

急勾配任意断面斜面による波の反射の 厳密解の構成法とその応用

清 川 哲 志*・小 林 浩**

要 旨： 自由表面上の境界条件が、線型化できるていどに急勾配で、かつ、任意断面の斜面による微小振幅波の反射・散乱を、基礎方程式である2次元ラプラス方程式の境界値問題としてとらえ、この厳密解の構成法を示す。

1. はじめに

本研究は、2次元任意断面斜面による波の反射・散乱の問題を理論的にとりあつたものであるが、従来、任意断面を解析的にとりあつかう方法としては、グリーン関数¹⁾、あるいは、グリーン関数の公式²⁾を用いた積分方程式法、また、有限要素法³⁾など、数値解析的手法しかなかった。著者らは前報⁴⁾で、近似計算ではあるが、これらの方法とはことなつた解析手法“境界選点法”を示し、一様勾配斜面による重複波圧分布の問題に適用した。これは斜面境界条件以外の境界条件と、基礎方程式を満たす一般解を、固有関数の重ね合せで表わし、斜面境界条件を斜面上にとつた有限個の選点で満足するように、一般解中の未定係数を決定するものであつた。本論文は、この考えを発展させ、一般解を用いて表わした斜面境界条件を固有関数で展開し、斜面上の任意の点で斜面境界条件を満足させる方法を示したものである。ここで得られる解は、すべての境界条件と基礎方程式を満たしており、厳密解である。

2. 基礎方程式と一般解

座標系を図-1に示す。入射波は x の正の方向から負の方向へ進行し、斜面 Γ で反射・散乱するものとする。また、流体は非粘性・非圧縮性とし、運動は非回転とする。

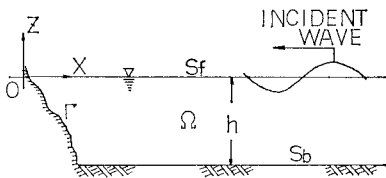


図-1 座標系の定義

る。このとき、速度ポテンシャルが存在し、流体運動はこれに支配される。この速度ポテンシャルを線型理論によって求める。すなわち、入射波を微小振幅波とし、斜面 Γ は、これによって反射・散乱した波の、自由表面条件が線型化できるていどに急勾配であるとする。場の速度ポテンシャルは、入射波の速度ポテンシャル ϕ_{in} と、反射・散乱波の速度ポテンシャル ϕ_{sc} の和として表わすことができ、 ϕ_{in} は既知である。

定常波動を考え、速度ポテンシャルをつぎのようにおく。

$$\Phi(x, z, t) = \frac{gH_0}{2\omega} (\phi_{in}(x, z) + \phi_{sc}(x, z)) e^{i\omega t} \quad \dots (1)$$

ここで、入射波のポテンシャル関数 $\phi_{in}(x, z)$ は次式のごとく表わされる。

$$\phi_{in}(x, z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{ikx} \quad \dots (2)$$

ここに、 H_0 : 入射波高、 ω : 入射波の角速度、 g : 重力加速度、 h : 水深、 k : 波数 ($\equiv 2\pi/L$, L : 波長) である。

未知ポテンシャル $\phi_{sc}(x, z)$ の満たすべき基礎方程式と境界条件は以下のものである。

$$\nabla^2 \phi_{sc} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad \dots (3)$$

$$\partial \phi_{sc} / \partial z - (\omega^2/g) \phi_{sc} = 0 \quad (\text{on } S_f) \quad \dots (4)$$

$$\partial \phi_{sc} / \partial z = 0 \quad (\text{on } S_b) \quad \dots (5)$$

$$\partial \phi_{sc} / \partial n = -\partial \phi_{in} / \partial n \quad (\text{on } \Gamma) \quad \dots (6)$$

ここに、 n は斜面 Γ 上の法線方向距離である。

基礎方程式 (3) および境界条件 (4), (5) を満たし、かつ、無限遠方で有限な反射波となる解は、固有関数の重ね合せにより、つぎのような級数形で表わすことができる⁵⁾。

$$\phi_{sc}(x, z) = \left\{ a_0 \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-ikx} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} e^{-k_n x} \right\} \quad \dots (7)$$

ここに、 k_n : 固有値 ($k_n \tan k_n h = -\omega^2/g$ の実正根) である。

上式で右辺第1項は反射波を、第2項の無限級数は斜面近傍のみ存在し、遠方へ行くと急激に減衰する散乱波を、それぞれ表わしている。また、 a_n ($n=0, 1, \dots$) は

* 正会員 清水建設(株) 研究所 海洋研究部
** 正会員 Eng. Sc. D. 清水建設(株) 研究所 主席研究員

複素未定係数であり、これらは式 (7) が斜面上での不透過条件 (6) を満足するように決定される。

3. 斜面境界条件の固有関数による展開

境界条件 (6) 中の法線方向微分 $\partial/\partial n$ は、単位法線ベクトルの x, z 成分 n_x, n_z を用いて、つぎのようにかくことができる。

$$\frac{\partial}{\partial n} = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (8)$$

反射・散乱波の速度ポテンシャルの一般解 (7) を、それぞれ x, z で偏微分し、式 (8) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{sc}}{\partial n} &= \frac{k e^{-ikx}}{\cosh kh} \{-in_x \cosh k(h+z) \\ &\quad + n_z \sinh k(h+z)\} a_0 \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n e^{-k_n x}}{\cos k_n h} \sin(k_n(h+z) + \beta) a_n \\ &\quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

となる。ただし、 β は、 $\beta = \tan^{-1}(n_z/n_x)$ によって定義される角度で、法線ベクトル n が x 軸となす角を α とすると、 $\beta = \pi/2 - \alpha$ の関係がある (図-2 参照)。

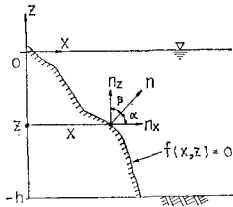


図-2 説明図

入射波の速度ポテンシャル ϕ_{in} についても同様に、それぞれ x, z で偏微分し、式 (8) に代入する。ついで、これと式 (9) を境界条件 (6) に代入すると、

$$\begin{aligned} &\frac{k e^{-ikx}}{\cosh kh} \{-in_x \cosh k(h+z) + n_z \sinh k(h+z)\} a_0 \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n e^{-k_n x}}{\cos k_n h} \sin(k_n(h+z) + \beta) a_n \\ &= \frac{-k e^{-ikx}}{\cosh kh} \{in_x \cosh k(h+z) \\ &\quad + n_z \sinh k(h+z)\} \quad (\text{on } \Gamma) \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

となる。

一般に、斜面形状は $f(x, z) = 0$ ($-h \leq z \leq 0$) と表わされるので、 x が z に対して一意に決まるとき (通常はすべてこの場合にあてはまる)、 n_x, n_z, x などは、いずれも z の 1 価関数として表わすことができる (図-2 参照)。したがって、これを考慮すれば、式 (10) の両辺は斜面上で z のみの関数とみなすことができ、境界条件 (6) が斜面上の任意の点で成りたつということは、式 (10) が、 $-h \leq z \leq 0$ なる任意の z に対して成りたつということに等しい。

ここで、

$$F_n(z) = \begin{cases} \frac{k e^{-ikx(z)}}{\cosh kh} \{-in_x(z) \cdot \cosh k(h+z) \\ \quad + n_z(z) \sinh k(h+z)\} & (n=0) \\ -\frac{k_n e^{-k_n x(z)}}{\cos k_n h} \sin(k_n(h+z) + \beta(z)) & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \dots\dots\dots (11)$$

$$G(z) = -\frac{k e^{ikx(z)}}{\cosh kh} \{in_x(z) \cdot \cosh k(h+z) + n_z(z) \sinh k(h+z)\} \dots\dots\dots (12)$$

とおくと、式 (10) は、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z) = G(z) \dots\dots\dots (13)$$

と表わされる。また、 $-h \leq z \leq 0$ で定義された z の任意の関数は、固有関数で展開できるので、式 (13) の両辺もそれぞれつぎのように展開することができる。

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z) = b_0 \cosh k(h+z) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos k_n(h+z) \\ \dots\dots\dots (14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(z) = c_0 \cosh k(h+z) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos k_n(h+z) \\ \dots\dots\dots (15) \end{cases}$$

ただし、 b_m, c_m ($m=0, 1, \dots$) はフーリエ係数で、以下のようなものである。

$$\begin{cases} b_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-h}^0 F_n(z) \cosh k(h+z) \\ \quad + z) dz \int_{-h}^0 \cosh^2 k(h+z) dz \\ b_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-h}^0 F_n(z) \cos k_m(h+z) \\ \quad + z) dz \int_{-h}^0 \cos^2 k_m(h+z) dz \quad (m=1, 2, \dots) \\ c_0 = \int_{-h}^0 G(z) \cosh k(h+z) dz \int_{-h}^0 \cosh^2 k(h+z) dz \\ c_m = \int_{-h}^0 G(z) \cos k_m(h+z) dz \int_{-h}^0 \cos^2 k_m(h+z) dz \quad (m=1, 2, \dots) \end{cases} \dots\dots\dots (16)$$

式 (10) あるいは式 (13) が、 $-h \leq z \leq 0$ なる任意の z に対して成りたつためには、固有関数展開した各次数の係数が等しくなければならない。

したがって、式 (16) より、

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-h}^0 F_n(z) \cosh k(h+z) dz \\ &= \int_{-h}^0 G(z) \cosh k(h+z) dz \dots\dots\dots (17) \\ &\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-h}^0 F_n(z) \cos k_m(h+z) dz \end{aligned}$$

$$= \int_{-h}^0 G(z) \cos k_m(h+z) dz \quad (m=1, 2, \dots)$$

.....(18)

を得る。

式 (17), (18) を行列表示すると、つぎのようになる。

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1i} & \cdots \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ B_{i1} & B_{i2} & \cdots & B_{ii} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_i \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \dots\dots(19)$$

ただし、行列の要素 B_{ij} およびベクトルの要素 γ_i は、次式で表わされる。

$$B_{ij} = \begin{cases} \int_{-h}^0 F_{j-1}(z) \cosh k(h+z) dz & (i=1, j \geq 1) \\ \int_{-h}^0 F_{j-1}(z) \cos k_{i-1}(h+z) dz & (i \geq 2, j \geq 1) \end{cases}$$

.....(20)

$$\gamma_i = \begin{cases} \int_{-h}^0 G(z) \cosh k(h+z) dz & (i=1) \\ \int_{-h}^0 G(z) \cos k_{i-1}(h+z) dz & (i \geq 2) \end{cases}$$

.....(21)

式 (17), (18) あるいは式 (19) は、未定係数 a_n ($n=0, 1, \dots$) が満たすべき無限次元複素係数連立 1 次方程式である。一般解 (7) における固有関数列は、収束級数をなすので、これらを適当な n について解けば、未定係数が定まる。そして、以上の展開の過程から明らかのように、得られた a_n を用いた式 (7) は、基礎方程式とすべての境界条件を満足する解である。

4. 未定係数の決定 (最小 2 乗法の適用)

さて、具体的に a_n ($n=0, 1, \dots$) を決める方法であるが、反射・散乱波の速度ポテンシャル ϕ_{sc} の一般解 (7) において、無限級数を有限項数 n で近似すると、境界条件の展開式 (13) は、

$$\sum_{n=0}^n a_n F_n(z) \simeq G(z) \quad \dots\dots(22)$$

となる。一方、斜面上の境界条件 (6) を満たすためにはこの両辺を固有関数で展開した場合に、各次数の係数が等しくなる必要がある点は同じである。 N 個の未知数を決めるためには、 N 本の条件式があれば良いわけであるから、すべての次数における係数が等しくなるようにすると条件過多となる。このために、条件式 (17), (18) などの中から適当に N 本の条件式を選択することが考えられるが、これによると、得られた a_n を各条件式に代入した場合、選択した条件式は満たすが、その他の条件式については、一般に残差が生じることになる。ここでは、一般解 (7) の展開項数を n で打切ったために、各条件式に対して生じる残差の平方和を最小にする、最小

2 乗法による未定係数の決定について示す。

残差 ε_m ($m=0, 1, \dots$) および残差平方和 I は次式で定義される。

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \sum_{n=0}^n a_n \int_{-h}^0 F_n(z) \cosh k(h+z) dz \\ \quad - \int_{-h}^0 G(z) \cosh k(h+z) dz \\ \varepsilon_m = \sum_{n=0}^n a_n \int_{-h}^0 F_n(z) \cos k_m(h+z) dz \\ \quad - \int_{-h}^0 G(z) \cos k_m(h+z) dz \quad (m=1, 2, \dots) \end{cases}$$

.....(23)

$$I = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^2 \quad \dots\dots(24)$$

したがって、残差平方和を最小にする条件 $\partial I / \partial a_n = 0$ ($n=0, 1, \dots, n$) より、つぎの未定係数 a_n ($n=0, 1, \dots, n$) に関する複素係数連立 1 次方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \quad \dots\dots(25)$$

ただし、行列の要素 A_{ij} 、およびベクトルの要素 α_i は次式で表わされる。また、 $N=n+1$ である。

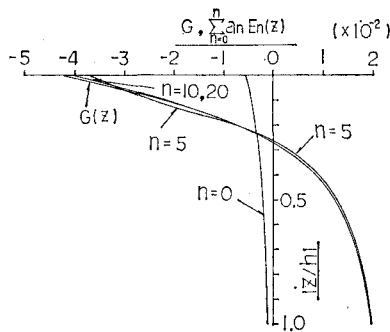
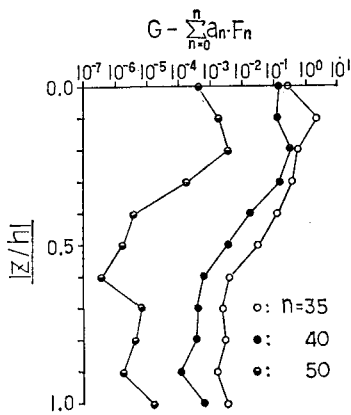
$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{-h}^0 F_{i-1}(z) \cosh k(h+z) dz \\ &\quad \times \int_{-h}^0 F_{j-1}(z) \cosh k(h+z) dz \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-h}^0 F_{i-1}(z) \cos k_m(h+z) dz \\ &\quad \times \int_{-h}^0 F_{j-1}(z) \cos k_m(h+z) dz \quad \dots\dots(26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \int_{-h}^0 G(z) \cosh k(h+z) dz \\ &\quad \times \int_{-h}^0 F_{i-1}(z) \cosh k(h+z) dz \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-h}^0 G(z) \cos k_m(h+z) dz \\ &\quad \times \int_{-h}^0 F_{i-1}(z) \cos k_m(h+z) dz \quad \dots\dots(27) \end{aligned}$$

5. 数値計算による検討

図-3 は、一様勾配斜面について式 (10) の右辺、すなわち式 (12) で表わされる $G(z)$ と、これを固有関数展開した場合の式 (15) を、展開項数を変えて比較した 1 例である。縦軸に無次元水深、横軸に関数値をとっている。この図に見るように、この場合 10 項でいって十分にもとの関数を近似できることがわかる。

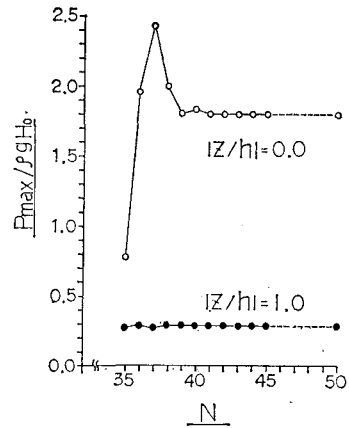
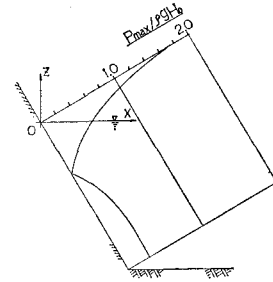
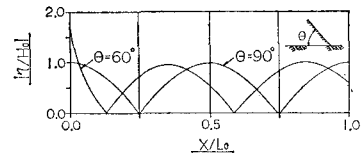
反射・散乱波の一般解 (7) は、斜面境界条件 (6) 以外の境界条件と基礎方程式を満たしていることは、すでに述べたとおりである。したがって、本解析法によって得られる解の精度を見るには、斜面境界条件 (6) をどのて


 図-3 $G(z)$ の固有関数展開による近似

 図-4 残差分布の1例 ($\sigma^2 h/g=0.24$, $\theta=60^\circ$)

いど満たしているかを調べれば良い。図-4 は、境界条件 (6) における残差の鉛直分布の 1 例を、展開項数 $n=35, 40, 50$ の場合について示したものである。これより $n=50$ とすれば、残差は最大で 10^{-3} のオーダー、すなわち、流速にして mm/sec のオーダーとなることからわかる。もちろん、これは本来 0 となるべきものであるが、このていどであれば実用上十分な解であるといえよう。

実際に、展開項数による収束の様子を、斜面波圧を例にとって示すと、図-5 のようになる。これは、平均水面および海底面における斜面上の無次元化波圧を、展開項数を変えて求めたものである。この図に示した例では、展開項数 41 で収束していることがわかる。この例からも、斜面境界条件 (6) の残差のオーダーが 10^{-3} ていどになれば、波圧値などは実用上十分な精度で求められることが示された。

このときの斜面上の波圧分布を図-6 に、また、重複波形を図-7 に示す。波圧分布の特徴として、 $|z/h|=0.35$ の位置に波圧が 0 となる節があり、波圧の最大値は平均水面の位置に生じていて、入射波高の約 1.7 倍となっている点をあげることができる。鉛直壁による完全重複波の最大波圧値は入射波高と同じになるから、これは重複


 図-5 展開項数と波圧の収束 ($\sigma^2 h/g=2.24$, $\theta=60^\circ$)

 図-6 斜面重複波の波圧分布の1例 ($\sigma^2 h/g=0.24$, $\theta=60^\circ$)

 図-7 斜面重複波の1例 ($\sigma^2 h/g=2.24$, $\theta=60^\circ$)

波形に見られるように、斜面によって重複波の波高が増大したためと考えられる。図-7 中に $\theta=90^\circ$ として示したのは、鉛直壁によって生じる通常のリフレクトド波形であるが、 $\theta=60^\circ$ のときの斜面重複波をこれと比較してみると、斜面上で波高の増大および波長の短縮など、斜面重複波としての特徴があらわれているのがよくわかる。

以上、十分とはいえないが、本理論を斜面重複波の波圧分布、重複波形などに応用し、級数の展開項数と収束の関係、斜面境界条件における残差などについて基本的な検討を行った結果について述べた。

なお、ここで行った検討では、計算時間の節約などのため、未定係数の決定は最小 2 乗法によらず式 (19) から直接求めた。また、連立方程式の係数およびベクトルの要素を求める際にあらわれる式 (20), (21) などの積分

は関数値を水深方向に 50 等分してシンプソン法による数値積分によって求めた。

6. あとがき

以上、著者らは本論文において、急勾配斜面による微小振幅波の反射・散乱の問題の厳密解を構成する方法として境界展開法を示した。これは、まず、斜面境界条件以外の境界条件と基礎方程式を満たす一般解を、固有関数の重ね合せによる無限級数の形で求め、つぎに、斜面境界条件にこの一般解を代入した後に、ふたたび固有関数で展開することによって、一般解中の未定係数が満たすべき複素係数連立 1 次方程式を導き、これから得られる未定係数を一般解に代入して、斜面境界条件を満足する解を求めるものである。

本論文で示した“境界展開法”は、斜面境界条件が斜面上において鉛直座標 z に関しての恒等式として表現できることと、 $-h \leq z \leq 0$ で定義された z の任意の関数が固有関数で展開できることに基礎を置いて導びかれたものであり、理論展開の過程から明らかなように、任意断面斜面に適用可能であるが、紙数の都合上、種々の断面

形状に対する適用例について言及することができなかった。これについては、今後引き続き検討を進めていくつもりである。

おわりに、本研究における数値計算について清水建設(株) 研究所 大山 巧氏の協力を得たことを記して謝意を表するしだいである。

参 考 文 献

- 1) 日野幹雄・藤崎治男：固定された海上構造物による波の反射と透過，第 20 回海岸工学講演会論文集，pp. 101~106, 1973.
- 2) 井島武士・吉田明徳・山本督夫：任意断面浮体の 2 次元係留運動と波の変形，土木学会論文報告集，第 272 号，pp. 53~63. 1978.4.
- 3) Visser, W. and van der Wilt: A numerical approach to the study of irregular ship motions, Finite Elements in Fluids, Vol. 1, pp. 233~249, John Wiley & Sons, London, 1975.
- 4) 清川哲志・小林 浩：微小振幅波理論を用いた斜面波圧の解析，第 35 回土木学会年次学術講演概要集，II-17, pp. 33~34, 1980.
- 5) 井島武士：最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用，1971 年度水工学に関する夏期研修会講義集 B コース，B-1, 1971.