

移流分散現象と考えた海岸地下水における 塩水侵入過程の解析

岩 崎 敏 夫*・江 塚 利 幸**

1. はじめに

海岸付近の地下水塩水化について、これまで多くの研究がなされ、準一様と仮定した場合の水平不透水層上の定常塩水楔理論は完成され¹⁾、現地への適用も報告されている²⁾。また、その非定常過程の解析も、嶋³⁾等によって行われている。

一方、この問題を塩分の移流分散現象として扱った解析が、Segol・Pinder and Gray⁴⁾等によって報告されている。この方法の利点は次のようなものであると考えられる。① 淡・塩が混合するという実際現象に即した方法である。② 不透水層が急傾斜の場合など、準一様流の仮定ができない場合にも適用できる。③ 非定常過程の解析が可能である（嶋の方法は、淡水流出部の幅をパラメータとしたもので、現場への適用は難しいと思われる）。④ 流況が同時に計算される。

しかし、これまでに報告されたこの方法による解析では、分散係数の与え方があいまいであり、しかも実験と比較した例がない。この現象は移流が卓越すると考えられるが、移流分散方程式の数値解は、移流が卓越する場合には不安定となってしまう。本論では、まず、移流分散方程式の有限要素解について検討を加えた。次に、この問題を、Segol・Pinder and Grayと同様の手法で解析し、実験との比較により、分散係数を評価することを試みた。

2. 移流分散方程式の解についての検討

本解析では、複雑な境界条件の場合にも適用できることを考えて、有限要素法を用いる。まず、特に移流が卓越する場合の移流分散方程式の有限要素解について、安定性および誤差を検討する。

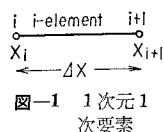
(1) 定 式 化

1次元移流分散方程式(1)を考える。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

(1) 式を、空間方向には重み付き残差法による離散化、

時間方向には差分法による離散化を行なう。図-1のような1次要素を用い、(2)式のような試行関数を仮定する。



$$c = \sum_{j=1}^2 c_j L_j \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= (x_{i+1} - x) / (x_{i+1} - x_i), \\ L_2 &= (x - x_i) / (x_{i+1} - x_i) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

(1) に重み付き残差法を適用すると、 w_i を重み関数として、

$$\sum_{j=1}^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(D c_j \frac{d^2 L_j}{dx^2} - u c_j \frac{d L_j}{dx} - L_j \frac{d c_j}{dt} \right) w_i dx = 0 \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$w_i = L_i$ とすれば、Galerkin 法であり、等間隔メッシュとすると、次式が得られる。

$$[B] d\{c\}/dt + [A]\{c\} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、

$$[B] = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [\bar{B}] = \frac{\Delta x}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} D/\Delta x - u/2 & -D/\Delta x + u/2 \\ -D/\Delta x - u/2 & D/\Delta x + u/2 \end{bmatrix}$$

$[\bar{B}]$ は整合マトリックス $[B]$ を集中化 (lumped) したマトリックスである。

次に、(5) 式を時間方向に差分法で離散化する。

$$[B][\{c\}_{t+\Delta t} - \{c\}_t]/\Delta t + [A][\{\epsilon\{c\}_{t+\Delta t} + (1-\epsilon)\{c\}_t\}] = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、次の4つの計算スキームを考える。

(S-1): (6) 式で $\epsilon=0$ とする。

(S-2): (6) 式で $\epsilon=0.5$ とする。

(S-3): (6) 式で $[\bar{B}]$ を用い、 $\epsilon=0$ とする。

(S-4): (6) 式で $[\bar{B}]$ を用い、 $\epsilon=0.5$ とする。

要素マトリックス方程式(6)を重ね合わせることにより、(7) 式のような差分式が得られる。

$$\frac{1}{6} \left[\frac{c_{i-1}^{n+1} - c_{i-1}^n}{\Delta t} + 4 \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_{i+1}^n}{\Delta t} \right] + u \left[\epsilon \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + (1-\epsilon) \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2\Delta x} \right]$$

* 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 (株)アイ・エヌ・エー新土木研究所

$$-D \left[\varepsilon \frac{c_{i+1}^{n+1} - 2c_i^n + c_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1-\varepsilon) \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

集中化マトリックス $[\tilde{B}]$ を用いた場合には、時間微分項が、 $(c_i^{n+1} - c_i^n)/\Delta t$ となる。従って、(S-3) は一般的な陽型スキーム、(S-4) は Crank-Nicholson 型の陰型スキームと同等である。また、(S-2) は Gel-fand-Lokutsievski 型のスキームである。

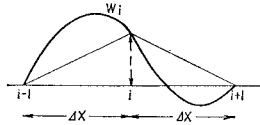


図-2 UPWIND Scheme の重み関数

次に、重み関数として (8) 式を考える⁵⁾(図-2)。

$$w_i = \begin{cases} L_i + \alpha F(x) & \text{for } (i-1) \text{ element} \\ L_i - \alpha F(x) & \text{for } (i) \text{ element} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$F(x)$ は、節点で 0 の正值関数で、 $\int_0^{\Delta x} F(x)dx = \Delta x/2$ を満たすものとする。

$$F(x) = -(3/(\Delta x)^2)(x-x_i)(x-x_{i-1}) \quad \dots (9)$$

とし、技巧的だが、(4) 式において時間微分項のみ $w_i = L_i$ とすると、(5) 式における $[A]$ は次のようになる。

$$[A] = \begin{bmatrix} D/\Delta x - (1-\alpha) \cdot u/2 & -D/\Delta x + (1-\alpha) \cdot u/2 \\ D/\Delta x - (1+\alpha) \cdot u/2 & D/\Delta x + (1+\alpha) \cdot u/2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (10)$$

この場合に導かれる差分式は、(7) 式において移流項を (11) 式のようにしたものである。

$$u \left[\varepsilon \frac{(1-\alpha)c_{i+1}^{n+1} + 2\alpha c_i^{n+1} - (1+\alpha)c_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + (1-\varepsilon) \frac{(1-\alpha)c_{i+1}^n + 2\alpha c_i^n - (1+\alpha)c_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $\alpha=1$ とすると、移流項に後退差分をとったことになる。これは、Upwind Scheme と呼ばれる。

(2) 安定性の検討

差分式 (7) から、Von Neuman の条件により安定性を検討する。この結果、陰型スキーム (S-2, S-4) は無条件安定、(S-1), (S-3) の安定条件はそれぞれ (12) 式、(13) 式のようになる。

$$12\mu^2(1-\cos \omega)^2 + 3\lambda^2 \sin^2 \omega \leq 4\mu(1-\cos \omega)(2+\cos \omega) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$4\mu^2(1-\cos \omega)^2 + \lambda^2 \sin^2 \omega \leq 4\mu(1-\cos \omega) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $\mu = D \cdot \Delta t / (\Delta x)^2$ 、 $\lambda = u \cdot \Delta t / \Delta x$ 、 $|\omega| \leq \pi$ である。

(3) 誤差の検討

次に、差分式 (7) の各項を $c_i^n = c(t, x)$ のまわりで Taylor 展開し、打ち切り誤差を評価する⁶⁾。その結果、1 次の誤差 (数値粘性項)、2 次の誤差 (数値分散項) は、表-1 のようになる。Upwind Scheme の数値粘性項は、 $(\alpha \cdot \Delta x / 2) u (\partial^2 c / \partial x^2)$ である。このため、Upwind

表-1 各スキームの誤差

Scheme	1 次の誤差 (数値粘性項)	2 次の誤差 (数値分散項)
S-1	$-\frac{\Delta t}{2} u^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$	$\left(\Delta t u D - \frac{\Delta t^2}{3} u^3 \right) \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}$
S-2	0	$\left(\Delta t u D - \frac{\Delta t^2}{6} u^3 \right) \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}$
S-3	$-\frac{\Delta t}{2} u^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$	$\left(\Delta t u D - \frac{\Delta x^2}{6} u - \frac{\Delta t^2}{3} u^3 \right) \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}$
S-4	0	$\left(\Delta t u D - \frac{\Delta x^2}{6} u - \frac{\Delta t^2}{6} u^3 \right) \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}$

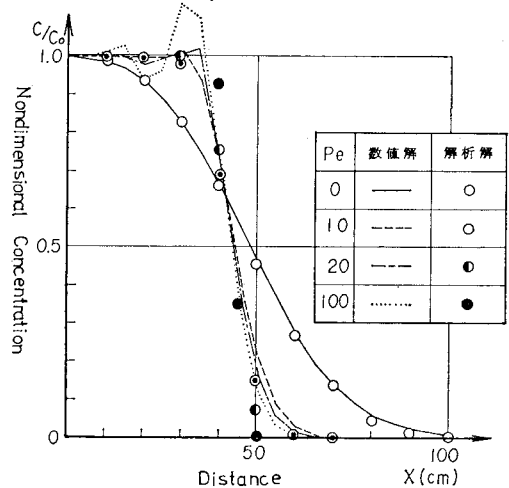


図-3 (S-2) scheme による解 ($t=720$ sec)
($u=0.06$ cm/s, $\Delta x=5$ cm, $\Delta t=60$ sec)

解析解:

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x-ut}{2\sqrt{Dt}} \right) + \frac{1}{2} e^{ux/n} \operatorname{erfc} \left(\frac{x+ut}{2\sqrt{Dt}} \right)$$

Scheme は、局所ペクレ数、 $Pe=(u \cdot \Delta x)/D$ が大きい (移流が卓越する) 場合にも安定は得られるが、誤差が大きくなり分散効果を正しく評価できない。集中化マトリックスを用いたスキーム (S-3, S-4) に現われる数値分散項 $[-(\Delta x \cdot u/6) u (\partial^3 c / \partial x^3)]$ は、 Pe が大きいほど大きく (負値) なり、この結果解の位相が遅れる。従って、整合マトリックスを用いた陰型スキーム (S-2) により最も良い解が得られると考えられる。図-3 は、一様流中の原点に連続源のある問題の種々の局所ペクレ数に対する (S-2) スキームによる解である。良好な解が得られるのは、 $Pe < 10$ 程度であることがわかる。この場合にも、時間に対して立ち上がり部分では、10% 程度の誤差が現われる。

3. 砂層モデルと実験の概要

本論で対象とするのは、2 次元砂層モデルである。実験水槽は図-4 に示すように、長さ 180 cm、幅 30 cm、深さ 60 cm の前面ガラス張り鋼製水槽である。滞水層は長さ 135 cm であり、媒体には、平均粒径 0.76 mm、

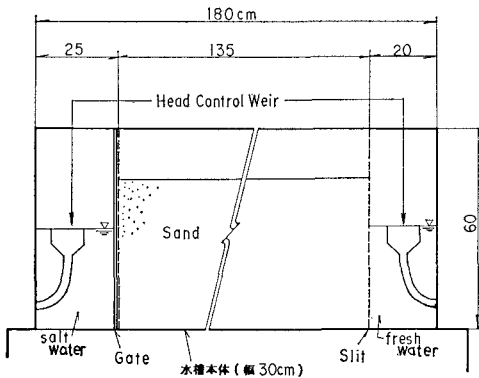


図-4 実験水槽

均等係数 1.27 のろ過砂を用いた。透水係数は $K=0.56$ cm/s, 空ゲキ率 $n=46\%$ であった。水槽裏側には採水用コックがあり, 採水用コックからは, ほぼ砂層中央部までしんちゅうパイプが伸びている。

実験は, 淡水位, 塩水位を設定し, 塩水側の Gate を開放した時を開始とし, その後の砂層内塩分濃度の測定, 淡・塩界面形状の観察を行なった。塩分濃度は, 採水用コックから約 10 ml 採水し, 後に硝酸銀滴定法により, 塩素イオン濃度 Cl^- として求めた。淡・塩界面は, 塩水に過マンガン酸カリウムを入れて着色しておき, その形状をスケッチした。塩水槽の濃度は 24% に保った。

4. 数値解析の方法

(1) 基本式

実験では自由水面を持つ流れであるが, 数値解析では図-5 のように, 被圧層に近似している。流れの場合は, 時間的に変化するが, 加速度項は非常に小さいと考え, また, 微小時間 Δt 内では流れは不変である, 即ち, $(u, v)_t$ により $(c)_{t+\Delta t}$ が決定されるものとする。

基本式は, 流れの場合について,

連続の式:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

運動の式 (Darcy-Kozeny):

$$u = -\frac{k}{\mu n} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{\mu n} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g \right) \quad (15)$$

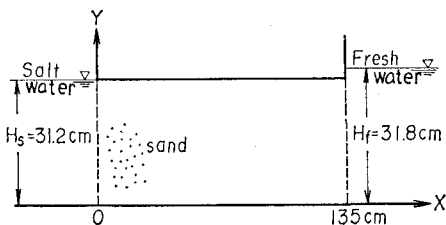


図-5 砂層モデル

ここで, k は媒体固有の透水係数, n は空ゲキ率である。

(15) 式を (14) 式に代入すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + g \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

塩分輸送については, 2 次元移流分散方程式を用いる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (17)$$

濃度 c は, 塩素イオン濃度 Cl^- (%) とし, c と ρ (密度) との関係は, 実験より求めた次式を用いる。

$$\rho = 1.000 + 0.00111 \text{Cl}^- \text{ (%) } \quad (18)$$

(2) 基礎式の定式化

空間方向には, 三角形 1 次要素により Galerkin 近似し, (17) 式の時間項は差分近似する。(16), (15), (17) 式の離散化式はそれぞれ次のようになる。

(16) 式に対して;

$$[AP]\{P\} = \{FP\} + \{GP\} \quad (19)$$

$$AP_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L_i}{\partial x} \frac{\partial L_j}{\partial x} + \frac{\partial L_i}{\partial y} \frac{\partial L_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$FP_i = g \int_{\Omega} L_i \left(\sum_{k=1}^3 \rho_k \frac{\partial L_k}{\partial y} \right) \alpha \Omega$$

$$GP_i = \int_{\Gamma} L_i \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma$$

ここで, Γ は $\partial P / \partial n$ が与えられる境界 (n は Γ に対する外向き法線) である。

(15)₁ 式に対して;

$$[AU]\{u\} = \{FU\} \quad (20)$$

$$AU_{ij} = \int_{\Omega} L_i L_j d\Omega$$

$$FU_i = -\frac{k}{\mu n} \int_{\Omega} L_i \left(\sum_{k=1}^3 P_k \frac{\partial L_k}{\partial x} \right) d\Omega$$

(15)₂ 式に対して;

$$[AV]\{v\} = \{FV\} \quad (21)$$

$$AV_{ij} = \int_{\Omega} L_i L_j d\Omega$$

$$FV_i = -\frac{k}{\mu n} \int_{\Omega} L_i \left(\sum_{k=1}^3 P_k \frac{\partial L_k}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$-\frac{k g}{\mu n} \int_{\Omega} L_i \left(\sum_{k=1}^3 \rho_k L_k \right) d\Omega$$

(17) 式に対して;

$$[AC][\{c\}_{t+\Delta t} - \{c\}_t] / \Delta t + [BC][\{\varepsilon\{c\}_{t+\Delta t} + (1-\varepsilon)\{c\}_t\}] = \{FC\} \quad (22)$$

$$AC_{ij} = \int_{\Omega} L_i L_j d\Omega$$

$$BC_{ij} = \int_{\Omega} \left[D_x \frac{\partial L_i}{\partial x} \frac{\partial L_j}{\partial x} + D_y \frac{\partial L_i}{\partial y} \frac{\partial L_j}{\partial y} + \sum_{k=1}^3 \left(u_k L_k \frac{\partial L_j}{\partial x} + v_k L_k \frac{\partial L_j}{\partial y} \right) \cdot L_i \right] d\Omega$$

$$FC_i = \int_{\Gamma} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} l_x + D_y \frac{\partial c}{\partial y} l_y \right) \cdot L_i d\Gamma$$

ここで, l_x, l_y は Γ に対する外向き法線の方向余弦で

ある。

(20), (21)式は集中化マトリックスを用いて陽に解く。(22)式は、最も良好な解の得られる整合マトリックスを用いた陰型スキームを用いる。計算は、まず、(19)式により圧力を求め、(20)式により流速 u を、(21)式により流速 v を求め、(22)式により Δt 後の濃度を求める。

(3) 境界条件

境界条件は、流れについては、塩水側、淡水側でそれぞれ静水圧分布とし、上下不透水面で $v=0$ ($\partial P/\partial y = -\rho g$) とした。濃度の境界条件は、塩水側で、淡水流出部では $\partial c/\partial n=0$ 、塩水侵入部では $c=c_s$ (塩水濃度)、上下不透水面で $\partial c/\partial n=0$ とした。なお、淡・塩水位、透水係数、塩水槽濃度は実験と同じ値を与えた。

5. 解析結果と考察

数値解析において、分散係数は $D_x=0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ 、 $D_y=0.0005 \text{ cm}^2/\text{s}$ とした。要素分割は、図-6 に示すように、要素数 220、節点数 132、時間メッシュは $\Delta t=120 \text{ sec}$ とした。計算された流速の最大は $u=0.02 \text{ cm/s}$ であり、この場合の局所ペクレ数は $Pe=10$ である。

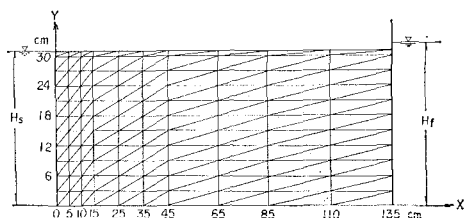


図-6 要素分割 (220 要素, 132 節点)

図-7 は塩分濃度分布の経時変化を示したものである。実験より求めた淡・塩境界面に比べて計算値の方が分散域が広いが、塩水侵入の経時変化をシミュレートできていると考えてよい。図-8 は同時に計算された流況のベクトル図である。120 分後では塩水楔先端部に循環流が生じているが、600 分後には二層流となっている。なお、実験においては 600 分後にはほぼ定常に達したが、数値解も 600 分後にはほぼ定常と考えられる。図-9 は鉛直方向濃度分布の経時変化を示したものである。やはり、実験に比べて計算の方が分散域が広いが、 $x=10 \text{ cm}$ では傾向はほぼ合っている。初期に実験とよく合わないのは、実験における Gate を開放した後の遅れ、計算における立ち上がり領域での誤差のためと考えられる。 $x=65 \text{ cm}$ では流速が小さく、数値計算で与えた分散係数は過大であると思われる。

以上から、本解析により塩水侵入過程が正確にシミュレートされたとは言えない点もあり、この結果から分散係数を正確に評価するのは困難であるが、次のことが言える。① 本モデルの場合、 x 方向の分散係数は 0.01

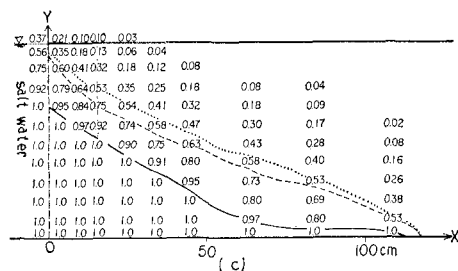
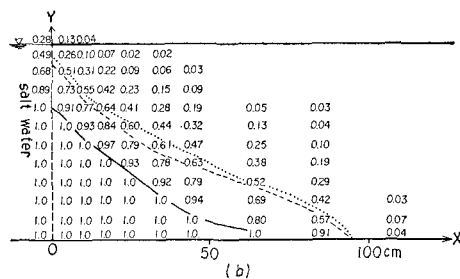
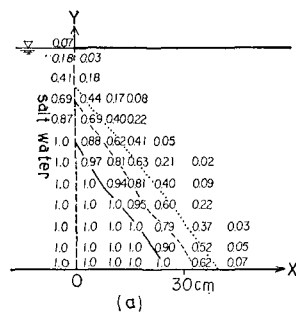


図-7 塩分濃度分布の経時変化

(a) 60 分後 (b) 360 分後 (c) 600 分後

数字: c/c_0 (計算値)

—: 1.0 等濃度線 (計算値)

.....: 0.5 等濃度線 (計算値)

---: 淡・塩界面 (実験)

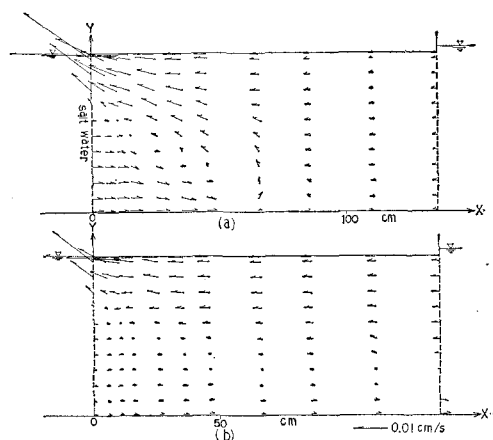
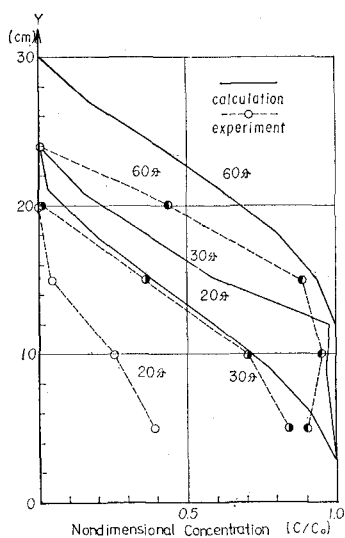
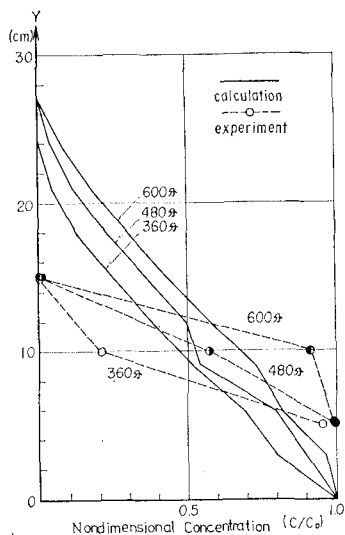


図-8 流況 (計算値)

(a) 120 分後 (b) 600 分後



(a)



(b)

図-9 鉛直方向濃度分布の経時変化

(a) $x=10$ cm (b) $x=65$ cm

cm^2/s 程度及至それ以下と考えられる。これは尾島⁷⁾等によって報告された値より小さな値である。② 本解析では分散係数一定としたが、流速の小さな領域で分散係数が過大と考えられる。これは、浸透層内の分散係数は流速の関数として与えられるべきもの⁸⁾だからである。

③ 実験に比べて、計算では y 方向の分散が大きく現われている。数値計算で生じる循環流がこの一因と考えられる。従って、果たして実際に循環流が生じているかどうか確信はもてない。

本論において、数値計算上問題として残るのは、流速場、濃度場を独立に（即ち、線形と考えて）解いたことによる誤差、移流が卓越する場合の移流分散方程式の FEM 解の、特に立ち上がり領域の誤差である。

6. おわりに

本論では、海岸地下水槽内での塩水の非定常侵入過程をシミュレートする手法について、今回特に実験を行なって、その適用性の可否や問題点を明らかにした。問題点は移流が卓越する場合の数値解という点に集約される。この点が克服されれば、この解析法は、不透水層が急勾配の場合、分散効果を見逃さない場合などの非定常解析に有効であると考えられる。

最後に、実験に協力して頂いた東北大学文部技官佐藤弘氏、同佐藤栄司氏、東北大学学生佐狐慎一氏（現佐藤鉄工）に感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 嶋 祐之：地下水（密度的諸問題），1971 年度水工学に関する夏期研修会講義集 A-8, 1971.
- 2) 福尾義照・柿沼忠男・岸 洋介・伊福 誠：那賀川河口における被圧地下水の塩水化について，第 27 回海岸工学講演会論文集，pp. 542~546, 1980.
- 3) Shima, S.: Transient characteristics of salt-water wedge, 13th Cong., IAHR, D-46, pp. 433~440, 1969.
- 4) Segol, G., G. F. Pinder and W. G. Gray: A Galerkin-Finite Element Technique for calculating the transient position of the salt-water front, Water Resources Research, Vol. 11, No. 2, pp. 343~347, 1975.
- 5) Heinrich, J. C., P. S. Huyakorn and O. C. Zienkiewicz: An 'UPWIND' Finite Element Scheme for two dimensional convective transport equation, Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 11, pp. 131~143, 1977.
- 6) 例えば、矢嶋信男・野木達夫：発展方程式の数値解析，岩波書店，1977.
- 7) 尾島 勝・鎌田義人・板東敏雄：不正滞水層への塩分侵入に対する揚水および護岸矢板の効果に関する実験的研究，第 27 回海岸工学講演会論文集，pp. 537~541, 1980.
- 8) Harleman, D. R. F. and R. R. Rumer: Longitudinal and lateral dispersion in an isotropic porous media, J.F.M., Vol. 16, pp. 385~394, 1963.