

うち値の小さい方から数えて M 番目のもので与えられる。

$$q(1, \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n] = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

2.3 表面の変動量

界面静振による表面の変動量 ζ_1 は界面の変動量 ζ_2 の 10^{-3} 程度で、実用上重要ではない。しかし、上下層の流速を求める上で必要なため結果を示す。

モード M の界面静振による表面の変動量は、式 (6) で角周波数 σ_M を求めたのち、式 (5) および $\partial \zeta_1 / (\partial \xi) = q e^{-i\sigma t}$ より次式を得る。

$$\zeta_1 = l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n+1} \xi^{n+1} \right] + c \right\} e^{-i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 c は積分定数で、質量保存則 $\int_0^1 \zeta_1 b d\xi = 0$ すなわち

$$\int_0^1 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n+1} \xi^{n+1} \right] e^{-\beta \xi} + c e^{-\beta \xi} \right\} d\xi = 0$$

より、次式で与えられる。

○ $\beta = 0$ のとき

$$c = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{(n+2)(n+1)} \right] \quad \dots\dots\dots (8)$$

○ $\beta \neq 0$ のとき

$$c = - \frac{\beta}{e^{-\beta} - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n+1} I_{n+1} \right] \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $I_{n+1} = \int_0^1 \xi^{n+1} e^{-\beta \xi} d\xi$ で、これは式 (10) の漸化式となる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \{1 - (\beta + 1)e^{-\beta}\} / \beta^2 \\ I_2 &= \{2I_1 - e^{-\beta}\} / \beta \\ &\vdots \\ I_{n+1} &= \{(n+1)I_n - e^{-\beta}\} / \beta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

2.4 上層の水粒子速度

上層の水粒子速度 u_1 は、運動方程式 $\partial u_1 / \partial t = -g \partial \zeta_1 / (\partial \xi)$ に式 (7) を代入し次式を得る。

$$u_1 = -i \frac{g}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \xi^n] e^{-i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (11)$$

2.5 界面の変動量

界面の変動量 ζ_2 は、連続の式 $-b \partial \zeta_2 / \partial t + h_1 \partial (u_1 b) / (\partial \xi) = 0$ に式 (11) を代入し、次式を得る。

$$\zeta_2 = \frac{h_1 g}{\sigma^2 l} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [(\xi^n - \beta \xi^{n-1}) a_n] \right\} e^{-i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (12)$$

2.6 下層の水粒子速度

下層の水粒子速度 u_2 は、運動方程式 $\partial u_2 / \partial t = -g \{ \partial \zeta_1 / (\partial \xi) + (\Delta \rho / \rho) \partial \zeta_2 / (\partial \xi) \}$ に式 (7), (12) を代入し、次式を得る。

$$u_2 = -i \frac{g}{\sigma} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\xi^n + n(n-1) \frac{(\Delta \rho / \rho) g h_1}{\sigma^2 l^2} \xi^{n-2} - n \beta \xi^{n-1} \right) a_n \right] \right\} e^{-i\sigma t} \quad \dots\dots\dots (13)$$

3. 結果と考察

3.1 モード周期

(1) $h_2 = \text{const.}$ であれば、式 (3) は定係数線形二次微分方程式となり、解析解が容易に求まる。このときのモード M の角周波数 σ_M は

$$\frac{\sigma_M l}{\sqrt{(\Delta \rho / \rho) g h_0}} = \frac{\pi M}{\sqrt{1 + \delta}} \left\{ 1 + \left(\frac{\beta}{2\pi M} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (14)$$

(2) 図-2 は、 $\beta = 0, \pm 3, \pm 5, \delta = 1.0, \gamma = 0 \sim 1.0$ の条件の下で、モード 1, 2 ならびに 3 の角周波数を 2.2 に従って求めたものである。この際式 (6) で級数項をいくつまで取るかが問題となる。例えば $\beta = 0, \delta = 1, \gamma = 0$ として、式 (6) の a_n 値を求めると、 $a_1 = 6$ として $a_2 = 0, a_3 = -2\nu^2, a_4 = 0$ となり、これより $\nu = 1.732$ を得る。一方、式 (14) 式からモード 1 の ν を求めると、2.221 となり、前者の精度は良くないことが分る。

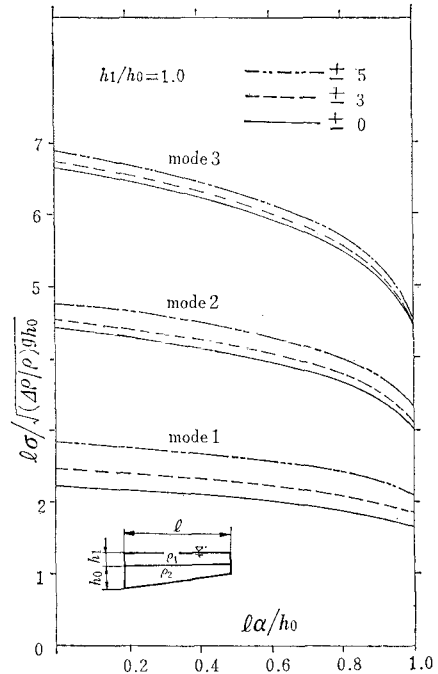


図-2 傾斜底水域における水路幅 ($b = b_0 e^{-\beta x/l}$) 変化の二層界面静振の共振周期

表-1 式 (6) の精度 (ν の値)

	$\beta = 0, \gamma = 0, \delta = 1.0$			$\beta = 5, \gamma = 0, \delta = 1.0$		
モード M	1	2	3	1	2	3
式 (14) より	2.221	4.443	6.664	2.839	4.782	6.895
式 (6) より 100 項まで	2.222	4.443	6.664	2.841	4.782	6.895

図-2 は式 (6) で 100 項までを数値計算した結果で、表-1 に計算精度の一部を示す。これによると、モード 1 以外は 4 桁まで正しいことが分る。

$\gamma=0$ すなわち、水深が一定な水域でのモード周期は、 β の絶対値が等しければ等しくなる。このことは式(14)によらなくても容易に想像できる。では $\gamma \neq 0$ のときはどうであろうか。図-2 から分るように、この場合にもモード周期は β の絶対値が等しければ等しい。すなわち水深変化がモード周期におよぼす影響と幅変化がモード周期におよぼす影響とは互に独立していると言える。このことから、水深と幅が共に変る水域での二次元二層界面静振のモード周期は、幅が一定で水深のみが変る水域でのモード周期に、水深が一定で幅のみが変ることによるモード周期の変化率を掛け合すことにより求めることができる。

水深が一定、幅が指数関数的に変ることによる界面静振の角周波数の変化率は式(14)より

$$\left\{1 + \left(\frac{\beta}{2\pi M}\right)^2\right\}^{1/2}$$

で、

① 上下層の水深比 δ に関係なく、表面静振のそれ²⁾と一致する。

② β が大きいほど、またモードが低いほど大きい。

3.2 表面と界面の振動振幅ならびに上下層の水粒子速度

(1) $h_2=h_0$ と一定であれば、式(3)より解析解として次式を得る。

[表面と界面の変動量 ξ_1, ξ_2]

$$\xi_1 \sim -\frac{2l}{\sqrt{(2\pi M)^2 + \beta^2}} e^{\beta \xi/2} \cos(\pi M \xi + \theta) e^{-i\omega t} \dots\dots\dots (15)$$

$$\xi_2 \sim \frac{1+\delta}{\delta(\Delta\rho/\rho)} \frac{2l}{\sqrt{(2\pi M)^2 + \beta^2}} \times e^{\beta \xi/2} \cos(\pi M \xi + \theta) e^{-i\omega t} \dots\dots\dots (16)$$

ここに、

$$\theta = \tan^{-1} \{ \beta / (2\pi M) \}, \quad \delta = h_0/h_1$$

M : モード数 (1, 2, 3, ...)

[上下層の水粒子速度 u_1, u_2]

$$u_1 \sim -i \frac{g}{\sigma_M} e^{\beta \xi/2} \sin(\pi M \xi) e^{-i\omega t} \dots\dots\dots (17)$$

$$u_2 \sim i \frac{1}{\delta} \frac{g}{\sigma_M} e^{\beta \xi/2} \sin(\pi M \xi) e^{-i\omega t} \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 σ_M は式(14)と同じ。

図-3 は図中の条件の下で式(6)より σ_1 を求め、式(12)および式(13)を用いて、界面の振幅量を表わす無次元量 $a_1(\Delta\rho/\rho)\xi_2/l$ が $x=0$ で 1 とし、界面変動の振幅 ξ_2 および上下層流速の振幅 $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ をそれぞれ無次元化し、これらの水域縦断分布を示したもので、これらは、また式(16), (18) から容易に求めることができる。これより次のことが分る。

① ξ_2 が 0 となる位置は水域幅の広い方に移る。移

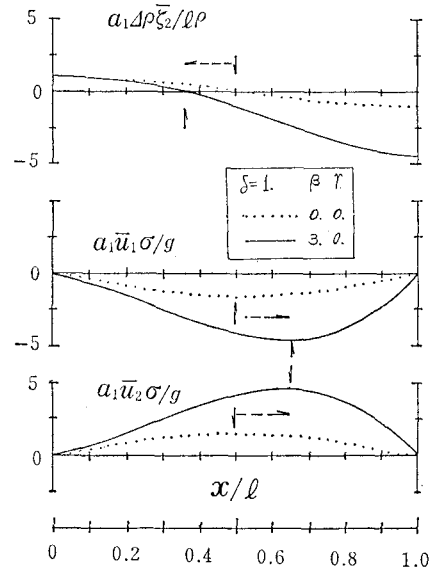


図-3 水深が一定、幅が exponential curve で変化する水域での界面静振による界面および上下層流速の振動振幅(モード 1)

動量は β が大きいものほど、またモードが低いものほど大きい。

② ξ_2 が最大となる位置は β には関係しない。

③ 水域両端での界面の振動振幅比はモードに関係なく $e^{\beta/2}$ である。

④ 上下層の流速比は、水深変化や幅変化に関係なく、上下層の層厚比に反比例する。

⑤ $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ のおのおのが最大となる位置は、水域幅の狭い方に移る。移動量は β が大きいものほど、またモードが低いものほど大きい。

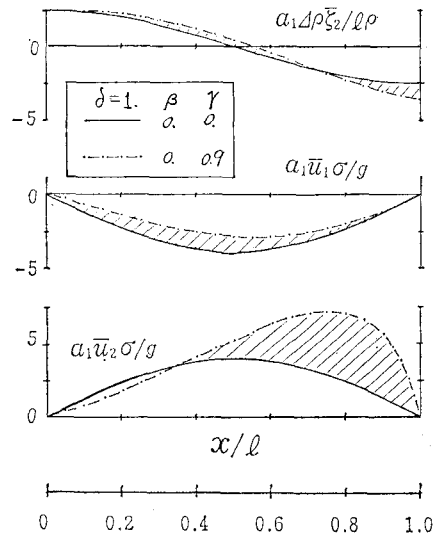


図-4 幅が一定、水深が一樣に変化する水域での界面静振による界面および上下層流速の振動振幅(モード 1)

- ⑥ $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ が 0 となる位置は β に関係しない。
 ⑦ $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ の最大値は β が大きいものほど大きい。
 水域幅が一定で水深のみが一樣に変る水域における界面静振は、水深変化が大きいものほど (図-4)。

- ① 水域両端での界面の振動振幅比は大きくなる。
 ② $\bar{u}_1$ の最大値は小さくなる。
 ③ $\bar{u}_2$ の最大値は大きくなる。

さらに水域幅が変ることによって上記諸量はどのようなのか、結果は 図-5 の斜線で示したように、 β が大きくなるほど三者ともその変化量は増大する。とくに幅が狭くなり、かつ水深が浅くなるような水域での下層の最大流速は幅ないし水深のみが変る水域でのものよりも非常に大きくなる事が分る。

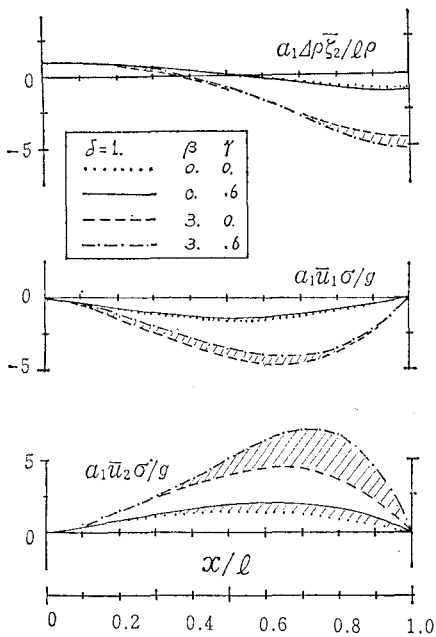


図-5 幅変化に伴う水深変化による各諸量の変化量

4. 二次元二層界面長波の相似則

地形の類似した2ヶ所の水域における界面長波の比較または模型実験を行なう上で重要な二次元二層界面長波の相似則を導いておく。

模型縮尺比の諸量を次の記号で表わす。

- λ_H : 水平方向の長さ
 λ_V : 鉛直方向の長さ
 λ_ρ : 下層流体の密度
 $\lambda_{\Delta\rho}$: 上下層流体の密度差
 λ_T : 時間

これらの記号を用いて式 (1) の第1項および第2項の原型に対する模型の比を求めると

$$\left. \begin{aligned} \text{第1項} &= \frac{1}{\lambda_H} \left\{ \frac{1}{\lambda_H} \frac{1}{\lambda_H} \left(\frac{\lambda_H}{\lambda_H} \frac{\lambda_V}{\lambda_H} \right) \right\} = \lambda_V \lambda_H^{-3} \\ \text{第2項} &= \frac{1}{\lambda_{\Delta\rho}/\lambda_\rho} \frac{\lambda_V}{\lambda_V} \frac{\lambda_V}{\lambda_H \lambda_T^2} = \lambda_\rho \lambda_{\Delta\rho}^{-1} \lambda_H^{-1} \lambda_T^{-2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

模型と原型とが相似であるためには上記二項が等しくなくてはならない。すなわち

$$\lambda_T = \lambda_\rho^{1/2} \lambda_{\Delta\rho}^{1/2} \lambda_H \lambda_V^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (20)$$

これより

① 水平方向と鉛直方向の幾何学的縮尺比を異にした歪み模型が可能である。

② 模型に使用する上下層流体の密度は原型のそれに関係なく自由に選定することができる。

ただし、これらは流体が上下層で Mixing するような現象には適用できない。

5. 結 言

幅および水深が共に変る水域での二次元二層界面長波の基本式は式 (1) で表わされ、界面長波の相似則は式 (20) となる。また、幅が指数関数的に、水深が直線的に変る水域での二次元二層界面長波の基本式は式 (3) で表わされ、界面静振による表面、界面の変動および上下層の水粒子速度はそれぞれ式 (7), (11), (12) および (13) で表わされる。これらのことから二次元二層界面長波および界面静振に関して次の事項が明らかになった。

二次元二層界面長波に関しては

- ① 水平方向と鉛直方向の幾何学的縮尺比を異にする歪模型が可能である。
 ② 模型に使用する上下層の流体の密度は原型のそれとは関係なく選ぶことができる。

水深一定、幅のみが一樣に変る水域での二次元二層界面静振に関しては

- ③ 界面の変動が0となる位置は幅の広い方に移る。変動量の最大は幅の狭い方の水域端で生じる。
 ④ 上層および下層の流速が最大となる位置は一致し、これらは幅の狭い方で生じる。

⑤ モード周期は表面波の静振のモード周期において重力 g を $\Delta\rho/\rho g$ 、水深を $h_0 h_1/(h_0 + h_1)$ で表わせばよい³⁾。

水深、幅とも変る水域での二次元二層界面静振については

⑥ モード周期は幅が一定で水深のみが変る水域でのモード周期に水深が一定で幅のみが変ることによるモード周期の変化率を掛け合せばよい。

⑦ 幅一定、水深のみが変ることによる界面変動量および上下層流速の変化量は、さらに幅が変るとより増幅される。とくに下層の流速は増幅量が大きい。

参 考 文 献

- 1) 木村晴保・綿貫 啓: 一様傾斜底水域における二次元二層界面静振, 第27回海講論文集, pp. 70~74, 1980.
 - 2) 前出 1).
 - 3) 木村晴保: 2次元水槽における二層界面長波——特に界面静振について——, 水産工学研究所報告第1号, pp. 45~54, 1980.
-