

津波の二次元遡上計算

松 富 英 夫*

1. ま え が き

津波の陸上遡上域の予測法として数値解析法が有効視されてきているが、その実行に際して最も重要で厄介な問題は陸上での波先端条件である。従来よりこの問題に関する研究が数多くなされてきており、著者も、陸上での波先端部では水粒子速度は場所的に変化しないという立場で、流れの時間的な変化に応じて時々刻々に変化する抵抗係数を含む遡上時の先端条件と遡下時の簡単な先端条件を提案している¹⁾。そして、実際にそれ等を用いて一次元計算を行い、実験との比較によりその妥当性を検討した。その結果、次のことが主な問題点として指摘された。

- i) 波先端条件の適用範囲を機械的に波先端部の $O(\Delta x)$ としている。ここで、 Δx は数値計算における空間差分間隔である。
- ii) 先端条件に含まれる抵抗係数評価に際して Whit-ham²⁾ 理論に完全に依存している。

また、一方で残されていた問題もあった。それは、

- i) 先端条件の連続性の検討**と、
- ii) 二次元遡上計算の実行である。

そこで、本研究は上述の諸問題の解決を試みるとともに、先端条件の連続性の検討および二次元計算への拡張・実行を目的とするものである。

2. 波先端条件

ダム破壊流れとは全く無関係に、陸上先端部での運動状態として移流項を無視した浅水理論を仮定し、各項のオーダー比較³⁾により先端条件の改良を試みる。

一次元の場合を考える。津波の陸上での先端部の x 方向の運動は一般には次式で支配されよう。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -ig - f \frac{u^2}{h} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 u : 水粒子速度、 h : 全水深、 g : 重力加速度、

i : 底勾配、 f : 抵抗係数、 t : 時間、 x : 水平距離座標。

今、この流れにおいて先端部では移流項が局所項よりオーダー的に小さいと仮定すれば、(1) 式は次式のように近似できる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -ig - f \frac{u^2}{h} \quad \dots\dots\dots (2)$$

そこで、次の量を導入し、(1) 式の各項の任意時刻・任意点での大きさを近似的に評価して (2) 式とおける条件を調べてみる；

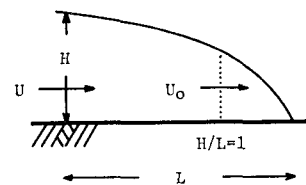


図-1 波先端部の模式図

L : 任意時刻の波先端から任意点までの距離、

H : その時、その点での水深、

U_0 : その時の $H/L=1$ での水粒子速度。

任意時刻・任意点での水粒子速度 U と水理量の時間微分演算子 $\partial/\partial t$ は流れの物理的考察に基づき近似的に次式と置く。

$$U \sim \frac{H}{L} U_0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{U}{H} \sim \frac{U_0}{L} \quad \dots\dots\dots (4)$$

(3) 式は Ritter の解⁴⁾ からの類推、(4) 式は先端部での場所の違いによる水理量の時間的な変化率の差はあまり大きくないという考えに基づいている。

この時、(1) 式の各項の近似的な大きさは

$$\left. \begin{aligned} O\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) &\sim \frac{H}{L^2} U_0^2, & O\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) &\sim \frac{H^2}{L^3} U_0^2, \\ O\left(g \frac{\partial h}{\partial x}\right) &\sim g \frac{H}{L}, & O(ig) &\sim ig, \\ O\left(f \frac{u^2}{h}\right) &\sim f \frac{H}{L^2} U_0^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

故に、流れ先端部の任意時刻・任意点での各項の相対的な比は次の4つを知ればよい。

$$\left. \begin{aligned} O\left(\frac{u(\partial u/\partial x)}{\partial u/\partial t}\right) &\sim \frac{H}{L}, \end{aligned} \right\}$$

* 正会員 工修 秋田大学助手 鉱山学部 土木工学科

** 文献 1) において、本研究の先端条件が連続方程式を満足していることは容易に確認できるとあるのは誤りである。

$$\left. \begin{aligned} O\left(\frac{g(\partial h/\partial x)}{\partial u/\partial t}\right) &\sim \frac{L}{H} \frac{gH}{U_0^2}, \\ O\left(\frac{ig}{\partial u/\partial t}\right) &\sim i\left(\frac{L}{H}\right)^2 \frac{gH}{U_0^2}, \\ O\left(\frac{f(u^2/h)}{\partial u/\partial t}\right) &\sim f \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

結局、移流項が局所項よりオーダー的に小さいところは、

$$O\left(\frac{u(\partial u/\partial x)}{\partial u/\partial t}\right) \sim \frac{H}{L} \ll 1 \dots\dots\dots (7)$$

(7) 式は運動の支配方程式が (1) 式から近似的に (2) 式に変換可能な境界点を示している。

ところで、(1) 式から (2) 式に移る条件は (7) 式を満足していれば任意性がある。そこで、本研究ではさらに $O(\partial u/\partial t) \sim O(g\partial h/\partial x)$ という条件を付加することにする。すると、次式が得られる。

$$\frac{L}{H} \sim \frac{U_0^2}{gH} \sim \frac{\dot{a}^2}{gH} = F_r^2 \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $\dot{a}$ は陸上での波先端の移動速度。すなわち、(2) 式で支配される領域の終端点は (7)、(8) 式より判るとおり、先端の移動速度で定義したフルード数が $O(L/H) > 1$ であるところであることになる。(8) 式を満足する点は必ず存在する。

よって、(8) 式を満足する点での局所項と水粒子速度が既知であるならば、(2) 式は積分されて

$$\begin{aligned} L &= \frac{gH}{(\partial u/\partial t)_{x'=L} + ig} - fg \left\{ \frac{u_{x'=L}}{(\partial u/\partial t)_{x'=L} + ig} \right\}^2 \\ &\quad \times \ln \left\{ 1 + \frac{(\partial u/\partial t)_{x'=L} + ig}{f u_{x'=L}^2} H \right\} \\ &\sim \frac{gH}{\ddot{a} + ig} - fg \left(\frac{\dot{a}}{\ddot{a} + ig} \right)^2 \ln \left(1 + \frac{\ddot{a} + ig}{f \dot{a}^2} H \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

ここで、添字 x' は波先端からの水平距離座標、 $\ddot{a}$ は先端の移動に関する加速度を示す。

以上より、本研究の先端条件は (8) 式を満足する点の H とその時の $\dot{a}$ 、 $\ddot{a}$ と L を用いて

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{gH}{\ddot{a} + ig} - fg \left(\frac{\dot{a}}{\ddot{a} + ig} \right)^2 \ln \left(1 + \frac{\ddot{a} + ig}{f \dot{a}^2} H \right) \\ f &= \text{先端部の不定流に関する抵抗則} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

本研究の先端部の長さは (8) 式から

$$L \sim \frac{\dot{a}^2}{g} \dots\dots\dots (11)$$

$\dot{a}$ の正・負により dL/dt の正・負が決まる性質をもっている。

結局、(8) 式の条件を付加することにより、著者の方法の欠点 i) が改良されることになる。(10) 式の f に関しては 4. で言及する。

一方、遡下時の波先端条件は本研究では従前⁹⁾通り次

式を用いることにする。

$$\Delta x' = \dot{a} \cdot \Delta t \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $\Delta x'$: Δt 時間に先端の移動する水平距離、 Δt : 数値計算における時間差分間隔、 $\dot{a}$: 波先端から $O(\Delta x)$ 点での水粒子速度。

3. 波先端条件の連続性

本研究の波先端部の支配方程式は連続性を考えると次式であるべきである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= -ig - f \frac{u^2}{h} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

今、連続性の確認を波先端部の体積変化で調べることにすると、(13) 式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= H \frac{dL}{dt} \\ \left(\frac{du}{dt} + ig \right) V &= \frac{1}{2} g H^2 - f u^2 L \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 $V = \int_{a-L}^a h dx$ 、 a : 波先端位置。

ところで、本研究の先端条件は運動方程式のみから決めているので、その先端部の体積は (14) 式の下式から、

$$V = \frac{1}{2} \frac{gH^2}{\ddot{a} + ig} - f \frac{\dot{a}^2}{\ddot{a} + ig} L \dots\dots\dots (15)$$

よって、(15) 式が連続性を満足しているかどうかを調べるには、(15) 式を時間で微分し、(14) 式の連続式と比較すればよい。その結果は

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= H \frac{dL}{dt} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{gH^2}{(\ddot{a} + ig)^2} \left[\ddot{a} - 4 \frac{\dot{a}^2}{H} \frac{df}{dt} \right. \\ &- 8f \frac{\dot{a}}{H} \ddot{a} + 6f \frac{\dot{a}^2}{H} \frac{\ddot{a}}{\ddot{a} + ig} + \frac{1}{H} \frac{\dot{a}}{\ddot{a} + ig} \\ &\times \left\{ 8f^2 \frac{\dot{a}^2}{H} \ddot{a} + 4f \ddot{a} (\ddot{a} + ig) \right. \\ &- 6f^2 \frac{\dot{a}^3}{H} \frac{\ddot{a}}{\ddot{a} + ig} - 4f \dot{a} \ddot{a} + 4 \frac{\dot{a}^3}{H} f \frac{df}{dt} \\ &\left. \left. + 2\dot{a}(\ddot{a} + ig) \frac{df}{dt} \right\} \ln \left(1 + \frac{\ddot{a} + ig}{f \dot{a}^2} H \right) \right] \\ &\dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

誤差

ここで、 $\ddot{a}$ は a の時間に関する三階微分を意味する。今、特に $i=0$ の場合の誤差を 図-1 の記号と 2. で述べた方法を用いて近似的に評価してみると

$$\left. \begin{aligned} O\left(H \frac{dL}{dt}\right) &\sim -UL \\ O(\text{誤差}) &\sim -\frac{H^2}{L} U \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

よって、実際に変化すべき体積に対する誤差の割合は

$$O\left(\frac{\text{誤差}}{H(dL/dt)}\right) \sim \frac{H^2}{L^2} \quad \dots\dots\dots (18)$$

と推定される。(7)式から類推されるように H/L は小さい値であり、また $H(dL/dt)$ も流れ全体の体積から見れば小さな値と推定される。よって、本研究の先端条件は厳密には連続性を満足しないが、その誤差は非常に小さいと推測される。実際の数値解析結果例より (18) 式の検討を行ってみると、正・負両方の値をとり得て大きくて高々 10% 程度であった。

4. 波先端部の抵抗抗

津波による陸上の先端部の流れはダム破壊流れのそれと大いに異なる可能性がある。そうだとすると、ダム破壊流れの一理論である Whitham 理論に完全に依存して流れ先端部の抵抗係数を評価するわけにはいかない。そこで、本研究の先端条件である (8), (9) 式を用いてダム破壊流れの先端部の抵抗係数の評価を試み、Whitham 理論によるものとの比較を行い、(8), (9) 式が波先端部の抵抗係数の評価において Whitham 理論に代りうるかどうか検討を行ってみた。

実験に用いた水路は水平に設置された 図-2 に示す幅 0.3m、深さ 0.5m、長さ 7.5m、そのうち 6m が両面ガラス張りの鋼製矩形水路である。貯水槽はその水路の一端に設けられ、長さ L_0 は 1.5m で、この底面には棧

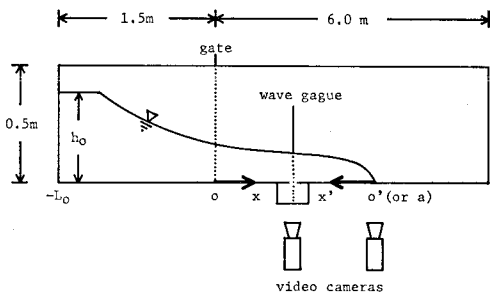


図-2 実験装置

粗度を設置するなどの細工は一切していない。ゲート機構は手動の引き揚げ式である。ゲート下流の水路床には実験条件に応じて粗度間隔を変えた木製棧粗度 (5×5×300mm) を張り付けた。また、ダム破壊はゲートを瞬間的に引き揚げることにより模擬した。

測定項目は抵抗線式波高計によるゲート下流 2m での水位の時間変化とビデオ・システムによる流れ先端の軌跡である。

本研究の先端条件と Whitham 理論を用いて抵抗係数を評価した比較例を 図-3~5 に示す。ただし、Whitham 理論で評価した場合の H は $(4/9)h_0$ としてある¹⁾。ここで、 h_0 は初期貯留水深である。これ等の図による

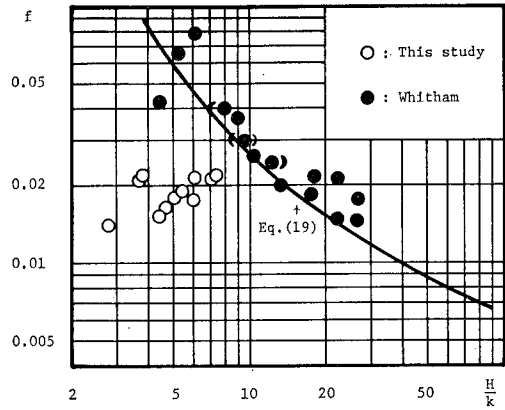


図-3 波先端部の抵抗係数 ($s/k=10$)

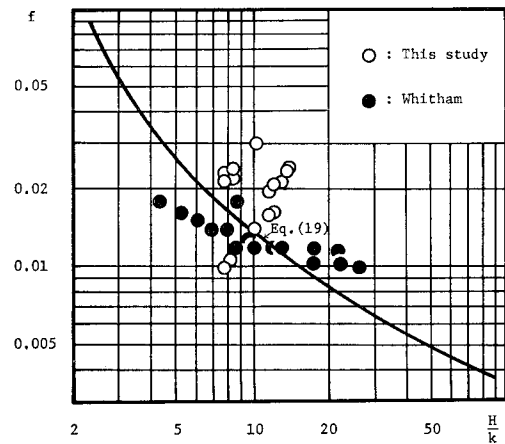


図-4 波先端部の抵抗係数 ($s/k=40$)

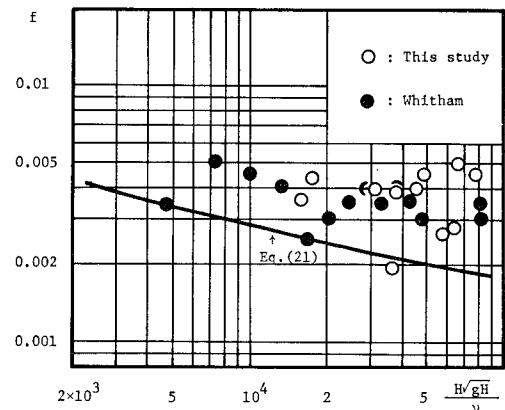


図-5 波先端部の抵抗係数 ($s/k=\infty$)

と、本研究の実験範囲内では両者はほぼ同じ値を示している。ただし、図-3 においては両者の差がかなり大きい。これは本研究の方法による評価において、棧粗度が密なため波先端部が空気を含み、波高計が実際の波高を出力しなかったためと思われる。以上より、本研究の先端条件で陸上の波先端部の抵抗係数評価が可能であるこ

とが判り、著者の方法の欠点 ii) が改良されることとなる。

また、本研究の実験範囲内では先端部の抵抗則は次式で近似され得る。

密な棧粗度:

$$f = \left[1.50 \log_{10} \left(\frac{s}{k} \right) - 1.91 + \left\{ 5.75 + 0.12 \left(\frac{s}{k} \right)^{0.8} \right\} \log_{10} \left(\frac{H}{k} \right) \right]^{-2} \quad (19)$$

疎な棧粗度:

$$f = \left[5.75 \log_{10} \left(\frac{k}{k_s} \cdot \frac{H}{k} \right) + 6.0 \right]^{-2} \quad (20)$$

棧粗度なし:

$$f = \left[5.75 \log_{10} \left(\sqrt{f} \cdot \frac{H \sqrt{gH}}{\nu} \right) + 3.0 \right]^{-2} \quad (21)$$

ここで、 ν : 動粘性係数、 s : 棧高、 k : 棧間隔、 k_s : 砂粒相当粗度。図中の実線はこれ等の式である。

5. 数値計算

(1) 基本式

陸上での波先端部を除いて、本研究の数値計算における基本方程式は、

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{PQ}{h} \right) + gh \frac{\partial h}{\partial x} = -i_x gh - f_{0x} \frac{P \sqrt{P^2 + Q^2}}{h^2} \quad (22)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{PQ}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q^2}{h} \right) + gh \frac{\partial h}{\partial y} = -i_y gh - f_{0y} \frac{Q \sqrt{P^2 + Q^2}}{h^2} \quad (23)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

ここで、 x : 汀線に直角な水平距離座標、 y : x 軸に直角な水平距離座標、 P , Q : 各々 x , y 方向の単位幅当りの流量、 i_x , i_y : 各々 x , y 方向の底勾配、 f_{0x} , f_{0y} : 各々 x , y 方向の波先端部以外での抵抗係数で、本研究では常にゼロとしている。

(2) 差分法

差分法には二次元計算への拡張が容易な leap-frog 法を用いる。ただし、移流項は P と Q の正・負により後退・前進差分の使い分けを行う⁵⁾。

また、本研究の先端条件を用いて遡上計算を行う場合、(10) 式から明らかなように $\ddot{a}$ の評価が必要となる。本研究では次式を leap-frog 法で解くことによりそれを評価する。

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{H_x} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{P}{H_x^2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \quad (25)$$

$$\ddot{a}_y = \frac{1}{H_y} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{H_y^2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \quad (26)$$

ここで、添字 x, y は各々 x, y 方向の値であることを示し、その他は今までの定義に従う。ただし、偏微分は (8) 式を満足する点でのものである。

(3) 沖側境界条件

沖での境界は計算時間内に反射波が到達しない点とし、二次元計算の場合には汀線に直角に入射する正弦波を与える。そこでの水粒子速度と水位変化との関係は次式を用いる。

$$u_0 = 2 \{ \sqrt{g(h_0 + \eta_0)} - \sqrt{gh_0} \} \quad (27)$$

ここで、 u_0 : 沖境界での水粒子速度、 η_0 : 沖境界での静水面から波面までの高さ、 h_0 : 沖境界での静水深。

(4) 一次元計算例¹⁾

一様勾配斜面 ($i=0.075$) と水平底とからなる水域に津波が入射する場合を考える。計算結果例を図-6に示す。図中の実線は本研究の先端条件 (8), (10) 式と (12) 式を用いた場合の結果を、一点鎖線は遡上時には (10) 式を波先端から $O(\Delta x)$ 点に機械的に適用し、遡下時には (12) 式を用いた場合の結果を示す。また、点線は実験結果を示す。この図によると、実線は一点鎖線に較べ遡上高が大きく、最大遡上時付近での振動が小さくなる傾向がある。これは、(8) 式の条件を用いたことによるもので、(8) 式を適用すると一般に (10) 式中の H が大きくなりかつ H の時間的変動も小さくなる。その結果、 H が大きくなることにより抵抗係数が小さくなり、 L が大きくなって遡上高が増し、 H の時間的変動が小さくなることにより抵抗係数の変動が小さくなって振動が小さくなるものと思われる。

また、遡下時の計算結果をみると、(12) 式の波先端条件は実際に較べ急激に遡下させる傾向がある。

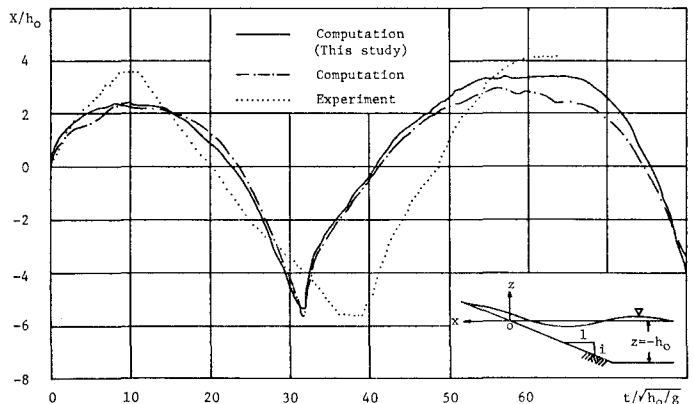


図-6 陸上遡上津波の先端軌跡 ($i=0.075$, $s/h_0=0.5$, $k/h_0=0.04$, $\Delta x/h_0=0.165$, $\Delta t/\sqrt{h_0/g}=0.0825$)

(5) 二次元計算例

図-7 に示す平面地形を有した、一様勾配斜面 ($i_x = 0.02$) と水平底とからなる水域に津波が汀線と直角に入射する場合を考える。

二次元計算における波先端条件は一次元計算の場合と本質的に変わらない。(8), (10) 式および (12) 式の場合を x, y 方向に適用すればよい。

計算結果例を図-8, 9 に示す。図-8 は時々刻々の波先端の空間分布を示したもので、計算結果は実際と定性的に一致している。図-9 は任意時刻・任意点 (y について) での空間波形を示したものである。

6. むすび

陸上の波先端部の支配方程式の各項のオーダー比較に

より遡上時の波先端条件の改良を試み、それを用いて波先端部の抵抗係数の評価および一次元・二次元遡上計算を行った。その結果、本研究で提案する波先端条件で前報の二つの大きな欠点が改良され、しかも二次元遡上計算が可能であることが判った。また、本研究の先端条件は厳密には連続式を満足しないが実際の適用に際しては十分であることが判った。

謝辞: 本研究を遂行するにあたり、東北大学首藤伸夫教授、秋田大学浅田宏教授と東北大学後藤智明助手より有益なる御教示と助言を賜わった。また、実験を行うに際して本学卒研生山根好行君と佐藤隆志君の助力を得た。ここに記して三先生ならびに両君に深甚なる感謝の意を表する。

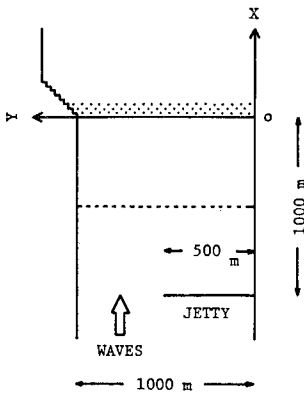


図-7 座標系および平面地形

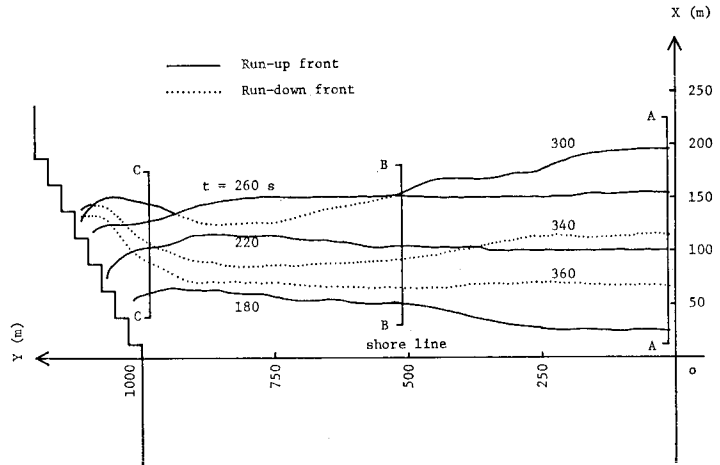


図-8 波先端の空間分布 ($i_x = 0.02$, $i_y = 0$, $h_0 = 10$ m, $s_x = s_y = 0.5$ m, $k_x = k_y = 0.04$ m, $\Delta x = \Delta y = 25$ m, $\Delta t = 1$ s, $H_0 = 3$ m, $T = 600$ s)

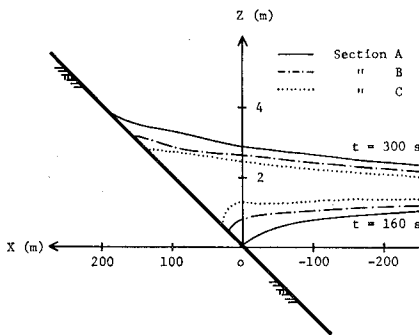


図-9 空間波形分布 ($i_x = 0.02$, $i_y = 0$, $h_0 = 10$ m, $s_x = s_y = 0.5$ m, $k_x = k_y = 0.04$ m, $\Delta x = \Delta y = 25$ m, $\Delta t = 1$ s, $H_0 = 3$ m, $T = 600$ s)

参考文献

- 1) 松富英夫: 陸上遡上津波の先端条件と先端部の抵抗係数, 第28回海講論文集, pp. 74~78, 1981.
- 2) Whitham, G. B.: The effects of hydraulic resistance in the dam-break problem, Proceedings of Royal Society of London, Series A, Vol. 227, pp. 399~407, 1955.
- 3) 松富英夫: ドライ・ベッド上のダム破壊流れの数値解析, 第26回水講論文集, pp. 409~416, 1982.
- 4) Ritter, A.: Die Fortpflanzung der Wasserwellen, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure (Berlin), Vol. 36, Pt. 2, No. 33, pp. 947~954, 1892.
- 5) 伊藤 剛: 数値計算の応用と基礎, アテネ出版, pp. 1~27, 1971.