

特性曲線法による平面 2 次元波の数値計算法

石 田 啓*・中 島 光 浩**

1. 緒 言

著者らはすでに、長方形格子法による特性曲線法を用いることにより、海底地形の変化に伴う非線形長波の変形特性を取り扱ったが、実際の海浜では、海底地形が波の進行方向のみならず、2次元平面内で複雑に変化し、さらにまた、その中に、種々の海岸構造物が設置されていることが考えられる。したがって、現地に即した波の変形を取り扱うためには、波の反射、回折および屈折を考慮した平面 2 次元波の変形計算法を確立する必要がある。また、遠浅の海岸を進行する津波では、分散性が無視できないことを考えると、分散性を考慮した計算法の確立が必要となる。以上の観点から、本研究では、まず、非線形性および分散性を考慮した平面 2 次元波の基礎方程式を誘導し、この特性曲線表示を行い、第一段階として、これを線型近似した場合の計算方法を提示する。次に、本計算法を 1 次元波の伝播問題に適用し、この計算法の妥当性を検討した後、平面 2 次元波の問題として、離岸堤周辺の波、角柱構造物周辺の波および円錐浅瀬を乗り越える波を取り上げ、これらの特性について検討する。

2. 基礎方程式とその特性曲線表示^{2),3),4),5)}

まず、Mei らの⁵⁾誘導した理論を平面 2 次元波の問題に拡張し、浅海における非線形長波の基礎方程式を誘導する。座標系を 図-1 のようにとり、基準水深を h_0 、そこにおける波長を L_0 、重力加速度を g で示し、 $L_0\sqrt{gh_0}$ で割って無次元化した速度ポテンシャル ϕ を、

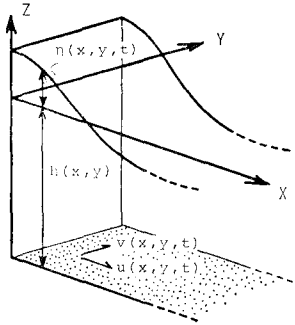


図-1 座 標 系

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (z+h)^n \phi^{(n)}(x, y, t) \quad \cdots \cdots (1)$$

のように $(z+h)$ のべきに展開する。これをラプラスの式および底面条件式に代入すれば、 $\phi^{(n)}$ に関する漸化式が得られ、全ての $\phi^{(n)}$ が $\phi^{(0)}$ を用いて表わされる。ここに、 x, y および z ならびに h は、 L_0 で割って無次元化した座標ならびに水深であり、 t は $L_0/\sqrt{gh_0}$ で割って無次元化した時間である。式 (1) を水面における運動学的および力学的条件式に代入し、 $\phi^{(n)}$ に関する漸化式を用いると、

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + [u(h+\eta)]_x + [v(h+\eta)]_y \\ - (h^3/6)(u_{xxx} + u_{xyy} + v_{xxy} + v_{yyy}) = 0, \\ u_t + uu_x + vv_y + \eta_x/\varepsilon - (h^2/2)(u_{xxt} + v_{xyt}) = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \eta_y/\varepsilon - (h^2/2)(u_{xyt} + v_{yvt}) = 0, \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (2)$$

が得られる。ここに、 $u = \phi_x^{(0)}$ 、 $v = \phi_y^{(0)}$ であり、 ε は、 $\varepsilon = h_0/L_0$ で与えられる微小量である。なお、式 (2) は、非線形性と分散性が同程度であり、底勾配が ε に比べて小さいという仮定の基に誘導したものである。次に、式 (2) に含まれる u および v の高階微係数を、式 (2) の 1 次近似式を用いて書き換え、式 (2) を行列表示すれば、

$$\tilde{I}U_t + \tilde{A}U_x + \tilde{B}U_y = C \quad \cdots \cdots (3)$$

となる。ここに、 $\tilde{I}$ は単位行列であり、

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\varepsilon & 0 & u & 0 & h/2 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 6u/\varepsilon h & 0 & 6/\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & h/2 \\ 1/\varepsilon & 0 & 0 & v & 0 \\ 6v/\varepsilon h & 0 & 0 & 6/\varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = (a, \Omega, 0, 0, -6(1-\eta/h)a/\varepsilon h - 6(h_x u + h_y v)/\varepsilon h)^T, \\ U = (\eta, a, u, v, \Omega)^T$$

である。 U 中の成分 a および Ω はそれぞれ η および η_u である。ここで、ある曲面 $\varphi(x, y, t) = 0$ を考え、

* 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木工学科
** 正会員 工修 北陸電力株式会社 土木部

その曲面上に、法線方向を φ とした局部座標 (φ, ξ, λ) を導入し、これを用いて式 (3) を書き変えると、

$$(\tilde{I}\varphi_t + \tilde{A}\varphi_x + \tilde{B}\varphi_y)U_\varphi + (\tilde{I}\xi_t + \tilde{A}\xi_x + \tilde{B}\xi_y)U_\xi + (\tilde{I}\lambda_t + \tilde{A}\lambda_x + \tilde{B}\lambda_y)U_\lambda = C \quad (4)$$

$$\det |\tilde{I}\varphi_t + \tilde{A}\varphi_x + \tilde{B}\varphi_y| = \det \begin{vmatrix} \varphi_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_t & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_x/\varepsilon & 0 & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y & 0 & h\varphi_x/2 \\ \varphi_y/\varepsilon & 0 & 0 & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y & h\varphi_y/2 \\ 6(u\varphi_x + v\varphi_y)/\varepsilon h & 0 & 6\varphi_x/\varepsilon & 6\varphi_y/\varepsilon & \varphi_t \end{vmatrix} \\ = \varphi_t^2(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)[\varphi_t(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y) - 3h(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)/\varepsilon] = 0 \quad (5)$$

によって表される。式 (5) より、3 種類の特性多様体が考えられるが、ここでは、式 (3) を、

$$\varphi_t(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y) - 3h(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)/\varepsilon = 0 \quad (6)$$

で示される特性曲面上の 4 本の陪特性曲線と、

$$\varphi_t = 0 \quad (7)$$

で示される特性曲線に沿って表示する。すなわち、

$$\frac{dx}{dt} \equiv \zeta_1 = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 12h/\varepsilon}}{2} \quad \text{および} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{v}{2} \quad (8)$$

に沿って、

$$(A_1, 0, 1, B_1, C_1) \frac{dU}{dt} + \left(\frac{3v}{\varepsilon\zeta_1}, 0, v, \frac{3h}{\varepsilon\zeta_1}, 0 \right) \frac{dU}{dy} \\ = \left(\frac{\zeta_1 + 3u}{\varepsilon\zeta_1^2} - \frac{3(h+\eta)}{\varepsilon\zeta_1 h} \right) a - \frac{3}{\varepsilon\zeta_1} (h_x u + h_y v) \quad (9)$$

が成立し、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u}{2} \quad \text{および} \quad \frac{dy}{dt} \equiv \zeta_2 = \frac{v \pm \sqrt{v^2 + 12h/\varepsilon}}{2} \quad (10)$$

に沿って、

$$(A_2, 0, B_2, 1, C_2) \frac{dU}{dt} + \left(\frac{3u}{\varepsilon\zeta_2}, 0, \frac{3h}{\varepsilon\zeta_2}, u, 0 \right) \frac{dU}{dx} \\ = \left(\frac{\zeta_2 + 3v}{\varepsilon\zeta_2^2} - \frac{3(h+\eta)}{\varepsilon\zeta_2 h} \right) a - \frac{3}{\varepsilon\zeta_2} (h_x u + h_y v) \quad (11)$$

が成立する。ここに、

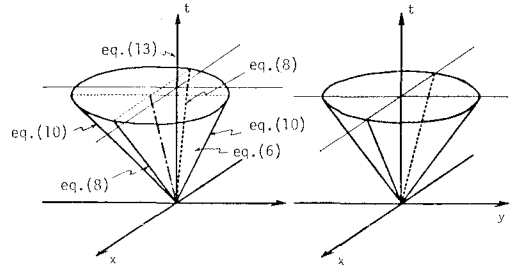
$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{(2\zeta_1 + 6u)(1 + \zeta_1^2) + 3\zeta_1 v^2}{2\varepsilon\zeta_1^3 R_1}, \\ A_2 &= \frac{(2\zeta_2 + 6v)(1 + \zeta_2^2) + 3\zeta_2 u^2}{2\varepsilon\zeta_2^3 R_2}, \\ B_1 &= \frac{3hv}{2\varepsilon\zeta_1 R_1}, & B_2 &= \frac{3hu}{2\varepsilon\zeta_2 R_2}, \\ C_1 &= \frac{h(1 + \zeta_1^2)}{2\zeta_1 R_1}, & C_2 &= \frac{h(1 + \zeta_2^2)}{2\zeta_2 R_2}, \\ R_1 &= 1 + \zeta_1^2 + (v/2)^2, & R_2 &= 1 + \zeta_2^2 + (u/2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。また、

$$dx/dt = 0 \quad \text{および} \quad dy/dt = 0 \quad (13)$$

に沿って、

となる。ところで特性曲面上では、式 (4) は、曲面上に沿う微分 U_ξ, U_λ のみの関係式となるはずであるから、特性多様体は、



(a) 非線形の場合 (b) 線形の場合

図-2 特性多様体

$$d\eta/dt = a \quad \text{および} \quad da/dt = \Omega \quad (14)$$

が成立する。図-2 (a) は、式 (6) の特性曲面、式 (8) および式 (10) の陪特性曲線、および式 (13) の特性曲線を示したものである。

3. 特性曲線表示式の差分化

ここでは、線形の場合の計算法を提示する。式 (8) から式 (12) までの式中の u, v および η を 0 とすれば、線形の特性曲線

表示式が導かれ、特性多様体は図-2 (b) のようになる。線形の特性曲線表示式を図-3 のような

差分スキームにより差分化し、若干の式の変形を行うと、次の時間ステップの値を求める差分式が導かれるが、境界条件の違いにより、異なる差分式になる。境界パターンは、図-4 のように、

(a) 境界が存在しない場合、(b) 1 方向に境界が存在する場合、(c) 2 方向に境界が存在する場合の 3 つに分類され、これらの組み合わせにより、任意境界が構成される。まず、(a) の場合、次の時間ステップを求める差分式は、線型化した式 (8) から式 (12) を用いて、

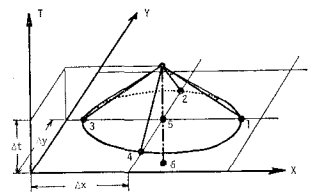


図-3 差分スキーム

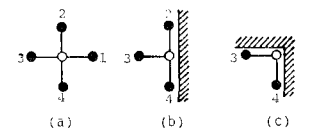


図-4 境界パターン

$$u = (\eta_3 - \eta_1)/2\varepsilon\zeta + (u_1 + u_3)/2 - \varepsilon\zeta(\Omega_1 - \Omega_3)/12, \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$v = (\eta_4 - \eta_2)/2\varepsilon\zeta + (v_2 + v_4)/2 - \varepsilon\zeta(\Omega_2 - \Omega_4)/12, \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$\begin{aligned} \Omega = & (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 - 4\eta)/2\varepsilon h \\ & - 3(u_1 - u_3 + v_2 - v_4)/2\varepsilon\zeta \\ & + (\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4)/4 \\ & - [3(u_x + v_y) + 4a/h + 6(h_x + h_y v)/h] \Delta t/\varepsilon, \quad \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

となる。また、境界 (b) については、

$$u = 0, \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$v = (\eta_4 - \eta_2)/2\varepsilon\zeta + (v_2 + v_4)/2 - \varepsilon\zeta(\Omega_2 - \Omega_4)/12, \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$\begin{aligned} \Omega = & 2(\eta_2 + \eta_3 + \eta_4 - 3\eta)/3\varepsilon h + 2(u_3 - v_2 + v_4)/\varepsilon\zeta \\ & + (\Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4)/3 \\ & - 2(2u_x + v_y + 2a/h + 3h_y v/h) \Delta t/\varepsilon, \quad \dots\dots(20) \end{aligned}$$

となり、境界 (c) については、

$$u = v = 0, \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$\begin{aligned} \Omega = & (\eta_3 + \eta_4 - 2\eta)/\varepsilon h + 3(u_3 + v_4)/\varepsilon\zeta \\ & + (\Omega_3 + \Omega_4)/2 - 3(u_x + v_y + 4a/3h) \Delta t/\varepsilon, \quad \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

となる。また、式 (14) を前進差分および中央差分により差分化すれば、 η および a に関する差分式は、それぞれ、

$$\eta = a_5 \Delta t + \eta_5, \quad a = 2\Omega_5 \Delta t + a_5 \quad \dots\dots\dots(23)$$

となる。ここに、 $\zeta = \sqrt{3h/\varepsilon}$ であり、 Δt は時間メッシュ幅である。また、添字は、図-3 に示す各点の値を表わす。計算手順は、まず、 η 、 a 、 u および v について、次の時間ステップの値を求め、次いで、これらの値を用いて Ω の値を求める。この操作を各時間ステップごとに繰り返すわけである。

4. 2次元の計算法の検討

2次元の場合の計算法の妥当性を検討するため、この計算法を、一様水深場の1次元の波の伝播問題に適用す

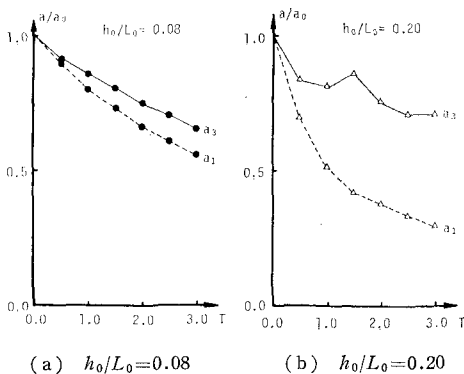


図-5 伝播に伴う振幅の減衰

る。図-5 は、一様水深場を進行する波群の振幅の時間変化を示すものであり、 a_1 および a_3 は、それぞれ第1番目および第3番目の波の振幅である。この場合、空間メッシュ幅は $\Delta x = L_0/20$ とし、時間メッシュ幅 Δt との比は $\Delta t/\Delta x = 1/4$ とした。図-5 (a) および (b) 共に、波の進行に伴い、振幅の減衰が見られるが、(a) は、水深波長比 h_0/L_0 が 0.08 の比較的分散性の弱い長波性の波の場合であり、したがってこの減衰は、差分近似に起因する数値計算誤差によると考えられる。また、(b) は、 h_0/L_0 が 0.20 の比較的分散性の強い波の場合であり、したがってこの減衰は、波の分散効果と数値計算誤差の両者による

と考えられる。ところで、図-6 は、図-5 (a) の場合について、 $\Delta t/\Delta x$ を 1/4, 1/6, 1/8 と変えた時に、 a_3 の初期値と $t=0.5$ での値との比 Q がどのように変わるかを調べたものであるが、 $\Delta t/\Delta x \rightarrow 0$ に対して $Q \rightarrow 1$ となり、振幅の減衰が生じないことがわかる。したがって、差分近似誤差は、 $\Delta t/\Delta x$ の値を十分小さく取ることにより、除去することができると言える。しかしこの方法は、計算時間が極めて長くなり、実用的でないため、ここでは、 $t=0.5$ ごとに補正係数を掛け、誤差を修正することとした。若干の検討の結果、 $\Delta x = \Delta y = L_0/20$ 、 $\Delta t/\Delta x = 1/4$ と

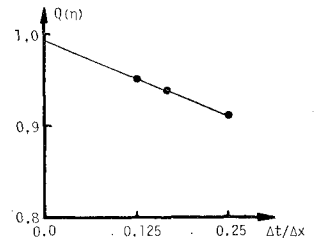


図-6 $\Delta t/\Delta x$ と振幅の減衰との関係

のであるが、 $\Delta t/\Delta x \rightarrow 0$ に対して $Q \rightarrow 1$ となり、振幅の減衰が生じないことがわかる。したがって、差分近似誤差は、 $\Delta t/\Delta x$ の値を十分小さく取ることにより、除去することができると言える。しかしこの方法は、計算時間が極めて長くなり、実用的でないため、ここでは、 $t=0.5$ ごとに補正係数を掛け、誤差を修正することとした。若干の検討の結果、 $\Delta x = \Delta y = L_0/20$ 、 $\Delta t/\Delta x = 1/4$ と

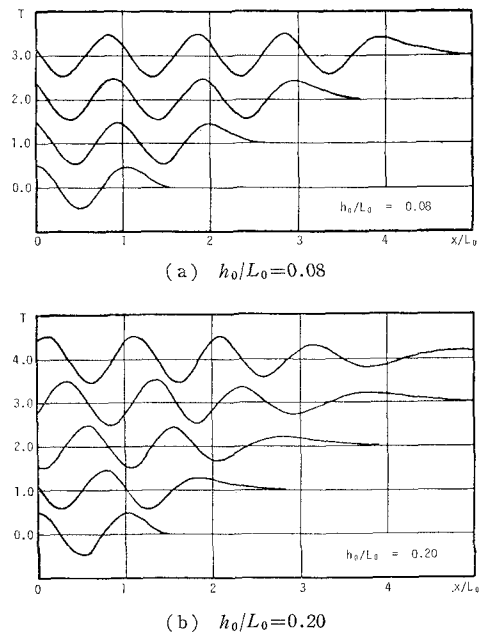


図-7 一様水深場の波の伝播

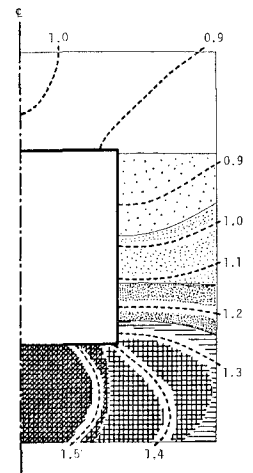
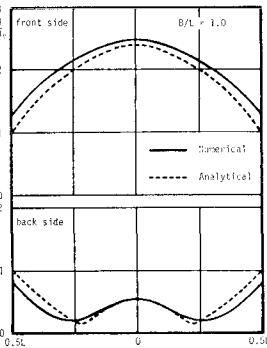
固定した場合、 $t=0.5$ などの η , a , Ω , u および v の補正係数は、それぞれ、 $M(\eta)=1.075$, $M(a)=1.064$, $M(\Omega)=1.123$, $M(u)=M(v)=1.064$ が妥当であることがわかった。

図-7 は、この補正を行い、一様水深場における分散性の比較的弱い波と強い波との伝播状況を比較したものである。(a) の長波性の波では、先端の波に若干の減衰はあるものの伝播に伴う減衰はほとんど見られないのに対し、(b) の分散性の強い波では、先端の波から順に減衰し、また、先端の波の波速が大きくなって行く。こういった特性は従来の結果と一致するものであり、本計算法の妥当性を示していると言える。

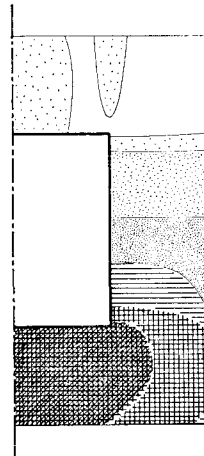
5. 平面2次元波の計算結果

図-8 は、波長と同じ長さの離岸堤に、波が直角に入射する場合の離岸堤前面および背面の波高分布を示したものである。実線は本数値解であり、破線は合田⁶⁾が求めた解析解である。数値解の波高は、解析解より若干大きい。分布形状はほぼ一致しており、2次元の場合についても、本計算法が妥当であることがわかる。図-9 は、この場合、波が定常状態へ至る過渡

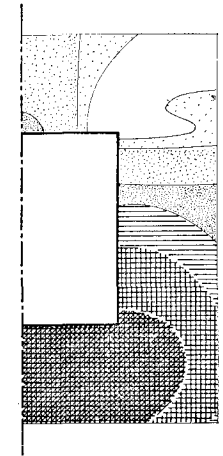
図-8 離岸堤沿いの波高分布



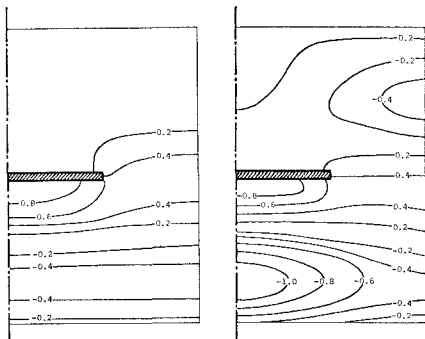
(a) $S=0$



(b) $S=1/10$



(c) $S=1/5$



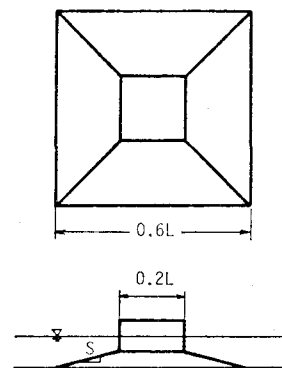
(a) $t=0.5$

(b) $t=1.5$

図-9 離岸堤周辺の波の変化

状態を示したものである。図より、離岸堤前面では、重複波が形成される様子があり、その背面では、回折波の伝播状況がわかる。

図-10 には、辺長が波長の 0.2 倍の正四角柱に、波が直角に入射する場合の角柱周辺の波高分布を示す。(a) は、一様水深の場合であり、図中の破線は井島⁷⁾による辺長が波長の 0.166 倍の場合の計算値である。両



(d) 角柱とマウンド

図-10 角柱構造物周辺の波高分布

者は若干の相違はあるが、計算条件の違いを考慮すれば、ほぼ一致していると言える。(b) および (c) は、(d) に示すマウンドを有する場合の結果であり、(b) はマウンド勾配 S が 1/10、(c) は 1/5 の場合である。図より、マウンド勾配が大きい (c) の方が、角柱前面の波高が大きくなることわかる。

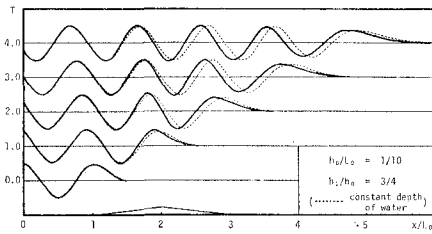
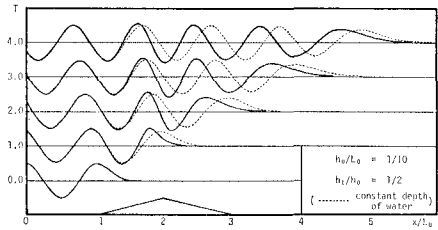
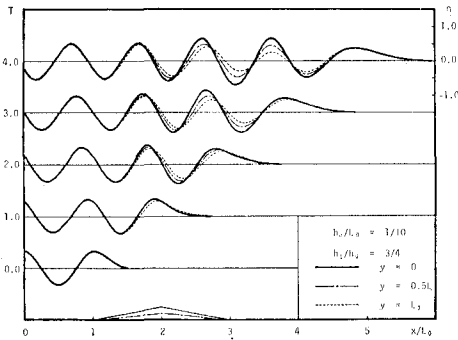
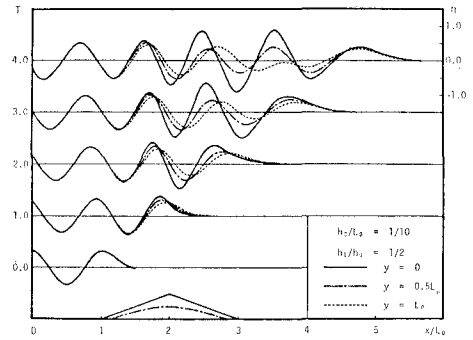
(a) $h_1/h_0=3/4$ (1次元浅瀬)(b) $h_1/h_0=1/2$ (1次元浅瀬)(c) $h_1/h_0=3/4$ (円錐浅瀬)(d) $h_1/h_0=1/2$ (円錐浅瀬)

図-11 浅瀬を乗り越える波の変形

図-11には、浅瀬を乗り越える波の変形を示す。(a) および(b)は、浅瀬水深・初期水深比 h_1/h_0 が $3/4$ および $1/2$ の1次元浅瀬の場合であり、(c) および(d)は、 h_1/h_0 が $3/4$ および $1/2$ の円錐浅瀬の場合である。この円錐底面の半径は、波長と等しい。(a) および(b)の破線は、一様水深の場合の計算値を示すものであり、これに比べて、浅瀬を乗り越える波の波長は短くなることかわかるが、この傾向は h_1/h_0 が小さいほど著しい。(c) および(d)では、実線で示した浅瀬中心線上($y=0$)の波の波高が、屈折効果により増大し、破線で示した浅瀬中央から1波長離れた線上($y=L_0$)の波の波高は減少する。この傾向は、 h_1/h_0 が小さいほど著しい。また(d)の先頭の波に着目すると、 $t=2.0$ では、各 y の値によって波峰の位置にずれが生じるが、 $t=4.0$ では、これらの波峰の位相は再び一致している。これは、波の回折効果によるものである。このように、2次元浅瀬の場合は、1次元浅瀬の場合に比べ、屈折・回折の効果が加わるため、波形の変化状況も複雑になる。

6. 結 論

本研究により得られた結果を要約すると、次のようである。(1) 非線形性および分散性を考慮した平面2次元波の基礎方程式を誘導すると共に、この特性曲線表示を行い、これに基づく計算法を新たに提示した。(2) 差分近似に起因する減衰効果を除去するため、補正係数を掛

ける方法を用いたが、これにより、満足な結果が得られた。(3) 本計算法による離岸堤沿いおよび角柱構造物周辺の波高分布の計算値を従来の解析解および数値解と比較した結果、本計算法の妥当性が実証された。

最後に、本研究では、特性曲線法による平面2次元波の数値計算法の説明およびその検討と若干の計算例の提示にとどまったが、今後はさらに、現地海浜を対象とした具体的な計算を行うと共に、波の非線形性を考慮した計算方法について検討しなければならない。

参 考 文 献

- 1) 石田 啓・中島光浩: 特性曲線法による非線形長波の変形特性について, 第28回海講論文集, pp. 59~63, 1981.
- 2) Townson, M. J.: An application of the method of characteristics to tidal calculation in $(x-y-t)$ space, Jour. Hydraulic Res., Vol. 12, pp. 499~523, 1974.
- 3) 岩佐義朗・井上和也・吉田英信: 特性曲線法による二次元平面流れの数値解析法に関する2, 3の検討, 京大防災研年報, 第24号, pp. 387~396, 1981.
- 4) 谷口俊弥・西原功修: 非線形波動, 応用数学叢書, 岩波書店, 1977.
- 5) Mei, C. C. and B. Le Méhauté: Note on the equation of long waves over an uneven bottom, Jour. Geophys. Res., Vol. 71, No. 2, pp. 393~400, 1966.
- 6) 合田良実・吉村知司・伊藤正彦: 島堤による波の反射と回折, 港湾技研報告, 第10巻2号, pp. 3~52, 1971.
- 7) 井島武士・周 宗仁・湯村やす・田淵幹修: 任意形状の透過および不透防波堤による波の散乱と波力, 第20回海講論文集, pp. 79~87, 1973.