

有限要素-差分モデルによる高潮の数値計算法

土屋 義人*・山下 隆男**・平石 哲也***

1. 緒 言

近年、大規模台風の来襲がなく、高潮による直接の被害は減少の傾向にある。しかしながら、いわゆる高潮危険地域的高度利用および人口、資本の集中を考慮すると、高潮災害のポテンシャルは高まっていると考えるべきであろう。また、湾内汚染などの環境アセスメントが必要になってきた今日、高潮の数値予知には、水位変動の予知のみならず、流速（流量）の時空間分布の予知をも含めて考える必要がある。このような観点から、著者らは2レベルモデルによる高潮の数値計算法を提案し、その適用性を検討してきた¹⁾²⁾が、ここでは、さらに流速分布のシミュレーションにも重点をおいた高潮の数値計算法として、有限要素-差分モデルを提案し、その実用性を検討する。

ここで提案するモデルは、基本的には、Koutitas ら³⁾によって潮流の数値計算に用いられたモデルを高潮計算に適用したもので、鉛直方向には有限要素法を、水平方向には有限差分法の概念を用いているため、モデルの名称としては、有限要素-差分モデルと呼ぶことにする。すなわち、本研究においては、水深に比例して鉛直方向に3層分割し、各節点流速 u_k に対しては直線近似による形状関数を与え、水平方向には計算領域を格子分割して、格子点上での平均流速 (U, V) と水位変化 ζ とを考え、 u_k に関しては Navier-Stokes の方程式を残差が最小になるように満足させ、 U, V および ζ に関しては、連続式を満たすように計算する方法である。このため、本モデルの特徴としては、非線形の運動方程式を、時間ステップを1ステップずつずらした線形方程式で置き換えて解くという近似を行って、与えられた初期・境界条件を満足する各時間ステップ毎の解が全領域で同時に求まるため、従来の高潮、潮汐計算にみられるような計算初期における不安定現象を生じることなく、水位変動および流速の時空間分布が計算される。

2. 有限要素-差分モデル

(1) 基礎方程式

地球の曲率および Coriolis 力の鉛直角速度が無視できる領域を対象として、静水面上に原点をとり、鉛直上方に z 軸、 x および y 軸を右手系に従って 図-1 のよう

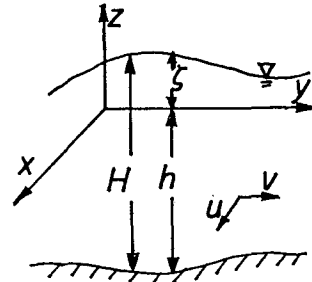


図-1 座標系および記号

な座標系をとると、水深 $h(x, y)$ 、静水面からの水位変動 ζ 、および流速成分 (u, v) を用いて基礎方程式は、次式で与えられる。

$$L_x(x, y) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \epsilon_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$L_y(x, y) = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \epsilon_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(H U) + \frac{\partial (H V)}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $H = h(x, y) + \zeta(x, y)$ 、 $U = (1/H) \int_{-h}^{\zeta} u dz$ 、 $V = (1/H) \int_{-h}^{\zeta} v dz$ 、 ϵ_v ：鉛直方向の渦動粘性係数、 f ：Coriolis 係数、および g ：重力の加速度である。

(2) 基礎方程式のモデル化

まず、水深方向に任意の分割比、分割数で節点分割を行う場合、図-2 のように水深に比例した一定の分割比、ここでは (3 : 6 : 1) を定める。次に、節点 k 上の流速成分 u_k に対して直線の形状関数 $N_k(z) = (z_{k+1} - z)/l_k$ を

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所
 ** 正会員 工修 京都大学助手 防災研究所
 *** 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所

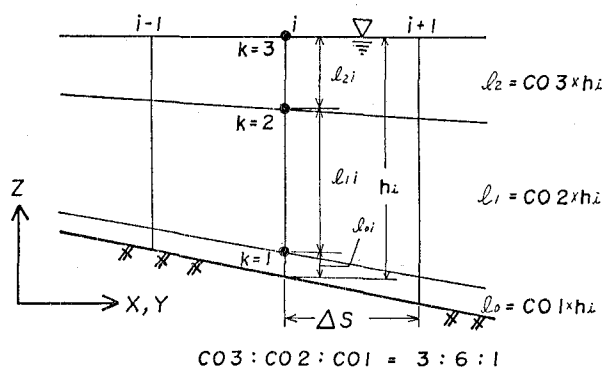


図-2 3層分割の場合の鉛直方向の構造

用いて、節点 $k+1$ および k 間の流速 $\hat{u}$ は次式のように与えられる。

$$\hat{u} = N_{k+1}u_{k+1} + N_k u_k \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 l_k ; 節点 $k+1$ と k との距離、および z_k ; 節

$$\begin{aligned} & \frac{l_k}{6} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial t} + \frac{l_k}{3} \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_k^2 \left\{ -\frac{1}{12l_k} \frac{\partial l_k}{\partial x} (z_k + z_{k+1}) \right\} + \frac{l_k}{12} u_{k+1} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x} + u_k^2 \left\{ \frac{1}{12l_k} \frac{\partial l_k}{\partial x} (3z_k + z_{k+1}) \right\} \\ & + \frac{l_k}{4} u_k \frac{\partial u_k}{\partial x} + u_{k+1} v_{k+1} \left\{ -\frac{1}{12l_k} \frac{\partial l_k}{\partial y} (z_k + z_{k+1}) \right\} + \frac{l_k}{12} v_k \frac{\partial u_{k+1}}{\partial y} + u_k v_k \left\{ \frac{1}{12l_k} \frac{\partial l_k}{\partial y} (3z_k + z_{k+1}) \right\} \\ & + \frac{l_k}{4} v_k \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{l_k}{2} \left[g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] - \frac{\varepsilon_v}{l_k} \left\{ \left(\frac{l_k}{l_k + l_{k+1}} \frac{u_{k+2} - u_{k+1}}{l_{k+1}} + \frac{l_{k+1}}{l_k + l_{k+1}} \frac{u_{k+1} - u_k}{l_k} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{l_{k-1}}{l_k + l_{k+1}} \frac{u_{k+1} - u_k}{l_k} + \frac{l_k}{l_k + l_{k+1}} \frac{u_k - u_{k-1}}{l_{k-1}} \right) \right\} - \frac{l_k}{6} f(v_{k+1} + 2v_k) = 0 \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

以下、同様にして連立方程式を展開し、未知数 (u_k^{n+1} , v_k^{n+1}) に関する連立1次方程式を次のように表わす。

$$[A_x] \cdot [u] = [B_x], \quad [A_y] \cdot [u] = [B_y] \dots \dots \dots (7)$$

ここに、 n はタイムステップであり、たとえば3層分割の場合には x 方向の行列およびベクトルは、次式のよう

$$\begin{aligned} [A_x] &= \begin{bmatrix} \frac{l_{x,1ij}}{3\Delta t}, & \frac{l_{x,1ij}}{6\Delta t}, & 0 \\ \frac{l_{x,1ij}}{6\Delta t}, & \frac{l_{x,1ij}}{3\Delta t} + \frac{l_{x,2ij}}{3\Delta t}, & \frac{l_{x,2ij}}{6\Delta t} \\ 0, & \frac{l_{x,2ij}}{6\Delta t}, & \frac{l_{x,2ij}}{3\Delta t} \end{bmatrix}, \\ [u] &= \begin{bmatrix} u_{1ij}^{n+1} \\ u_{2ij}^{n+1} \\ u_{3ij}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad [B_x] = \begin{bmatrix} B_{x1} \\ B_{x2} \\ B_{x3} \end{bmatrix} \end{aligned} \dots \dots \dots (8)$$

なお $[B_x]$ の要素は、式 (6) の n ステップの成分で構成されており、重複を避けるため、それらの表示は割愛する。結局、式 (7) を解けば、節点上での流速 (u_k^{n+1} , v_k^{n+1}) が求まり、式 (3) から格子点における水位変動 ζ^{n+1} が算出されることになる。

さらに、海面におけるせん断応力 S_x および S_y は、式 (6) における表層での流速勾配として、次式のように与えられる。

点 k の z 座標である。

次に、 $\hat{u}$ および $\hat{v}$ が式 (1) および (2) を、残差 R_x および R_y を最小とする条件式は、次式のようなになる。

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{l_k} R_x N_k dz &= 0 \\ \int_{l_k} R_x N_{k+1} dz &= 0, \\ \int_{l_k} R_y N_k dz &= 0 \\ \int_{l_k} R_y N_{k+1} dz &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 $R_x = L_x(\hat{u}, \hat{v})$, $R_y = L_y(\hat{u}, \hat{v})$ および

$\int_{l_k} dz$ は l_k に沿う積分である。

なお、式において、 $\int_{l_k} R_x N_k dz = 0$ を展開すると、次式のようなになる。

$$S_x = \varepsilon_v \frac{u_{k+1} - u_k}{l_k} = \rho_a \gamma^2 W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \dots \dots \dots (9)$$

ここに、 W_x および W_y ; 風速の x および y 方向成分、 ρ_a ; 空気の密度、および γ^2 ; 風の抵抗係数である。一方、海底における境界条件は、non-slip 条件で $u=0$, $v=0$ として与えられる。このため、海底におけるせん断応力は、鉛直方向の流速分布から一意的に決まることになり、節点分割の少ない場合にはその評価法を検討する必要があると考えられるが、本観測では3層に分割した場合のモデルの特性および適用性を検討することとし、海底せん断応力に関する表示法は検討していない。

3. 有限要素差分モデルの適用性

(1) 2次元一様水深場への適用

気象じょう乱としては、次式の気圧分布で与えられる一定の進行速度 45 km/hr, 半径 $L=100$ km, 中心気圧の水柱換算値 $P_0=1.0$ m のモデル台風を考える。

$$P(x, t) = P_\infty - \frac{P_0}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{L} \right) \dots \dots \dots (10)$$

また、湾は水深 $h=27$ m, 長さ 60 km の両端固定壁の長方形湾で、台風の先端が湾の端部にある状態から計算を開始し、静止海面状態を初期条件、固定壁では完全反射を境界条件とした。

図-3 (a) および (c) には、台風の位置と水位変動お

および流速分布の時間的変化を、また 図-3 (b) には湾両端部での水位変動を示す。

(2) 一様水深矩形湾への適用

2次元一様水深場を3次元場へ拡張した場合で、モデル台風の気圧分布は式(9)の3次元表示で与えられる。また、湾幅は30kmで湾長および水深は(1)と同様である。図-4には風速分布(a)、水位の分布(b)、第1層の流況(c)および第3層のそれ(d)を示す。

以上の計算では潮汐は考えておらず、計算条件は、 $\Delta t = 120 \text{ sec}$, $\Delta s = 3 \text{ km}$, $\epsilon_r = 0.01 \text{ m}^2/\text{sec}$ および $\gamma^2 = 0.0026$, 水深分割比は上層から 3:6:1 であり、一様水深場における数値実験の結果から、有限要素-差分モデルの特性とに以下の点があげられる。

a) 底面せん断応力に関する詳しい検討は行っていないが、湾のスケールから求まる第1モードの固有振動周期 2 hr と、2次元場における数値計算の resurgence の

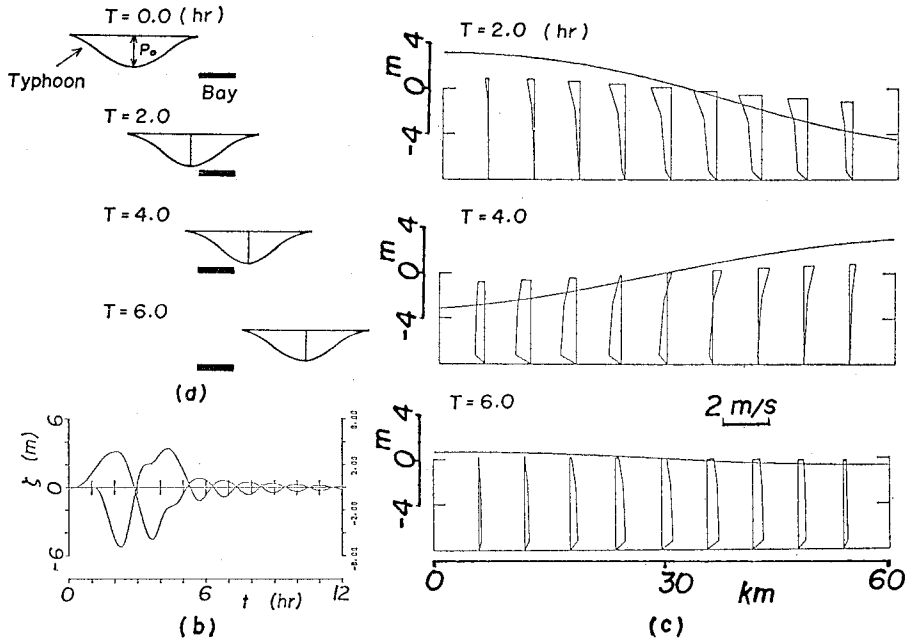


図-3 2次元一様水深場の計算結果

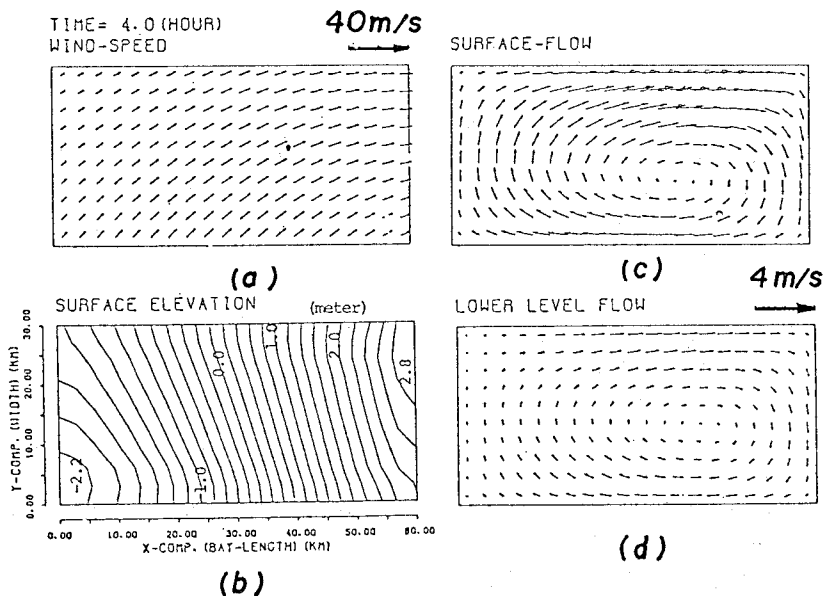


図-4 一様水深矩形湾の場合の計算結果

周期が一致していることから、長波性の運動に対するモデルの適用性が確認される。一様水深場でのせん断応力 $\tau_b = \epsilon_v \cdot (u_{k+1} - u_k) / l_k$, $\epsilon_v = 0.01 \text{ m}^2/\text{sec}$, $l_k = 0.1h$ の評価がほぼ妥当な値であると考えられる。

b) 図-3 の 4hr にみられるように、吹送流ともどり流れが重なり合うような流速分布がシミュレートされており、この点は従来用いられている単層モデルと大きく異なる。

c) 図-4 のように、3次元場の流速分布には、表層と底層とで流れの向きが完全に逆転するような流況はみられないが、ベクトルとしてみた場合にはかなり相違しているといえよう。

(3) 大阪湾への適用

有限要素差分モデルの場合、海面および海底におけるせん断応力を如何に的確に与えるかが最大のポイントであり、この点は現地への適用に当って十分検討する必要があるが、ここではその可能性を見出す目的で、大阪湾における台風 7916 号の場合を対象とした数値実験を行った。水深分割比および渦動粘性係数は、前2例と同様であり、潮汐計算、開境界条件および藤田の式に基づく台風定数は著者ら⁷⁾が2レベルモデルで用いたものと同じである。

図-5 は 1979 年 9 月 30 日 20 時 (計算開始後 11hr) の風速分布 (a)、代表的な水位点の値 (b)、第1層の流況 (c) および第3層の流況 (d) である。図-6 および 7 は MT局における水位変動および各層での流速ベクトルを実測値と比較したものである。これらの図から、本モデルの特徴として以下のことがわかる。

a) MT局における観測結果と計算結果との比較から、第3層の流速成分を除いては、必ずしも現象の再現性は良好であるとはいえないが、モデルにおけるせん断応力の評価が確立されていない点、外力をモデル台風で与えている点および波浪、外洋条件を考慮していない点を考慮すれば、ほぼ妥当な結果であると考えらるべきで、本モデルの現地への適用性は、これらの点を検討していくことで十分な可能性があるといえよう。

b) 図-5 に1例を示した一連の流況図からは、一様水深矩形湾の場合と同様に、流向に関しては各層で顕著な相違はみられないが、流速の鉛直分布は明らかに異なる。

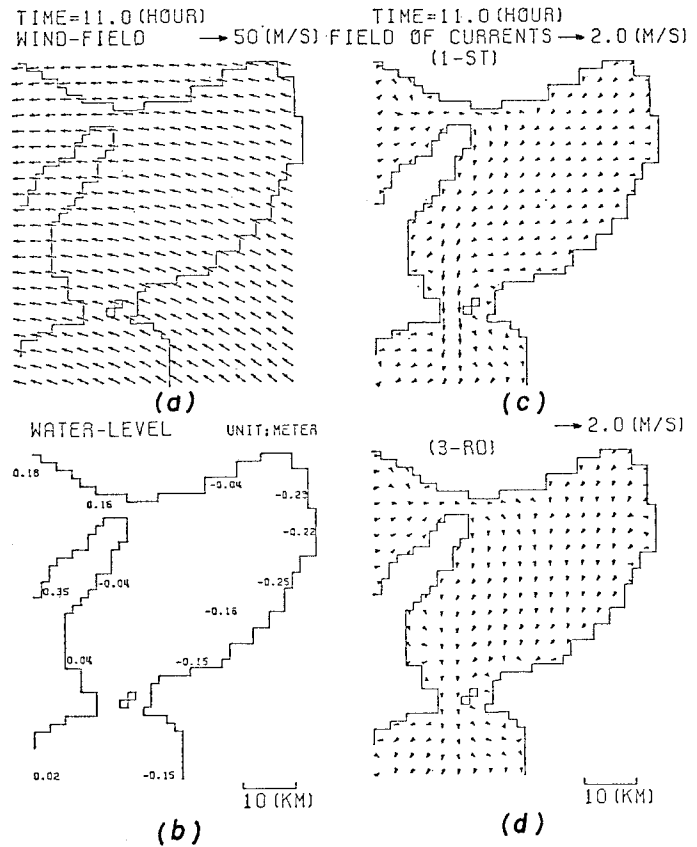


図-5 大阪湾での計算結果

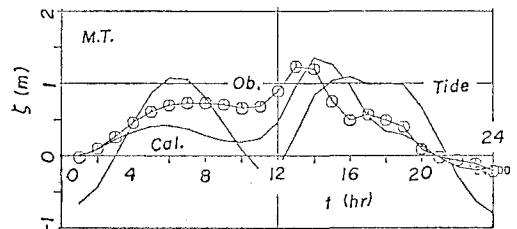


図-6 MT局における水位変動

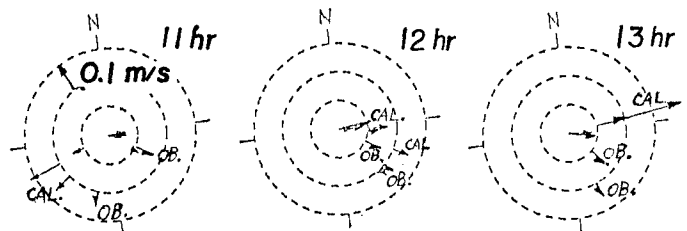


図-7 MT局における流速ベクトルの計算結果と観測値との比較

っており、このことはMT局における観測結果にも認められる。

4. 結 語

以上、流速の鉛直分布を考慮した高潮の数値計算法として、有限要素-差分モデルを提案し、その特性および適用性について検討した結果、3層分割の場合においても、海面および海底におけるせん断応力の表示法を検討することで流量、流速分布まで再現できる高潮数値モデルとしての実用化が十分期待できることがわかった。

参 考 文 献

- 1) 土屋義人・山下隆男・岡 扶樹: 2レベルモデルによる高潮の推算—台風7916号による大阪湾の高潮—, 第28回海講論文集, pp. 54~58, 1981.
 - 2) 土屋義人: 高潮の発生機構とその極値に関する研究, 文部省科学研究費自然災害特別研究研究成果報告, No. A-56-4, pp. 20~38, 1981.
 - 3) Koutitas, C. and B. O'Conner: Modeling three-dimensional wind-induced flows, J. Hydraulic Div., ASCE, Vol. 106, No. HY11, pp. 1843~1865, 1980.
-