

波動方程式の直接差分による港内波高分布解析法

清川 哲志*・大山 巧**・小林 浩***

1. ま え が き

港内の静穏度を検討するためには、港湾構造物による波の反射・回折および水深変化による屈折等の変形を考慮する必要がある。これに対して高山ら¹⁾は、港内の水深を一定とみなした近似回折計算法を提案している。この方法は任意の港内形状に適用でき、計算誤差は30%程度であるとされている。しかし、港内の水深変化が複雑になると、屈折の影響によって波高および波向が変化するため、場所的に2倍程度の大きな誤差が生じることが報告されており、このような場合に近似回折計算法を用いることは、あまり現実的ではないと思われる。

これに対して、水深変化を考慮できる方法に、グリーン関数を用いた積分方程式法^{2),3)}、数値波動解析法⁴⁾がある。前者は一定水深の場合は比較的簡単であるが、水深が変化する場合グリーン関数が複雑になり、多大な計算時間を要する問題がある。また、後者は運動方程式と連続式を差分化して交互に解く方法であり、計算領域が大きくなると、膨大な計算時間と計算機容量を必要とするため、実用上やはり問題がある。

本論文は、これらの問題を解決する新しい方法を提案するものである。これは、数値波動解析法で用いられている基礎方程式から、計算結果として不必要な線流量成分を消去し、水位変動量のみを未知数として逐次計算を行うことにより、計算機容量の節約および計算時間の大幅な短縮を図ろうとするものである。また、これに伴って、従来線流量成分で取り扱われてきた任意反射率境界の境界条件を、水位変動量のみで記述し、領域内部の点と同じアルゴリズムに組み込む方法についても述べる。

2. 基礎方程式と逐次計算法

平均水面上に x, y 軸、鉛直上向きに z 軸をとる。このとき、従来の数値波動解析法で用いられてきた基礎方程式は以下のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= -c^2 \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -c^2 \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 ζ は平均水面からの水位変動量、 c は波速で、 $c = \sqrt{gh}$ 、また M, N は線流量成分で、 u, v を x 方向および y 方向の水粒子速度成分としたとき次式で表わされる。

$$M = \int_{-h}^0 u dz, \quad N = \int_{-h}^0 v dz \dots\dots\dots (2)$$

式(1)より、結果として不必要な M, N を消去し整理すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= g \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ &+ gh \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

式(3)が水位変動量のみで記述した本問題の基礎方程式である。この式は長波を対象としているが、港内の波高分布を決める因子は、第1義的にはその波長であり、長波の波速が水深の平方根に比例することを利用し、微小振幅波の波長と一致するように解析上の水深を調整すればよい⁵⁾。

式(3)を時間微分に対しては前進差分、空間微分に対しては中央差分をとり、逐次計算型の差分方程式に変換すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \zeta_{ij}^{n+1} &= 2(1 - 2c^2 \lambda^2) \zeta_{ij}^n - \zeta_{ij}^{n-1} + (g/4) \lambda^2 \\ &\times \{ (4h_{ij} + \Delta h_i) \zeta_{i+1,j}^n + (4h_{ij} - \Delta h_i) \zeta_{i-1,j}^n \\ &+ (4h_{ij} + \Delta h_j) \zeta_{i,j+1}^n + (4h_{ij} - \Delta h_j) \zeta_{i,j-1}^n \} \\ &\dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ただし、 ζ_{ij}^n は格子点 (i, j) における時間ステップ n の水位変動量、 h_{ij} は格子点 (i, j) における平均水深、 $\Delta h_i = h_{i+1,j} - h_{i-1,j}$ 、 $\Delta h_j = h_{i,j+1} - h_{i,j-1}$ である。また、 λ は時間の刻み幅 Δt と格子幅 s との比である。

なお、海底勾配が緩やかに変化する場合、式(3)の右辺第1項および第2項は2次の微小量として無視でき、結果として次式が得られる。

$$\begin{aligned} \zeta_{ij}^{n+1} &= 2(1 - 2c^2 \lambda^2) \zeta_{ij}^n - \zeta_{ij}^{n-1} \\ &+ c^2 \lambda^2 (\zeta_{i+1,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n + \zeta_{i,j+1}^n + \zeta_{i,j-1}^n) \dots\dots (5) \end{aligned}$$

* 正会員 清水建設(株)研究所 海洋研究部 研究員

** 正会員 清水建設(株)研究所 海洋研究部 研究員

*** 正会員 Eng.Sc.D. 清水建設(株)研究所 海洋研究部 主席研究員

3. 任意反射率境界の処理

谷本・小舟⁹⁾は、構造物前面で斜め部分重複波が生じていると仮定して、任意反射率の壁における計算方法を示した。さらに酒井・佐藤・岩垣⁷⁾は、谷本等の方法を拡張して、任意反射率および任意透過率を有する堤体に対する計算方法を示している。しかし、これらはいずれも線流量成分を用いて記述されており、水位変動量のみによる本シミュレーション法に適用することはできない。また、これらの方法は、反射率によって決まる時間 τ だけさかのぼった線流量を用いて計算するもので、線流量の内挿などの複雑な処理を必要とし、計算時間も膨大になる。

ここでは、任意反射率境界における境界条件を、境界点の波形勾配と時間変動率で表わすことを試みた。以下この方法について述べる。

いま、図-1 のように y 軸上に反射率 K_r の境界があり、 x 軸の正の方向から波が入射する場合を考える。入射する波の振幅を a 、波数を k 、角振動数を ω とすると、水位変動量 ζ は、入射波と反射波の和として次のように表わされる。

$$\zeta = a \cos(kx + \omega t) + a K_r \cos(kx - \omega t) \cdots \cdots (6)$$

上式より、境界上での波形勾配 $\partial \zeta / \partial x$ および水位の時間変動率 $\partial \zeta / \partial t$ を求めると、これらの間には次式に示される関係が成り立つことがわかる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{k}{\omega} \frac{1 - K_r}{1 + K_r} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{1 - K_r}{1 + K_r} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdots \cdots (7)$$

この式が境界上で満足すべき境界条件である。

図-1 に示されるように、領域の外部に仮想点 $P(i-1, j)$ を設け、この点に式 (7) の関係を満足する仮想水位を強制的に与えることによって、境界条件を満足させることができる。時間ステップ n での仮想水位 $\zeta_{i-1,j}^n$ は式 (7) を差分化して整理することによって次のように表わすことができる。

$$\zeta_{i-1,j}^{n+1} = -\frac{2}{c\lambda} \frac{1 - K_r}{1 + K_r} (\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i,j}^{n-1}) + \zeta_{i+1,j}^n \cdots \cdots (8)$$

式 (8) を式 (5) に代入すれば、

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j}^{n+1} = & \{2(1 - 2c^2\lambda^2) - 2c\lambda(1 - K_r)/(1 + K_r)\} \zeta_{i,j}^n \\ & + \{2c\lambda(1 - K_r)/(1 + K_r) - 1\} \zeta_{i,j-1}^n \\ & + c^2\lambda^2(2\zeta_{i+1,j}^n + \zeta_{i,j+1}^n + \zeta_{i,j-1}^n) \cdots \cdots (9) \end{aligned}$$

となる。この式からわかるように、境界上の点についても内部点と同じアルゴリズムで計算できる。また、他の形状を有する境界についても、これとまったく同様の手順で求めることができる。

次に、反射率 K_r の壁を有する水路を用いて、以上に述べた理論の妥当性を Healy の方法⁹⁾から検証したので、これについて述べる。

図-2 に $K_r = 0.0, 0.5, 1.0$ とした場合の波峰の包絡線図を示す。ただし、水路は長さ 320 m、水深 10 m で、右側が反射率 K_r の壁、左側が造波板である。図中縦軸は、各点の最大波高 $\zeta_{\max}$ を入射波高 H_0 で除したもの

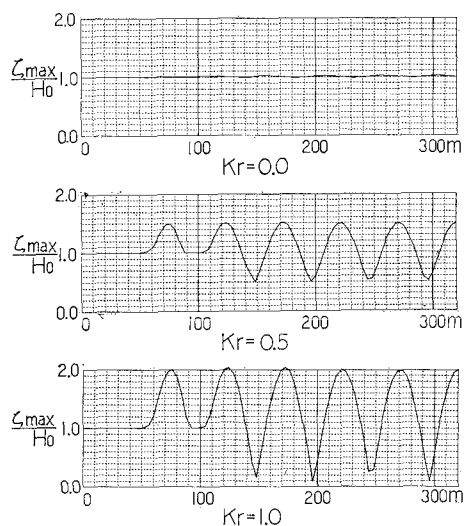


図-2 波峰の包絡線図

である。これらの図より、Healy の方法、すなわち、

$$K_r = (a_{\max} - a_{\min}) / (a_{\max} + a_{\min}) \cdots \cdots (10)$$

によって反射率を逆算してみると、それぞれ設定どおりの反射率が得られていることがわかる。ただし $a_{\max}$ は腹での振幅、 $a_{\min}$ は節での振幅である。また、 $K_r = 0.5$ および 1.0 の場合、節での振幅に多少のバラつきがあるのは、波長と格子幅の関係で真の節の位置に格子点がなかったためである。

4. 造波境界

数値波動シミュレーションでは、水理模型実験の場合の水槽の造波板に相当する造波境界を設けて波を発生させる。本解析法では、規則波のみならず、次式によって不規則波も発生できる。

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j}^n = & \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L a_{ml} \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{c} f_m \{ (i-1)s \cos(\theta_l - \alpha) \right. \\ & \left. + (j-1)s \sin(\theta_l - \alpha) \} - 2\pi f_m n \Delta t + \varepsilon_{ml} \right] \cdots \cdots (11) \end{aligned}$$

ただし、 α は波の主方向、 f_m は成分波の周波数、 θ_l は主方向からの偏角、 ε_{ml} は $0 \leq \varepsilon_{ml} \leq 2\pi$ なる一様乱数である。また a_{ml} は成分波の振幅で、方向スペクトル $S(f, \theta)$ を用いて以下のように表わすことができる⁹⁾。

$$a_{ml} = \sqrt{2S(f_m, \theta_l) \Delta f_m \Delta \theta_l} \cdots \cdots (12)$$

また規則波の場合には、同様に以下に示されるような正弦波を発生させればよい。

$$\zeta_{ij} = a \sin [k \{ (i-1)s \cos \alpha + (j-1)s \sin \alpha \} + \omega n \Delta t] \dots \dots \dots (13)$$

式(11)あるいは式(13)に示される水位変動量を造波境界に与えればよい。

5. メッシュ分割と伝播波形

シミュレーションを行う際に重要なことの1つは、 Δt および s をいかに選ぶかということである。そこで与えられた波に対して適当な Δt , s を決めるために、一定水深の水路を想定して、これらのパラメータと伝播波形の関係を調べた。水路は水深 10m で、入射波の周期は $T_0=10.0\text{sec}$ である。また各計算条件は表-1に示すと

表-1 伝播波形検討のための計算条件

	$\Delta t(\text{sec})$	$s(\text{m})$	$\lambda = \Delta t/s(\text{sec/m})$	s/L
CASE1	0.2	5.0	0.04	0.05
CASE2	0.4	10.0	0.04	0.10
CASE3	0.6	15.0	0.04	0.15
CASE4	0.8	20.0	0.04	0.20
CASE5	0.2	10.0	0.02	0.10
CASE6	0.8	10.0	0.08	0.10

おりで、CASE 1~CASE 4 は $\lambda (= \Delta t/s)$ を一定とした組合せであり、CASE 2, 5, 6 は s/L (L は波長) を一定としたものである。

このうち CASE 6 については、計算が不安定となり発散現象が起きた。計算が安定であるためには、通常次式で示されるような Courant-Friedrichs-Lewy の安定条件¹⁰⁾が必要とされている。

$$s/\Delta t = 1/\lambda \geq \sqrt{2gh_{\max}} \dots \dots \dots (14)$$

ただし $h_{\max}$ は領域内の最大水深である。CASE 6は、式(14)を満足しておらず、CASE 1~CASE 5 はすべてこの式を満足していることから、 s , Δt を式(14)の安定条件を満足するように定めれば、計算の安定性に関しては問題ないものと考えられる。

CASE 2~4 の伝播波形図を図-3に示す。図中、縦軸は ζ を入射波高 H_0 で除した値、横軸は、水路の長手方向の座標を表す。この図から CASE 2 では与えられた波が乱れることなく伝播しているが、CASE 3 で波形が乱れはじめ、CASE 4 では正弦波とは言えないほどに乱れているのがわかる。

また $s/L=0.1$ とし、 λ を変化させた CASE 2 と CASE 5 では、波形はほとんど変わらなかった。これから、伝播波形を正しく保つためには s/L を 0.1 程度になるように s を決定し、さらに式(14)を満足するように Δt を決定すればよいものと思われる。

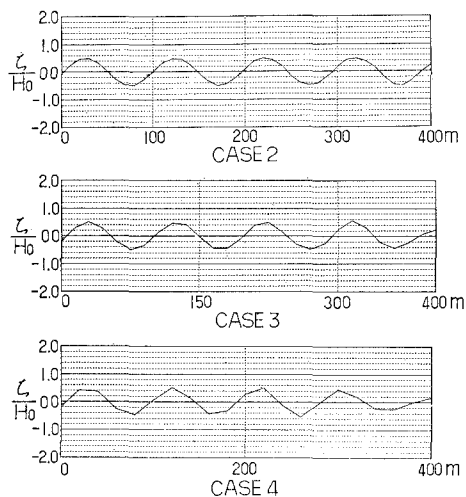


図-3 伝播波形図

6. 防波堤開口部からの波の回折

防波堤開口部より入射する波の回折を、本解析法でシミュレートし、半無限堤での回折波の重ね合せによる近似解を用いた回折図¹¹⁾と比較して、本解析法の妥当性を検証した。

図-4は $B/L=0.5$ の場合を示したもので、実線が近

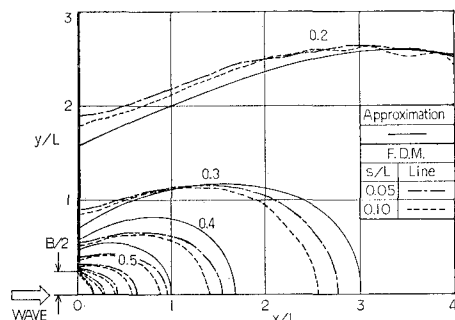
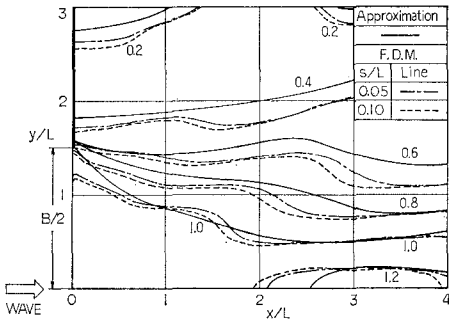


図-4 防波堤開口部からの回折図 ($B/L=0.5$)

似解を、破線および一点鎖線が本解析法による計算結果を示す。ただし破線は s/L を 0.1、一点鎖線は 0.05 とした場合である。また B は開口幅、 L は入射波長である。図からわかるように、回折図の形は両者良く一致している。値も $y/L=0$ の線上において、近似解の回折係数 K_a が 0.5, 0.4, 0.3 に対し、 $s/L=0.05$ の計算結果では、0.490, 0.385, 0.295 (線形補間による) で、計算値と近似解の比は 0.96~0.98 である。

図-5は、同様に $B/L=3.0$ の場合を示したものである。回折図は $B/L=0.5$ の場合に比べて複雑になっているが、分布性状は良く一致しているのがわかる。

これらの結果より、シミュレーションによる回折計算の結果は、十分に信頼できるものであることがわかる。また、 $s/L=0.1$ の場合と 0.05 の場合の結果を比較する

図-5 防波堤開口部からの回折図 ($B/L=3.0$)

と、0.05の方が近似解により近いことがわかる。このことから s/L をさらに小さくすると、近似解にますます近くなることが期待されるが、実用的には0.1程度にとれば十分であると思われる。

7. 水深変化の影響

水深の変化が著しくない場合には、一定水深とみなして計算するのが簡単であるが、高山ら¹²⁾が指摘しているように水深の変化が大きくなると、波高および波向が屈折の影響で大きく変化する。

図-6に示すような水深分布を有する港湾に対して、

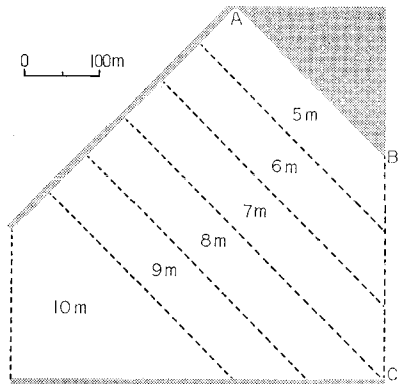


図-6 水深分布図

一定水深 ($h=10.0\text{m}$) として計算した場合と、水深変化を考慮して計算した場合との比較を行った。ただし、各岸壁の反射率は0.9とし、また境界線 $\overline{BC}$ は反射率0の完全透過壁とした。それぞれの計算結果を図-7, 8に示す。

いずれの場合も直立岸壁 $\overline{AB}$ の前面で重複波があらわれているが、水深変化を考慮することによってその波長が、かなり短くなっているのがわかる。また、波高については、水深変化を考慮した場合の方が大きくなっている。これは屈折によって、波向が $\overline{AB}$ に垂直な方向へ変化するためと思われる。この屈折の影響は、透過壁 $\overline{BC}$ 付近の波高にもあらわれている。すなわち、一定水

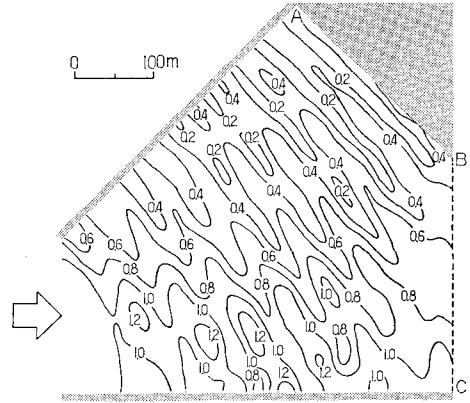
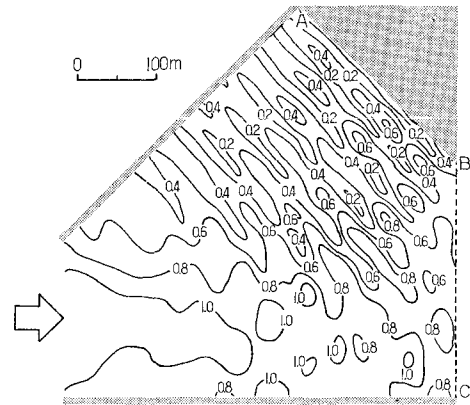
図-7 一定水深 ($h=10.0\text{m}$) のときの波高分布図

図-8 水深変化を考慮したときの波高分布図

深の場合、入射波は屈折することなく $\overline{BC}$ に到達しているのに対して、水深変化を考慮すると、 $\overline{BC}$ を透過する波の成分は少なくなり、特に C 点付近の波高は、一定水深の場合と比べてかなり小さくなっているのがわかる。

8. 実際の港湾に対する適用例

図-9, 10は周期11.0secの波が、図中に示す方向から入射してきたときの、港内泊地付近の波高分布を示すものである。ここでは、入射波が直接反射する部分 $\overline{AB}$ の反射率を0.9(直立岸壁を想定)とした場合と、0.4(消波護岸を想定)した場合の計算結果を示す。ただし他の岸壁はすべて直立岸壁とし、 $K_r=0.1$ としたのは自然海浜の部分である。水深は開口部付近で10m、泊地内で7.5m、海浜前面で0.5~3.0mである。

図-9よりわかるように、 $\overline{AB}$ を直立岸壁としたときには、この岸壁前面の波高が増大されるばかりでなく、向いの岸壁で顕著な2次反射をおこすため、泊地の奥でもかなり大きな波高になっている。

これに対して、図-10より $\overline{AB}$ を消波護岸にすると、入射してくる波のエネルギーは、この部分でかなり減ず

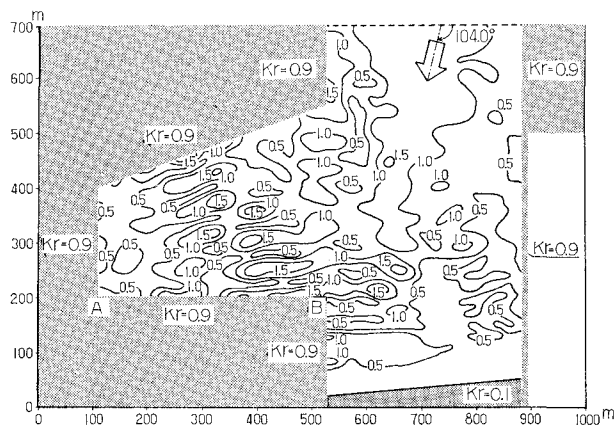


図-9 泊地付近の波高分布図 (1)

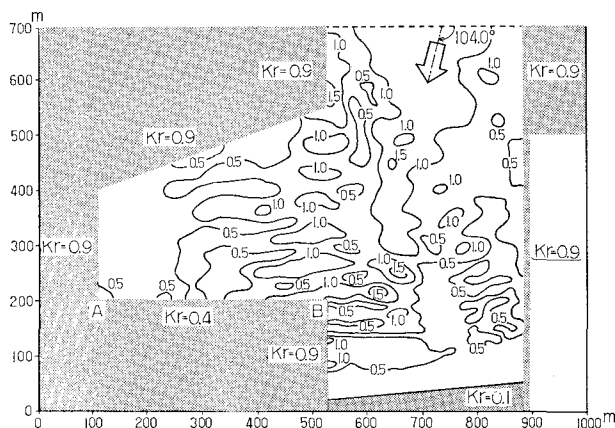


図-10 泊地付近の波高分布図 (2)

ることができ、泊地内の静穏度を高めることができるのがわかる。

なお本計算においては、 $s=10.0\text{ m}$ 、 $\Delta t=0.4\text{ sec}$ としており、水深 7.5 m 、周期 11.0 sec の波の波長を L とすると $s/L=0.11$ 、 $\lambda=0.04$ である。計算時間は、格子点数 $79 \times 71=5609$ 、350 ステップに対して約 50 秒 (IBM 3033 使用) であった。

9. 結 論

以上に述べたように、著者らは、従来の数値波動解析法の問題点を解決する新しい波動シミュレーション法を開発した。これらの結果を要約すると以下ようになる。

1) 本解析法によって従来の数値波動解析法に対し、計算時間は大幅に短縮され、同じ計算機容量で広い領域

(2 倍) の計算が可能になった。なお、計算時間は 1 メッシュ・1 ステップあたり $2.5 \sim 3.0 \times 10^{-5}$ 秒 (IBM 3033 使用) であった。

2) 任意反射率境界における条件式を水位変動量のみで表わした。また Healy の方法によって、この条件式の妥当性を確かめた。

3) 伝播波形を調べることによって、メッシュ幅 s と入射波長の比 s/L を 0.1 程度にすれば、十分な精度で計算できることがわかった。

4) 防波堤開口部からの波の回折を計算し、水理公式集の回折図と比較した。この結果、 $s/L=0.05$ の場合、両者の差は 4% 以下であり、高精度のシミュレーションができることがわかった。

5) 港湾内の水深変化が大きい場合、屈折の影響を考慮しなければならないことがわかった。特に静穏度が確保できる領域を把握する上で、水深変化を考慮することは重要だと思われる。

参 考 文 献

- 1) 高山知司・菊地 治：港内波高分布の計算，第25回海岸工学講演会論文集，pp. 103~107, 1978.
- 2) 山本隆一・横田基紀・滑川伸孝：数値波高シミュレーションの実用化について，第22回海岸工学講演会論文集，pp. 259~263, 1975.
- 3) Barailler, L. and Gaillard, D.: Evolution réceute des modèles mathématiques d'agitation due a la houle; Calcul de la diffraction en profondeur non uniforme, La Houille Branche, No. 8, pp. 861~869, 1967.
- 4) 谷本勝利・小舟浩治・小松和彦：数値波動解析法による港内波高分布の計算，港湾技術研究所報告第14巻第3号，pp. 35~58, 1975.
- 5) 山本正昭・長野 章・菅原輝男：波の数値実験の漁港整備計画への適用，第22回海岸工学講演会論文集，pp. 255~258, 1975.
- 6) 前出 4)。
- 7) 酒井哲郎・佐藤孝夫・岩垣雄一：任意反射率・任意透過率の防波堤による平面的な波浪変形の数値計算，第25回海岸工学講演会論文集，pp. 98~102, 1978.
- 8) Healy, J. J.: Wave damping effect of beaches, Proc. Minnesota Inst. Hydr. Conv., pp. 213~220, 1953.
- 9) 合田良實：港湾構造物の耐波設計，鹿島出版会，pp. 225~227, 1977.
- 10) 土木学会編：土木工学における数値解析／流体解析編，サイエンス社，pp. 46~53, 1974.
- 11) 土木学会編：水理公式集，土木学会，pp. 499~504, 1971.
- 12) 前出 1)。