

ソリトンスペクトル理論による海岸波浪の内部特性表示

安田 孝志*・篠田 成郎**・土屋 義人***

1. 緒 言

内部特性を含めた海岸波浪の適確な表示法の確立は、海岸工学上の最も基本的でかつ重要な課題であるが、海岸波浪が持つ非線形性と不規則性を同時に評価しなければならないという問題の複雑さのために、力学に基礎を置く理論によって、この要請に応えようという試みはあまりなされてこなかったように思われる。

周波数スペクトル解析法や波別解析法は、水面変動の統計的特性を評価する限りでは優れた特色を有しており、海岸工学における要請も単に波形の表示のみであれば、十分な実用性を持つと言ってよい。しかしながら、内部特性の適確な表示こそが要請の中心である以上、海岸波浪の力学的構造と無関係に展開されているこれらの手法に限界が生じるのは当然と言える。

海岸波浪が力学法則に支配される海面の運動である以上、その内部特性を含めた表示法の確立は、力学理論に則ってなされるべきであり、そのためには、海岸波浪の力学的構造を反映した不規則波理論の展開が必須である。

ここでは、この観点から、ソリトンスペクトル理論が、うねり性の海岸波浪に対しては、流体力学の基礎方程式を満足する不規則波理論となる点に着目し、ソリトンを成分波とするポテンシャル理論の展開を試み、水粒子速度などの内部特性の表示を導く。さらに、その適用性を、一定固有値のソリトンが一定間隔で連なった場合の波であるクノイド波理論と極浅海域の不規則波の水粒子の軌跡に関する実験結果との比較によって検討する。

2. ソリトンスペクトル理論による海岸波浪の表示

ソリトンスペクトル理論を用いることによって、流体力学の基礎方程式の解として海岸波浪の表示式が導かれることを示し、この理論が波別解析法やスペクトル解析法とは異なり、海岸波浪の力学的理論となりうることを

示す。

(1) 基礎方程式の誘導

浅海域から極浅海域においては、分散性が抑えられる半面、非線形性が卓越してくるため、海岸波浪は一種の平衡状態いわゆるソリトン状態になっているものと考え

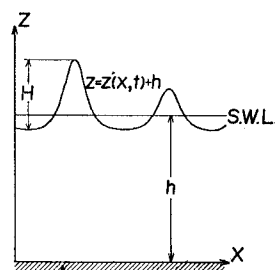


図-1 座標系および記号

られる。したがって、座標を 図-1 のように定め、個々の波に対して非線形性と分散性の平衡関係を仮定すれば、著者らがクノイド波理論の展開に用いたと同様の手法¹⁾の適用が可能となり、速度ポテンシャル ϕ および水面変動 z' に関する

周知の流体力学の基礎方程式から、次式の無次元波形 η および速度ポテンシャル Ω に関する連立方程式が導かれる。

$$\eta_t + (3/2)\eta\eta_{\xi} + (1/6)\eta_{\xi\xi\xi} = \varepsilon F(\eta, \Omega) \quad (1)$$

$$\Omega_{\xi} - \eta = \varepsilon G(\eta, \Omega) \quad (2)$$

ここに、 $\varepsilon\eta = z'/h$, $\phi/h\sqrt{gh} = \varepsilon^{1/2}(\Omega - \varepsilon z^{*2}\Omega_{\xi\xi}/2 + \dots)$, $\xi = \varepsilon^{1/2}(x^* - t^*)$, $\tau = \varepsilon^{3/2}t^*$, $x^* = x/h$, $z^* = z/h$, $t^* = t\sqrt{gh}$, $\varepsilon = (h/L)^2$, h : 平均水深, L : 不規則波中の代表波の波長, t : 時間, g : 重力の加速度, および F, G : 高次項である。式 (1) は海岸波浪の水面変動を支配する波動方程式であり、式 (2) はこの水面変動に対応して内部特性を支配する。したがって、式 (1) を満足する海岸波浪の水面変動の表示式を得ることができれば、海岸波浪の内部特性は式 (2) の解である Ω によって一義的に決定できることになる。

(2) 波動解の誘導

式 (1) の高次項の寄与が微小であり、海岸波浪の水面変動は、式 (1) において $\varepsilon F \approx 0$ とした K-dV 方程式に支配されるものとする。さらに、各波峯間の相互干渉が無視できる程度に波峯間隔が大きいとすれば、平均海面周りの水面変動の連続性の条件を満足する $\varepsilon F = 0$ とした式 (1) の解は、ソリトン $A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i$ の連なりとして、次式のように表される。

* 正 会 員 工 博 岐阜大学助教授 工学部土木工学科

** 学生会員 岐阜大学大学院工学研究科

*** 正 会 員 工 博 京都大学教授 防災研究所

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon\eta(=z'/h) &= \sum_{i=1}^N \eta_i - \eta_0, \\ \eta_i &= A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i, \\ \eta_0 &= (2/T) \sum_{i=1}^N \sqrt{A_i/2} \tanh \vartheta_i|_0^{T^*} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

ここに、 $\vartheta_i = \sqrt{3A_i/4}(\xi - c_i + \delta_i)$ 、 $c_i = A_i/2 - 3\eta_0/2$ 、 δ_i ；各ソリトンの波峯の座標、 T^* ；海岸波浪の無次元観測時間、 c_i ； $\sqrt{gh}$ の速度で移動する動座標での各ソリトンの伝播速度、 A_i ；ソリトンの固有値、 η_0 ；波谷面と平均水面との水面差、および N ；観測波中のソリトンの個数である。これより、ソリトンスペクトル理論の個々の成分波の伝播速度は、孤立波のそれに比べて $-3\eta_0/2$ だけ遅くなっていることがわかる。このことは、ソリトンスペクトル理論の成分波であるソリトンは、固有値 A_i のみに支配される孤立波とは異なり、水面変動の連続性を観測波全体で満足させている結果として、観測波の ensemble 特性にも支配され、孤立波としての独立性和同時に ensemble に対する従属性を併せ持つことを示している。勿論、波峯間隔が非常に大きくなれば、 $\eta_0 \approx 0$ となり、ソリトンは孤立波に一致する。

$$\left. \begin{aligned} \partial\phi^*/\partial x^* &= \sum_i \eta_i - \eta_0 + \left(\sum_i \eta_i - \eta_0 \right)^2 / 2 + (1 - z^{*2})/2 \sum_i \partial^2 \eta_i / \partial \sigma_i^2 - \sum_i c_i (\eta_i - \eta_0) + \dots \\ \partial\phi^*/\partial z^* &= -z^* \sum_i \partial \eta_i / \partial \sigma_i + z^* \left\{ (z^{*2} - 3)/6 \sum_i \partial^3 \eta_i / \partial \sigma_i^3 - \sum_i \sum_j (\eta_i - \eta_0) \partial \eta_j / \partial \sigma_j + \sum_i c_i \partial \eta_i / \partial \sigma_i \right\} + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

以上示したように、対象とする海岸波浪がうねり性の波峯間隔が十分に大きい波動であれば、式 (3) および (8) は波動解となり、内部特性は、個々のソリトンに直接支配されると同時に、基礎方程式を通じて観測波の ensemble 特性にも支配され、非周期性と周期性の両方の特性を併せ持つことになる。

(3) 波形の表示

式 (3) より、海岸波浪の波形として次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} &= \sum_i A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i - \eta_0 + \sum_i A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \left[\frac{\eta_0}{2} + \frac{A_i}{2} \left\{ 2 - 3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} - \frac{9}{4} A_i \left\{ 1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_i A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \right)^2 - \eta_0^2 + \frac{1}{2N\eta_0} \sum_i A_i \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h} \right) \sum_i \sqrt{A_i^3} \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \tanh \vartheta_i \left[2 + \left\{ \left(\frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} A_i (3 \operatorname{sech}^2 \vartheta_i - 1) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_j A_j \operatorname{sech}^2 \vartheta_j + 2\eta_0 - A_i \right] \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

さらに、Lagrange 座標での水粒子速度の表示は、Euler 座標の水粒子速度の表示から容易に導かれ、水平および

さて、 A_i および η_0 がともに不変量であるため、 c_i も不変量となり、個々のソリトンは一定速度で伝播することになる。この結果、各ソリトンに対して、

$$\sigma_i = \xi - c_i \tau \dots\dots\dots (4)$$

の変換が可能となる。いま、著者らの波動理論に対する見解を基にして、各ソリトンの波形を表す η_i およびこれに対応する速度ポテンシャル Ω_i がともに σ_i の関数であるとすれば、次式の関係が成立する。

$$\partial \eta_i / \partial \tau = -c_i \partial \eta_i / \partial \sigma_i, \quad \partial \eta_i / \partial \xi = \partial \eta_i / \partial \sigma_i \dots\dots (5)$$

$$\partial \Omega_i / \partial \tau = -c_i \partial \Omega_i / \partial \sigma_i, \quad \partial \Omega_i / \partial \xi = \partial \Omega_i / \partial \sigma_i \dots\dots (6)$$

これより、式 (1) および (2) から導かれる速度ポテンシャル $\phi^*(=\phi/h\sqrt{gh})$ と η の関係式

$$\begin{aligned} \partial\phi^*/\partial x^* &= \varepsilon\eta + \varepsilon^2 \{ \eta^2/2 + (1/2) \\ &\quad \times (1 - z^{*2}) \partial^2 \eta / \partial \xi^2 + \partial \Omega / \partial \tau \} + \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

に式 (3)、(5) および (6) の関係を適用すれば、ソリトン η_i を成分波とする海岸波浪の速度ポテンシャルの表示が式 (2) の解として次式のように導かれる。

$$z'/h = \sum_i A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i - \eta_0 \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_i &= \sqrt{3A_i/4} (x/h - c_i t/h + \delta_i), \\ c_i &= \sqrt{gh} (1 + A_i/2 - 3\eta_0/2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

(4) 水粒子速度の表示

式 (8) に式 (3) を代入し、 A_i^2 のオーダーまで評価すれば、Euler 座標での水平および鉛直水粒子速度 u および w はそれぞれ次式で表される。

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \sum_i A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i - \eta_0 + \sum_i A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \left[\frac{\eta_0}{2} + \frac{A_i}{2} \left\{ 2 - 3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} - \frac{9}{4} A_i \left\{ 1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \right] \\ + \frac{1}{2} \left(\sum_i A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \right)^2 - \eta_0^2 + \frac{1}{2N\eta_0} \sum_i A_i \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{w}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h} \right) \sum_i \sqrt{A_i^3} \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \tanh \vartheta_i \left[2 + \left\{ \left(\frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} A_i (3 \operatorname{sech}^2 \vartheta_i - 1) \right. \\ \left. + 2 \sum_j A_j \operatorname{sech}^2 \vartheta_j + 2\eta_0 - A_i \right] \dots\dots\dots (12)$$

さらに、Lagrange 座標での水粒子速度の表示は、Euler 座標の水粒子速度の表示から容易に導かれ、水平および

鉛直水粒子速度 U および W は、それぞれ次式で表される。

$$\frac{U}{\sqrt{gh}} = \frac{u}{\sqrt{gh}} + 2 \sum_i \sum_j \frac{\sqrt{A_i A_j}}{c_i} \tanh \vartheta_i \Big|_0^{T^*} \tanh \vartheta_j \operatorname{sech}^2 \vartheta_j + \eta_0 T^* \sum_i \sqrt{3A_i^3} \tanh \vartheta_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{W}{\sqrt{gh}} &= \frac{w}{\sqrt{gh}} - \left(\frac{z}{h} \right) \left[\sum_i \sum_j \frac{A_j^2 \sqrt{3A_i}}{c_i} \tanh \vartheta_i \Big|_0^{T^*} \operatorname{sech}^2 \vartheta_i (3 \operatorname{sech}^2 \vartheta_j - 2) - \frac{3}{2} \eta_0 \right. \\ &\quad \left. + \sum_j A_j^2 \operatorname{sech}^2 \vartheta_j (3 \operatorname{sech}^2 \vartheta_j - 2) - \sum_i \sum_j \frac{A_i \sqrt{3A_j^3}}{c_i} \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_j \tanh \vartheta_j \right] \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

(5) 質量輸送速度の表示

ソリトンスペクトル理論の展開においては, Stokes の波速の定義を用いていないため, これによって波動場が拘束されるということではなく, 非線形効果によって Euler および Lagrange の両座標において質量輸送速度が存在する。

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{2T^*} \int_0^{T^*} \left(\sum_i^N A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \right)^2 dt^* - \frac{1}{2} \eta_0^2 - \frac{1}{2T^*} \left\{ 1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \sum_i^N \frac{\sqrt{3A_i^3}}{c_i} \\ \times \{ 2 \tanh \vartheta_i|_0^{T^*} - \tanh \vartheta_i (\operatorname{sech}^2 \vartheta_i + 2) |_0^{T^*} \} - \sum_i^N c_i \left\{ \frac{\eta_0}{N} + \sqrt{\frac{A_i}{3}} \frac{2 \tanh \vartheta_i}{c_i T^*} \right\} \Big|_0^{T^*} \quad (16)$$

となる。ここで, 固有値 A_i を決定するための正規直交関数列表示²⁾

$$\sum_i^N A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i = \sum_i^N A_i \sum_{l=1}^i c_{il} \phi_l(\vartheta_i) \quad (17)$$

を用いれば, 式 (16) の右辺第1項は次式のように書き換えられる。

$$\frac{\bar{U}}{\sqrt{gh}} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} + \frac{2\eta_0}{T^*} \sum_i^N \frac{1}{c_i^2} \sqrt{\frac{A_i}{3}} \left\{ \frac{\sqrt{3A_i}}{2} c_{it^*} \operatorname{sech}^2 \vartheta_i + \tanh \vartheta_i \right\} \Big|_0^{T^*} \\ - \frac{2}{T^*} \sum_i^N \sum_j^N \frac{A_j}{c_{ij}} \sqrt{\frac{A_i}{3}} \tanh \vartheta_i|_0^{T^*} \operatorname{sech}^2 \vartheta_j|_0^{T^*} + \frac{2}{T^*} \sum_i^N \sum_j^N \frac{\sqrt{A_i A_j^3}}{c_i} \\ \times \int_0^{T^*} \tanh \vartheta_i \tanh \vartheta_j \operatorname{sech}^2 \vartheta_j dt^* \quad (19)$$

(6) エネルギーの表示

前述したように, 水面変動は式 (9) で表示されることから, 位置エネルギー E_p は次式のようになる。

$$\frac{E_p}{\rho gh^2} = \frac{1}{2T^*} \int_0^{T^*} \left(\frac{z'}{h} \right)^2 dt^* \\ = \frac{1}{2T^*} \int_0^{T^*} \left(\sum_i^N \eta_i \right)^2 dt^* - \frac{1}{2} \eta_0^2 \quad (20)$$

ただし, 式 (17) を用いれば, 次式のように書き換えられる。

$$\frac{E_p}{\rho gh^2} = \frac{1}{2} \sum_i^N A_i^2 c_{ii}^2 \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-2} \left(\sum_{l=i+1}^N A_l c_{li} \right)^2 - \frac{1}{2} \eta_0^2 \quad (21)$$

ソリトン間の相互干渉が生じない程度に波峯間隔が大きい場合には, 式 (21) の右辺第2項はゼロとなり, 直変化法²⁾によって計算された固有値を持つソリトンごとにエネルギーが保有されることになる。これに対し, 相互干渉を無視できない場合には, 式 (21) の右辺第2項によってもエネルギーが保有されるため, このときの直変化法による固有値は, 真の固有値よりも小さい値を与えることになる。

ついで, 運動エネルギー E_k については, 水粒子速度を $A_i^{\frac{1}{2}}$ のオーダーまで評価しているため, $A_i^{\frac{1}{2}}$ のオーダーまでの評価が可能であるが, ここでは, 位置エネルギー

いま, 観測時間を T^* とすれば, Euler 座標での質量輸送速度 $\bar{u}$ は, 次式で定義される。

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} \frac{u}{\sqrt{gh}} dt^* \quad (15)$$

これに式 (11) を代入すれば,

$$\frac{1}{2T^*} \int_0^{T^*} \left(\sum_i^N A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \right)^2 dt^* \\ = \frac{1}{T^*} \sum_i^N \frac{1}{c_i \sqrt{3A_i}} \left(\sum_{l=1}^N A_l c_{li} \right)^2 \quad (18)$$

ついで, Lagrange 座標での質量輸送速度 $\bar{U}$ も同様に, 観測時間内の U の平均値として定義すれば, それは次式で表示される。

—と同じ $A_i^{\frac{1}{2}}$ のオーダーまでで表せば, 次式となる。

$$\frac{E_k}{\rho gh^2} = \frac{1}{2T^*} \int_0^{T^*} \int_0^{1+z^*/h} \left\{ \left(\frac{u}{\sqrt{gh}} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{w}{\sqrt{gh}} \right)^2 \right\} dz^* dt^* \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{l=1}^N A_l c_{li} \right)^2 - \frac{1}{2} \eta_0^2 + O(A_i^{\frac{1}{2}}) \quad (22)$$

3. 表示式の特性および適用性

以上導いた各種表示式は, 波峯間隔が相互干渉を無視できる程度に大きい場合には, 前述の基礎方程式の解となるため, 流体力学的には十分な適用性を持つものと考えられるが, 実際にはその適用において波峯間隔が十分に確保されていない場合もあるため, その適用性を検討する必要がある。

(1) クノイド波理論との比較

図—2 は, クノイド波の第2次近似解との波形および $z=h$ での水平水粒子速度の1周期変化に関する比較である。これから, 波形および水粒子速度のいずれにおいても, クノイド波理論の適用限界に近く, 波峯間隔が必ずしも十分ではない $T\sqrt{g/h}=10$ の場合においてなお両者は一致しており, 無次元周期が10程度の波峯間隔の波に対しても, ソリトンスペクトル理論が十分な適用性を持っていることがわかる。また, 図—3 は, 水平水粒

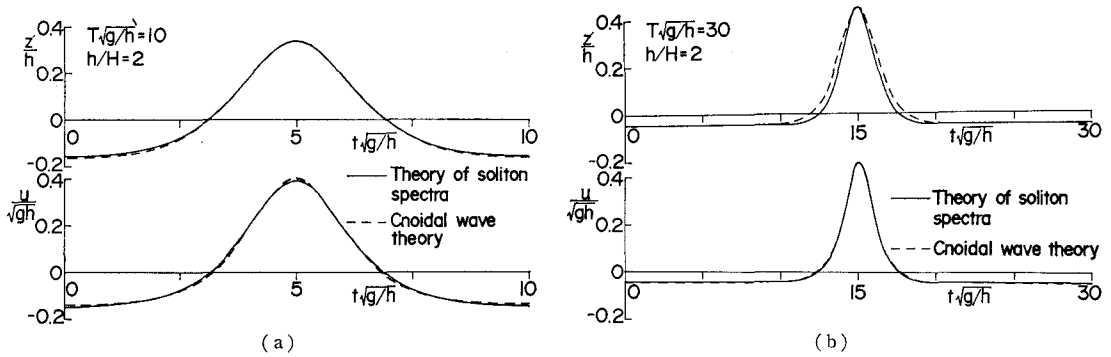


図-2 波形および水平粒子速度の1周期変化に関するクノイド波理論とソリトンスペクトル理論との比較

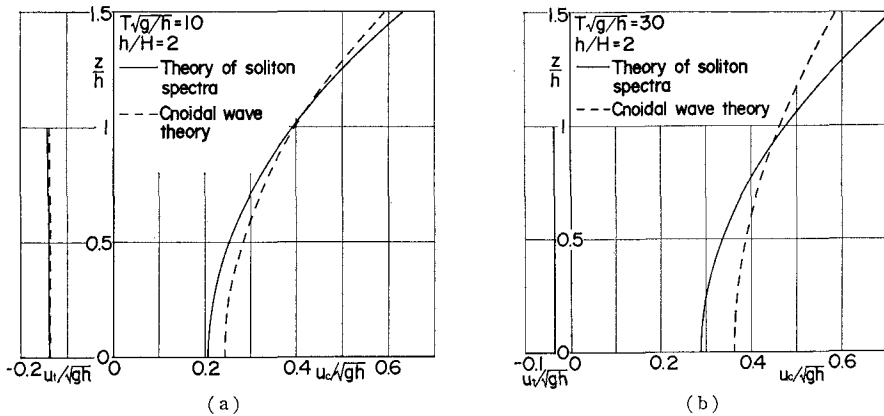


図-3 水平水粒子速度の鉛直分布に関するクノイド波理論とソリトンスペクトル理論との比較

子速度の波峰および波谷下での鉛直分布に関する同様な比較であり、ソリトンスペクトル理論の方が前傾度は強いが、絶対値においては両者はほぼ一致している。これらの結果から、ここで示したソリトンスペクトル理論は、 $T\sqrt{g/h}=10$ 程度の波峰間隔の波であれば、不規則波に対しても適用性を持つものと考えられる。

(2) 水粒子の軌跡に関する実験結果との比較

ソリトンスペクトル理論の不規則波の内部特性への適用性を実験的に検討するため、水槽端部による波動の場の拘束を除去した二重床波浪水槽内に海岸波浪を再現し、このときの波による中立粒子の運動を 16mm カメラで撮影することにより、水粒子の軌跡の測定を行い、ソリトンスペクトル理論によって計算される軌跡 ($x = \int_0^t U dt$, $z = \int_0^t W dt$) との比較を試みる。

図-4 は、各鉛直位置ごとの水粒子の軌跡に関する実験結果と理論結果との比較を示し、図-5 は水粒子の軌跡の計測期間内に計測点を通過した実測波形とそれから直交法²⁾によって求めた固有値からソリトン合成された波形との比較である。図中の S および E は水粒子の軌跡の始点および終点を示す。後者の図-5 から、実測波形がソリトンスペクトル理論によってほぼ正確に再現

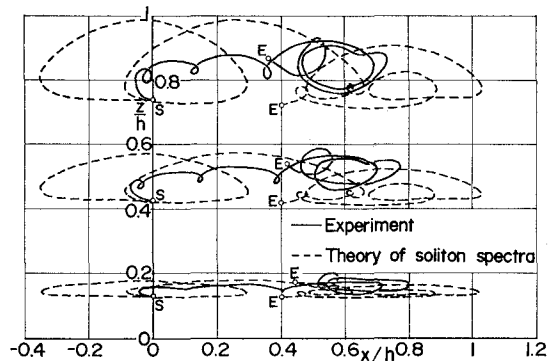


図-4 不規則波の水粒子の軌跡に関する実験結果とソリトンスペクトル理論による結果との比較

されており、水粒子の軌跡の計算に用いる固有値が十分な精度を持つと判断される。しかしながら、水粒子の軌跡に関しては、軌跡の終点がほぼ一致していることや軌跡の全体的な輪郭において両者の対応が認められ、ま

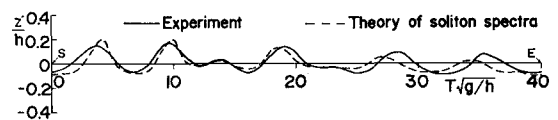


図-5 実測波形とソリトン合成波形との比較

た、水面変動との対応では理論結果の方が良好ではあるが、細部に至っては両者の相違は大きく、この結果からはソリトンスペクトル理論の適用性を見出すことができない。こうした相違が生じた原因としては、まず、このときの水粒子が、そこを通過する個々の波のみならず、質量の連続性によって個々の波とは直接対応しなくなっている水槽内の ensemble 平均の質量輸送にも支配されているため、計測期間内にそこを通過する波だけで水粒子の軌跡を説明することに困難があることが挙げられる。さらに、より大きな原因としては、水槽内に発生する tank oscillation などの低周波成分の影響が挙げられる。このように、前述のクノイド波との比較では良好な結果が得られたにもかかわらず、ここで示した実験結果からはソリトンスペクトル理論の適用性を明らかにすることはできなかったが、質量輸送を伴う不規則波の場合、水面変動と内部特性との対応が必ずしも一義的ではないことが明らかとなり、不規則波の内部特性を評価する場合の示唆を得ることができた。

4. 結 語

以上、本研究においては、海岸波浪はソリトンを成分波とする力学的構造、すなわちソリトン構造を持つという観点から、海岸波浪の波峯間隔が相互干渉を無視できる程度に大きいという仮定のもとに、流体力学の基礎方程式と同時に水面変動の連続性を満足させたソリトンを成分波とする波動解を導き、これが固有値のみに依存する孤立波とは異なり、成分波の ensemble 特性にも支配される波であることを示し、ソリトンスペクトル理論が海岸波浪の内部特性も含めて統一的に表示できる不規則波理論であることを述べた。さらに、水平水粒子速度やエネルギーなどの内部特性の表示式を導き、それらの適用性を検討するとともに、若干の実験結果との比較を示した。

参 考 文 献

- 1) Tsuchiya, Y. and T. Yasuda: A cnoidal wave theory and its verification, Supp. 3rd Australian Conf. on Coastal and Ocean Engg., 1977, p. 7.
- 2) 土屋義人・安田孝志・武山保徳: 相互干渉を無視した場合のソリトンスペクトルの理論, 第28回海岸工学講演会論文集, 1981, pp. 89~93.