図-7 半無限堤による直角入射波の回折

は $\phi=0$, ない場所では $\phi=1.0$ として $\Delta x/L=0.05$, 0.1 , 0.2 , 0.5 の条件で計算をした結果を図-7に示す。これは $x/L=5.0$ での値を示している。理論値と比較すると計算値は振動していること、また y/L が大きいほど理論値との一致がよくないことが明らかである。計算値の振動については $\Delta x/L$ が小さくなるほど細かい振動が入り、計算の精度は向上していない。これは、数値計算においては Δy ごとに値が与えられるために、防波堤の位置で ϕ の値に大きな飛びがある場合にはギブスの

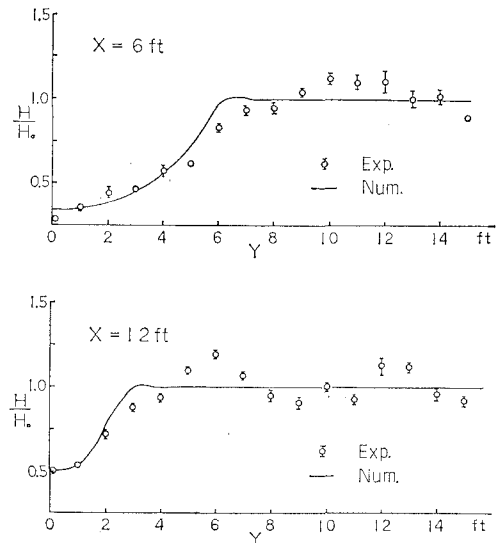


図-8 一定勾配の海浜における突堤による回折

現象が生じることによって考えられる。 ϕ が 0 から 1 に変化し、かつ ϕ が $4y$ ごとに与えられる場合には、その間では一定値をとらず振動する値をとることになる。これは数値計算上の問題であり、差分式や境界条件の与え方によって、このような振動の発生をおさえることが必要であろう。振動が少なくなれば防波堤先端から $\pm 20^\circ \sim 30^\circ$ の範囲であれば、放物型方程式による計算で回折による波高変化を求めることができる。

回折と屈折が組合さった場合については理論値がないために直接的な比較は困難であるが、一様勾配の海浜に直角に防波堤が設けられている場合の WES⁹⁾ における実験結果と計算値の比較を行なった。図-8 は勾配 1/20 の海浜に周期 1.0 sec, 入射角 20° の波が入射する場合の回折領域における実験値と計算値を比較したものである。両者はほぼ一致しているものの、詳細に調べると違っている場合もあり、その原因についてはさらに検討が必要であると考えられる。

4. ま と め

波動の場を進行波と逆行波に分けることによって楕円型の方程式を放物型の方程式で近似して、屈折および回折計算を行なう方法について検討を行なった。数値計算の精度は格子間隔により、波長の 1/10 程度の間隔で計算を行なえば数%の誤差となる。また波の進行方向と x 軸が一致しなければ、誤差を生じ、その差異を 20° 以内とするのが望ましいと考えられる。半無限堤の回折計算のように波高分布が大きく変化する場合にはギブスの現

象によって計算値が振動し、何らかの対策が必要と考えられた。ここで用いた方法は屈折および回折を同時に計算することができ、数値波動解析法などに比較しても計算時間が非常に短いために、その応用範囲は広いと考えられる。しかし近似解法であるためにその適用性について実験値との比較を行なうなどの検討を必要としよう。

参 考 文 献

- 1) 伊藤喜行・谷本勝利: 数値波動解析法とその応用——構造物周辺の波——, 第18回海講論文集, pp. 67~70, 1971.
- 2) Abbott, M. B., H. M. Petersen and O. Skovgaard: On the numerical modelling of short waves in shallow water waves, Jour. Hydraulic Res., Vol. 16, No. 3, pp. 173~204, 1978.
- 3) Radder, A. C.: On the parabolic equation method for water-wave propagation, Jour. Fluid Mech., Vol. 95, pp. 159~176, 1979.
- 4) Lozano, C. and P. L. F. Liu: Refraction-diffraction model for linear surface water waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 101, pp. 705~720, 1980.
- 5) Smith, R. and T. Sprinks: Scattering of surface waves by a conical island, Jour. Fluid Mech., Vol. 72, pp. 373~384, 1975.
- 6) 前出 3)
- 7) 伊藤喜行・谷本勝利: 波向線交差領域での波の屈折——数値波動解析法の応用(2)——, 第19回海講論文集, pp. 325~329, 1972.
- 8) Hales, L. Z.: Erosion control of scour during construction, Rept. 3, Experimental measurements of refraction, diffraction, and current patterns near jetties, Tech. Rept. HL-80-3, U.S. Army Engineer Waterways Experimental Station, 150 p., 1980.