

波によるプラットフォームの振動解析に関する研究

石 田 啓*・ 沢 木 一**

1. 緒 言

海洋構造物の設計は、従来、静力学的に行われることが多かったが、構造物の大型化および高精度化に伴い、動力学的な検討が必要となって来ている。海洋構造物を動力学的に分類すると、重力式構造物、柱状構造物および浮体に大別されるが、本研究では柱状構造物を対象とし、その波浪振動を取り扱う。

従来、柱体の振動は、一自由度系振動モデルに置き換えて扱ったものが多いが、構造形態が複雑になると、この方法は不適当となる。一方、多質点系モデル構造物の振動解析法としては、剛性マトリックス法と伝達マトリックス法¹⁾を挙げることができるが、前者は、質点数の増加に伴い、マトリックスが大きくなる欠点がある。後者は、質点数の増加と共に、誤差が累積される恐れがあるが、波の場のように、減衰力が無視できない場合には、剛性マトリックス法よりも、その取り扱いが簡単である。この伝達マトリックス法を、海洋構造物の振動解析に適用しようと試みたものに、Gaither ら²⁾の研究があるが、この研究では、作用する外力が単振動の集中荷重に限られており、波力による振動計算を行うまでには至っていない。

したがって、本研究では、伝達マトリックス法による海洋構造物の波浪応答解析法を確立するための第一段階として、規則波によるプラットフォームの振動解析法を示し、さらに、プラットフォーム模型を用いた実験結果と比較して、この解析手法の妥当性を論ずる。

2. 解析方法

(1) 伝達マトリックス法による振動解析²⁾

図-1 に示すように、座標系には部材中立軸方向を x 軸にとった右手座標系を用いる。各状態量は、 x 軸方向の軸力および変位を N および u 、 z 軸方向のせん断力および変位を V_z および w 、 y 軸まわりの曲げモーメントおよび回転角を M_y および ϕ で示すが、これらの諸量は、以下では、実際の物理量から、角振動数 Ω で振

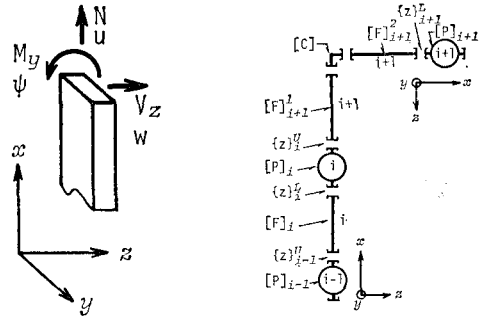


図-1 部材座標系と状態量

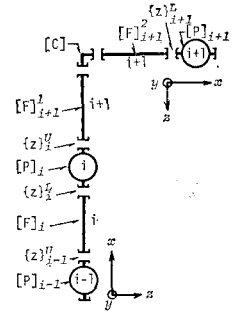


図-2 モデル化した部材

動する時間項 $e^{j\Omega t}$ を除いた複素振幅として使用する。これらの実部と虚部を成分とする列ベクトルがステートベクトルであり、

$$\{z\} = \left\{ \underbrace{u, -w, \phi, M_y, V_z, N}_{\text{実部}}, \underbrace{u, -w, \phi, M_y, V_z, N}_{\text{虚部}}, \underbrace{1}_{\text{単位数}} \right\}^T \quad \dots\dots\dots (1)$$

で表わす。ここに T は、列ベクトルを意味する。

図-2 は、梁・質点系にモデル化した部材であるが、梁 i および質点 i に対して、それぞれ、 x 軸方向および y 軸まわりの適合条件式と運動方程式を立てると、質点 $i-1$ の上側のステートベクトル $\{z\}_{i-1}^T$ と質点 i の下側のステートベクトル $\{z\}_i^T$ との関係は、式 (2) に示すフィールドマトリックス $[F]_i$ を用いて、 $\{z\}_i^T = [F]_i \{z\}_{i-1}^T$ のように、また、 $\{z\}_i^T$ と $\{z\}_{i-1}^T$ との関係は、式 (3) に示すポイントマトリックス $[P]_i$ を用いて、 $\{z\}_{i-1}^T = [P]_i \{z\}_i^T$ のように表わされる。ここに、式 (2) の、 E はヤング係数、 A は断面積、 I は y 軸まわりの断面 2 次モーメント、 L は梁の長さであるが、 ϵ は、部材の内部減衰力を考慮することにより生じた定数であり、通常 $\epsilon = 0 \sim 0.015$ の値が妥当とされている^{2), 3)}。また、式 (3) の、 m は質点の質量、 I_y は y 軸まわりの慣性モーメント、 c_x 、 c_z および c_ϕ は、それぞれ x 軸方向、 z 軸方向および y 軸まわりの減衰定数である。 f_x 、 f_z および f_ϕ は、 x 軸方向の外力、 z 軸方向の外力および y 軸まわりの外力モーメントのそれぞれの振幅である。

* 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木工学科

** 工修 日本道路公園

$$[F]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{EA(1+\varepsilon^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon L}{EA(1+\varepsilon^2)} & 0 \\ 0 & 1 & L & \frac{L^2}{2EI(1+\varepsilon^2)} & \frac{L^3}{6EI(1+\varepsilon^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon L^2}{2EI(1+\varepsilon^2)} & \frac{\varepsilon L^3}{6EI(1+\varepsilon^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{L}{EI(1+\varepsilon^2)} & \frac{L^2}{2EI(1+\varepsilon^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon L}{EI(1+\varepsilon^2)} & \frac{\varepsilon L^2}{2EI(1+\varepsilon^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

$$[P]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y \Omega^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_\phi \Omega & 0 & 0 & -f_\phi \\ 0 & m \Omega^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c_z \Omega & 0 & 0 & -f_z \\ -m \Omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -c_x \Omega & 0 & 0 & -f_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_\phi \Omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_y \Omega^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_z \Omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \Omega^2 & 0 & 1 & 0 \\ c_x \Omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m \Omega^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

隅角部では、中立軸の方向が変わるため、コーナーマトリックス $[C]$ を用いる必要があるが、 $\{z\}_i^T$ と $\{z\}_{i+1}$ との関係は、さらに2つのフィールドマトリックス $[F]_{i+1}$ と

$[F]_{i+1}^T$ を用いることにより、 $\{z\}_{i+1} = [F]_{i+1}^T [C] [F]_{i+1} \{z\}_i^T$ で与えられる。 $[C]$ は、部材が右回りに 90° 曲がる場合には、式 (4) となる。

図-3 は、梁・質点系にモデル化したプラットフォームであるが、上述した関係式を用い、A点からD点まで順に $\{z\}$ を伝達すると、 $\{z\}_D = [F]_{16} \dots [C] \dots [F]_{11} [C] [F]_{10} \dots [F]_{11} \{z\}_A \equiv [U]_{DA} \{z\}_A$ が得られる。この式に、A点とD点の ϕ , w および u が0という条件を代入すると、A点の M_y , V_z および N が求まり、 $\{z\}_A$ が全て求まる。したがって、B点のステートベクトルは、 $\{z\}_B = [U]_{BA} \{z\}_A$ から計算できる。

(2) 柱体の横振動と外力項³⁾

図-4 に示すように座標をとり変え、 x 軸方向の柱の変位を ξ , x 軸方向の水粒子速度を u , その加速度を $\dot{u}$ で示す。柱に働く x 軸方向の波力を、相対水粒子速度を用いたモリソン公式で与えると、柱の横振動の方程式

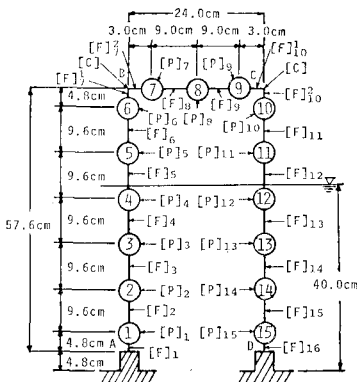


図-3 モデル化したプラットフォーム

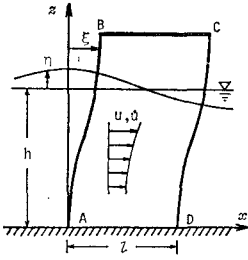


図-4 波動場の座標系

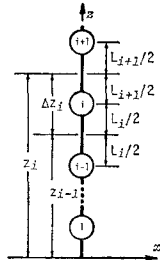


図-5 積分区間

は,

$$\rho A \xi_{tt} + c_1 \xi_t + EI \xi_{zzzz} = \frac{1}{2} C_D \rho_w D (u - \xi_t) |u - \xi_t| + (C_M - 1) \rho_w A (\dot{u} - \xi_{tt}) + \rho_w A \dot{u} \quad \dots\dots\dots (5)$$

と表わすことができる。ここに ρ および ρ_w は柱および水の密度, c_1 は減衰定数, D は柱の直径, C_M は慣性係数, C_D は抗力係数である。式 (5) は, ξ に関して非線型であるが, $u \gg \xi_t$ と仮定すると,

$$(\rho A + K \rho_w A) \xi_{tt} + (c_1 + 2C_D \rho_w A) \xi_t + EI \xi_{zzzz} = C_D \rho_w A |u| + C_M \dot{u} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となり, 方程式は線型となる。ここに, $C_D = C_D \rho_w D/2$, $C_M = C_M \rho_w A$, $K = C_M - 1$ である。

次に, 微小振幅波理論を用い, $x=0$ での水面変動を $\eta = a \cos \sigma t$ とし, $u = a \sigma (\cosh kz / \sinh kh) \cos \sigma t$ および $\dot{u} = -a \sigma^2 (\cosh kz / \sinh kh) \sin \sigma t$ を式 (6) に代入した後, 式 (6) 全体を 図-5 に示す分割長 $\Delta z = z_i - z_{i-1}$ の間で積分すると, 式 (3) に含まれる m_i および c_{zi} は,

$$m_i = (\rho A + K \rho_w A) \Delta z_i \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$c_{zi} = c_1 \Delta z_i + 2C_D \rho_w A \sigma \{ (\sinh kz_i - \sinh kz_{i-1}) / (k \sinh kh) \} |\cos \sigma t| \quad \dots\dots\dots (8)$$

となり, また, 質点 i に働く x 方向の波力 $f_i(t)$ は,

$$f_i(t) = X_i \cos \sigma t |\cos \sigma t| + Y_i \sin \sigma t \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここに, a は振幅, σ は角周波数, h は水深であり,

$$X_i = C_D' (a^2 g k / \sinh 2kh) \{ (\sinh 2kz_i - \sinh 2kz_{i-1}) / (2k + \Delta z_i) \}$$

$$Y_i = -C_M' (ag / \cosh kh) (\sinh kz_i - \sinh kz_{i-1})$$

である。さらに式 (9) の $\cos \sigma t |\cos \sigma t|$ の部分をフーリエ級数に展開し, その第 3 項までを用いると, 式 (9) は,

$$f_i(t) = \frac{8}{3\pi} X_i \cos \sigma t + \frac{8}{15\pi} X_i \cos 3\sigma t - \frac{8}{105\pi} X_i \cos 5\sigma t + Y_i \sin \sigma t \quad \dots\dots\dots (10)$$

となり, 式 (3) の外力振幅 f_{zi} として, $(8/3\pi)X_i$, $(8/15\pi)X_i$, $(-8/105\pi)X_i$ および Y_i が生じ, またこの時の Ω_i は, それぞれ, σ , 3σ , 5σ および σ となることからわかる。したがって, 柱 AB に働く波力により生じる時間項を含む状態量を計算するためには, 各外力振幅とその角周波数を用いて, それぞれの $\{z\}$ を算出し, 外

力の位相が $\cos$ の場合には, $\{z\} \times e^{j\Omega_i t}$ の実部を, $\sin$ の場合には, その虚部を取り, これらを合成すれば良い。また, $x=l$ の地点の柱 CD については, 時間 t を, $t-lk/\sigma$ に置き変える以外は, 柱 AB の場合と全く同様である。実際の状態量は, 両者の状態量を重ね合わせて得られることは言うまでもない。

なお, 式 (3) に含まれる f_{ϕ} , $I_y \Omega^2$ および $c_{\phi} \Omega$, ならびに, f_{xi} および $c_{xi} \Omega$ は, 若干の検討の結果, ここでは無視することとした。また式 (8) の c_{zi} の中の c_1 は, 第 2 項に比べて小さいと考え, 無視したが, 式 (2) の ε は, 0.015 を用いた。

3. 実験装置および方法

実験は, 金沢大学工学部土木工学科に設置された長さ 16.8 m, 幅 50 cm, 深さ 64 cm の造波水槽を用い, その中央に, 図-6 に示すプラットフォームを設置した。

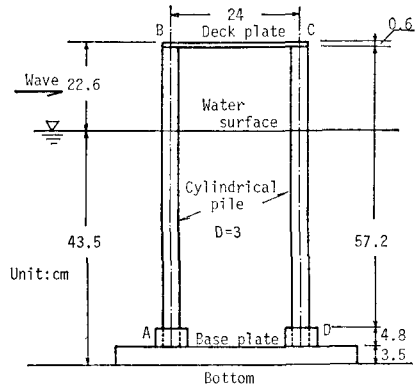


図-6 プラットフォーム模型

これは, 幅 48 cm, 長さ 27 cm, 厚さ 0.6 cm のアルミ製デッキを, 直径 3 cm のウレタンゴム製円柱 4 本で支持する形式のものであり, 非接触型変位計を用いて, B 点の振動変位を測定した。円柱の比重は 1.12, ヤング率は $E=600 \text{ kg/cm}^2$ であり, デッキの比重は 2.80, $E=7.3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ である。実験時の水深は $h=43.5 \text{ cm}$ であり, 使用した波は, 周期が $T=0.56 \sim 1.66 \text{ sec}$, 波高が $H=1.5 \text{ cm} \sim 11.0 \text{ cm}$ の範囲内のものである。

4. 結果および考察

図-7 および 図-8 には, 図-6 のプラットフォームを 図-3 に示した多質点系に置き変えて数値計算した結果を示すが, ここでは, 波形勾配は $H/L=0.1$, $C_D=1$, $C_M=2$ を用いた。図-7 は, 波の周期 T と, B 点の変位の正方向の最大値 $\xi_{\max}$ との関係を示す。図中の破線, 実線および点線は, 付加質量係数を $K=2$, 1 および 0 とした場合であり, それぞれの共振周期は, $T_r=0.457 \text{ sec}$, 0.448 sec および 0.439 sec であり, K の減少に伴

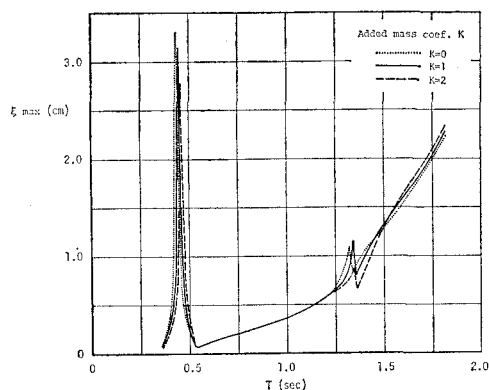


図-7 デッキの共振特性

い、減少するが、いずれも、静水中での模型の固有振動周期 $T_n=0.41$ sec より大きい。これは、計算に用いた柱の E の値に、若干の誤差が混入しているためと思われる。なお、 $T=3T_n$ においても共振が見られるが、これは、式(10)右辺第2項による共振が加わるためである。

図-8 は、B 点の変位 ξ の一周期内の位相変化を示すが、 $t/T=0$ は、柱 AB に波峰が来る位相である。図中、破線および一点鎖線は、柱 AB および柱 CD に働

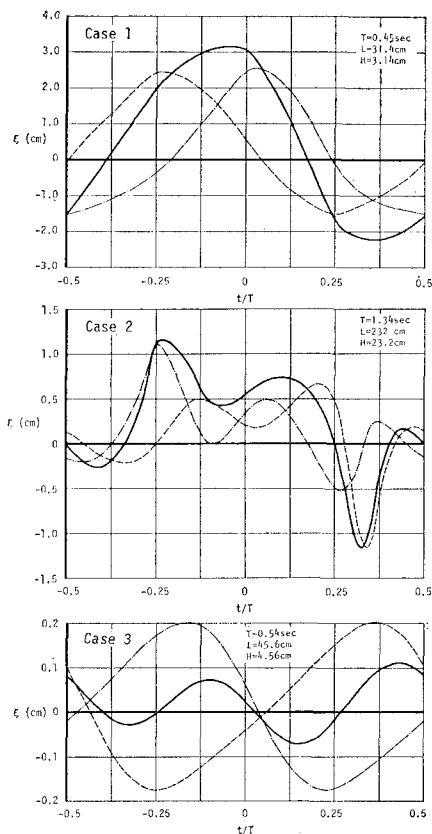


図-8 デッキの変位の時間変化

くそれぞれの波力による B 点の変位であり、実線は、両者を合成した変位である。ケース 1 は、 $T=T_n \approx 0.45$ sec の共振時の変位を示すが、 $t/T=-0.06$ において、 $\xi_{\max} = 3.14$ cm もの大きな値となる。ケース 2 は、 $T=3T_n \approx 1.34$ sec の場合であり、3 倍周波数の振動が強く加わっている。ケース 3 は、 $T=0.54$ sec、 $L=45.6$ cm の場合であるが、波長が支柱間隔 $l=24$ cm の約 2 倍であるため、両支柱に働く波力の方向が逆となり、実際の変位は相殺されて、 $\xi_{\max}=0.7$ mm という小さな値となる。

図-9 には、一点鎖線で示した計算値と実線で示した実験値との比較を示す。計算に際し、簡単のため、 $K=1$ 、 $C_D=1$ 、 $C_M=2$ と固定した。ケース 1 は、 $T=0.69$ sec の場合であり、実験値よりも計算値が大きいが、これは、計算に用いた柱の E に含まれる誤差のためと考えられる。ケース 2 は、両者の位相に若干の差異が見られるが、値そのものは、ほぼ一致している。ケース 3 とケース 4 の波の周期は、 $T=0.85$ sec であり、固有振動周期の約 2 倍である。この場合、ケース 4 のように、波高の増加に伴い、波の有限振幅性が強くなると、 u および $\dot{u}$ に含まれる 2 倍周波数成分による外力項により、共振が誘発され、実験値には、2 倍周波数の振動が加わることが考えられる。ケース 6 からケース 9 では、両者は良く一致しており、計算方法の妥当性を実証していると言える。

5. 結 論

本研究により、得られた結果を要約すると、(1) 柱状構造物の波浪振動解析に、伝達マトリックス法は極めて有効である。(2) 変位の算出に際し、特にヤング率 E を正しく与えることが重要である。(3) 付加質量係数 K は、通常 1 に固定して良いが、共振点付近では、 E および K の値のわずかな相違により、振動波形は大きく変化する。(4) 抗力が卓越する波では、固有振動周期の 3 倍周期の波によっても共振が生じる。(5) 減衰定数は、水粒子速度を含む部分が重要であり、柱の変位速度に起因する減衰力は、通常無視して良いと思われるが、これについては、抗力係数 C_D 、内部減衰係数の ϵ の値と共に、今後さらに検討しなければならない。

参 考 文 献

- 1) Pestel, E. C. and F. A. Leckie: Matrix methods in elastomechanics, McGraw-Hill, pp. 1~129, 1963.
- 2) Gaither, W. S. and D. P. Billington: The dynamic response of offshore structures to time-dependent forces, Proc. of the 9th Conf. on Coastal Engineering, pp. 453~471, 1964.
- 3) 石田 啓・渡辺公徳・松井輝輝: 柱状構造物の波浪振動解析に関する研究, 金沢大学工学部紀要, 14 巻, 1 号, pp. 9~17, 1981.

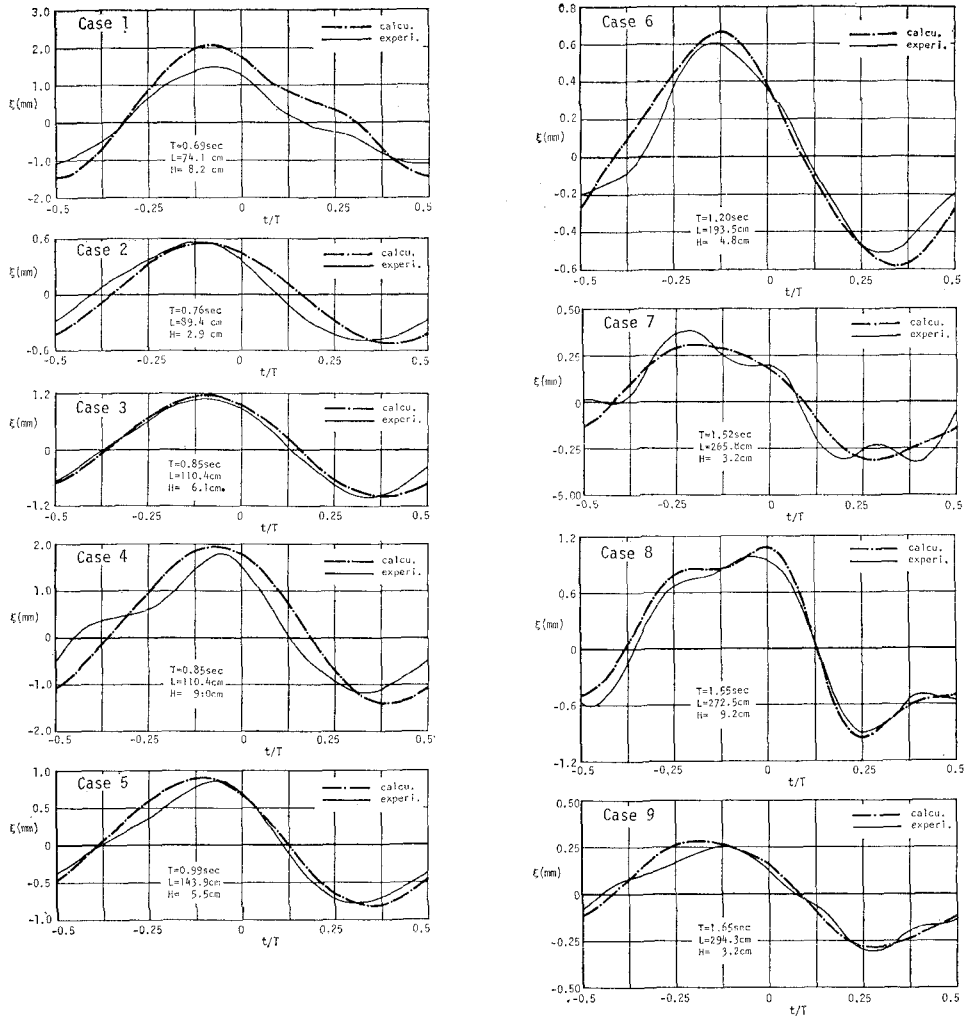


図-9 振動波形の実験値と計算値の比較