

スペクトル時系列の統計解析

広瀬 宗一*・高橋 智晴**

1. はじめに

近年、観測データの質の向上と共に、データの処理手法についても種々の観点から研究が進み、波浪の統計的性質をはじめ、複雑な波浪特性の調査・解析に活用され、波浪に関連する諸分野において種々の成果をあげつつある。とりわけ、スペクトル解析手法については、相関法、FFT 法、ME 法、ML 法等の種々の方法が提案され、これらは改良開発を経て実用に供されている。しかしながら、これらの方法によって得られるスペクトルの情報は、主として個々のスペクトルの形状に関する調査・解析に用いられるにとどまっており、スペクトル形の変化過程に含まれる全情報を必ずしも十分有効に活用しているとはいえない。

スペクトルの時系列は、例えば N 個の周波数帯、 M 個の時間的な情報から成っていると考えられるが、このような $M \times N$ 個の多変量からなる情報をより有効な数少ない直交成分により説明するための手段として、主成分分析¹⁾ (PCA, Principal Component Analysis) 手法は有力な手がかりを考えてくれる。

最近、PCA を活用した例が海岸工学諸分野でもよく見受けられるようになり、とりわけ海浜変形過程の解析においては興味深い成果があげられている。この場合に得られる直交関数は経験的固有関数 (Empirical Eigen Function) などと呼ばれ、海浜変形過程に含まれるモード解析に活用されている。

海洋波のスペクトル時系列を PCA によって解析した例としては、Vincent & Resio²⁾、Aubrey ら³⁾ によるものがあげられる。

本稿は、今後ますます増大しつつある沿岸波浪情報の活用方策の検討を目的としてスペクトル時系列に PCA を適用した結果について報告すると共に、エネルギーの平衡方程式を構成する波浪の発達、減衰にかかわる Source Function の関数形の設定に寄与することを示唆するものである。

2. スペクトル特性関数

波浪のスペクトル $S(f)$ は、 N 個の周波数帯から成っており、 M 個の時間的に異なる $S(f)$ から構成されるスペクトルの時系列 (Spectral Sequence) があるものと

する。このスペクトルの時系列を G とし、 G の i 番目の行はスペクトル時系列の i 番目の記録を表わし、 j 番目の列は周波数 f_j のスペクトル密度の時間的な変動を表わすようにスペクトル時系列を構成する各成分を配置する。

行列 G は、 N 個の単位ベクトル $I_1, I_2, \dots, I_N$ が周波数 $f_1, f_2, \dots, f_N$ のパワースペクトルのプロットされる軸を表わすようにすることによって N 次元のユークリッド空間で表現することが可能となる。この時、各スペクトル S_i はベクトルであり、この全空間を表わす G はベクトルの群である。

PCA はこのようなスペクトルの時系列に含まれる特色的な変動を解析するのに有効に用いることができる。PCA と同種の方法として因子分析法があるが、PCA はより数学的に確立された手法であり、解の一意性が保たれるものである。

今、各周波数帯の平均ベクトルを μ とすると、

$$\mu = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M S_i \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $E_i = S_i - \mu$ である。

サンプル空間で、次の条件が N 個の新しい軸 ϕ_i の上で保持されるような軸の回転を考える。

$$(1) \quad \phi_1: \lambda_1 = \sum_{i=1}^M \phi_1 \cdot E_i = \sum_{i=1}^M \phi_1 \cdot (S_i - \mu) \rightarrow \max.$$

$$(2) \quad \phi_2: \lambda_2 = \sum_{i=1}^M \phi_2 \cdot E_i \rightarrow \max.$$

$$\phi_1 \cdot \phi_2 = 0$$

$$(3) \quad \phi_j, 3 \leq j \leq N: \lambda_j = \sum_{i=1}^M \phi_j \cdot E_i \rightarrow \max.$$

$$\phi_j \cdot \phi_k = 0, \quad k=1, 2, \dots, j-1$$

$$(4) \quad \phi_i \cdot \phi_i = 1, \quad 1 \leq i \leq N$$

すなわち、 ϕ は単位ベクトルである。

Kendall & Stuart¹⁾に示されたように、(1)~(4) の条件

* 運輸省港湾技術研究所水工部主任研究官

** 運輸省港湾技術研究所水工部海象観測研究室長

を満足するベクトルは次の行列方程式を満足する固有ベクトルである。

$$R\phi = \lambda\phi \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 R は $N \times N$ の共分散行列であり、この要素 r_{ij} は周波数 f_i と f_j のスペクトル密度の共分散である。

もし、 $\det |R - \lambda I| \neq 0$ であるなら、(2) 式には N 個の解 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ が存在する。そしてこれらはそれぞれ N 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ に対応している。 λ_i は、 ϕ_i によって説明されるサンプルの分散であり、 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ である。

今、線型変換が用いられているから、 ϕ の線型結合によってもとのスペクトル S_i を再現することができ、

$$S_i = \mu + \sum_{j=1}^M W_{ij} \phi_j \quad \dots\dots\dots (3)$$

が満足されるようなスカラー量 W_{ij} が存在する。

(3) 式によると、スペクトルの時系列をよく表現する新しい関数の導入は図られたものの、もとのスペクトルを表現する変量の数の上では全く単純化されていない。Kendall & Stuart¹⁾ によると、ある k に対して λ_k が十分小さければ、これによって説明される分散はランダム誤差によると考えられ、 $\phi_k, \phi_{k+1}, \dots, \phi_N$ は無視しうる。従って次のようなもとのスペクトルに対する推定値が得られる。

$$\hat{S}_i = \mu + \sum_{j=1}^{k-1} W_{ij} \phi_j \quad \dots\dots\dots (4)$$

この時、スペクトル時系列全体に対して説明される分散は、 $\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i$ であり、これは $\sum_{i=1}^k \lambda_i$ に比べて十分大きい。主成分分析では、任意の k に対する $\sum_{i=1}^k \lambda_i / \sum_{i=1}^N \lambda_i$ を累積寄与率と呼んでいる。

Vincent & Resio²⁾ 及び Aubrey et al.³⁾ は同様の解析を行っており、上に示した固有ベクトル ϕ をそれぞれ CSF (Characteristic Spectral Function), WEF (Wave Eigenfunction) と呼んでいる。ここでは、スペクトル時系列を特色づけるという意味で前者の呼び方を採用し、**スペクトル特性関数**と名付けることにする。

3. 解析方法

解析の対象としたデータは、大阪湾の泉州沖観測塔 (MT 局) 近くの超音波式波高計 (設置水深 -18.2 m) により、昭和 53 年の異常波浪時に得られたものである。解析したケースをまとめて示すと表一1 のようになる。MT 局では毎時 13 分間観測でおこなわれており、データはサンプリング間隔 0.1 秒で得られている。しかしながら、本稿におけるスペクトルの計算には、データの信頼性を考慮してサンプリング間隔は 0.5 秒とし、データ数 1024 個に対して FFT 法を適用している。

表一1 に示した $H_{1/3}$, $T_{1/3}$, 風速, 及び風向は、各ケースの最大有義波高が得られた時刻の値である。ケース

表一1 対象ケース一覧表

ケース番号	対象期間	$H_{1/3}$ (cm)	$T_{1/3}$ (s)	風速 (m/s)	風向
1	月日時 月日時 1.21. 1 ~ 1.21. 9	126	4.2	12.6	W
2	2. 2.12 ~ 2. 2.18	158	4.4	14.3	WNW
3	2.28.13 ~ 2.28.22	227	5.3	21.7	W
4	6.20. 9 ~ 6.21. 3	160	5.1	17.2	SSW
5	8. 2.20 ~ 8. 3. 9	180	5.5	17.8	SSW
6	10.29. 2 ~ 10.29.11	119	4.2	12.9	W
7	12.29. 8 ~ 12.29.15	123	4.0	15.7	W
8	8. 3. 9 ~ 8. 3.16	180	5.1	17.2	SSW
9	11.29.15 ~ 11.29.22	90	3.8	9.5	WNW
10	2.28.24 ~ 3. 1. 8	165	4.9	11.8	W
11	6.20.19 ~ 6.21. 3	160	5.1	17.2	SSW
12	6.20. 9 ~ 6.21. 3	160	5.1	17.2	SSW

1~7 は波浪の発達時、8~10 は波浪の減衰時に対応しており、11, 12 はケース 4 に対する分析結果の変動性を検討するために追加したケースである。

主成分分析における固有値、固有ベクトルの計算においてはヤコビの対角化法を用い、用いたデータの検証は χ^2 分布及び共通性によりおこなっている。また、(3) 式における W_{ij} については Gauss-Seidel 法により計算した。

4. 解析結果及び考察

表一2 には、表一1 に示す各ケースについて得られた累積寄与率を示す。これによると、波浪の発達時には、おおむね第一主成分によって 90% 前後の分散を説明していることがわかる。とりわけ、ケース 3, 4 ではその割合が多いが、これは共に強風により急激に波浪が発達したためであろうと考えられる。波浪の急激な発達という点に関してはケース 5 についても同様であるが、それにもかかわらず、第一主成分の寄与率が比較的低いのは、このケースでは台風第 7 号及び 8 号の接近に伴ううねりが大阪湾に侵入したことによる影響が強風による波高の増大を助長したためであると考えられる。ケース 4 についても S 系の強風による波浪の発達であるが、これは日本海低気圧に伴う前線の南下によるものであり、外洋からのうねりの侵入の影響は比較的軽微であると推察される。第二主成分の寄与率については、ケース 3, 4 で約 5%、他のケースでは 10% 前後となっている。もっとも寄与率の大きいのはケース 1 であり、12.5% となっているが、このケースでは 13~14 m/s の強風がほぼ風向を変えることなく 4~5 時間吹送している。すなわち、最大波高が得られた 21 日 9 時には既に平衡状態が持続していたものと考えられる。

ケース 1~7 について、得られた平均スペクトル、及びスペクトル特性関数を示すと、図一1~図一2 のよう

表-2 累積寄与率

CSF No.	1	2	3	4	5	6	7	8
ケース番号								
1	0.85543	0.98040	0.99501	0.99857	0.99992	0.99997	1.00000	1.00000
2	0.86993	0.96381	0.98857	0.99425	0.99810	1.00000	1.00000	1.00000
3	0.92218	0.96821	0.99044	0.99840	0.99919	0.99990	0.99997	1.00000
4	0.91489	0.96218	0.99421	0.99723	0.99889	0.99969	1.00000	1.00000
5	0.85987	0.97156	0.98356	0.99116	0.99495	0.99833	0.99957	1.00000
6	0.85974	0.95536	0.99423	0.99738	0.99874	0.99964	0.99997	1.00000
7	0.88781	0.98517	0.99668	0.99944	0.99986	0.99995	1.00000	1.00000
8	0.64890	0.97504	0.98681	0.99734	0.99867	0.99940	1.00000	1.00000
9	0.77195	0.91980	0.97996	0.99234	0.99692	0.99868	1.00000	1.00000
10	0.84645	0.96648	0.99069	0.99872	0.99928	0.99926	0.99996	1.00000
11	0.88413	0.95216	0.98522	0.99356	0.99724	0.99923	0.99985	1.00000
12	0.94772	0.97976	0.99801	0.99928	0.99969	0.99982	0.99993	1.00000

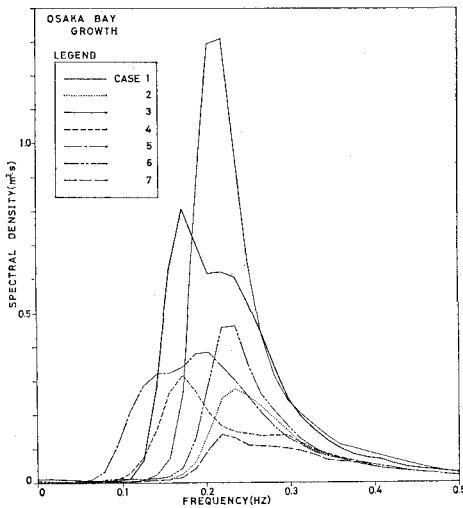
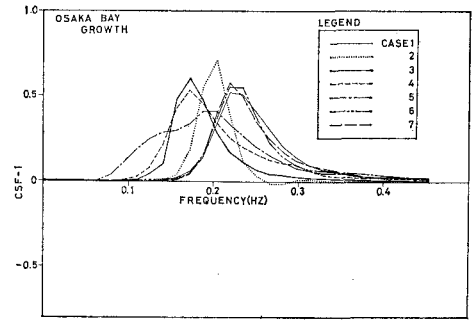
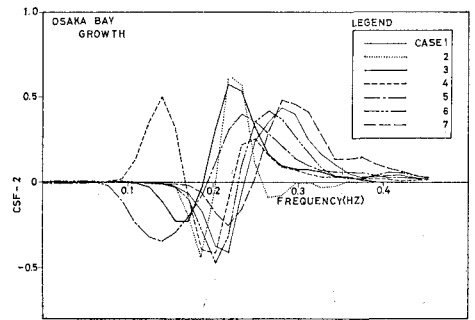


図-1 平均スペクトル (波浪の発達時)

になる。図-1によると、S系の風が卓越したケース4, 5では幅の広いスペクトル形状を示し、ケース3~5では双峰型のスペクトル形状を示している。ケース3で双峰型となっているのは、波浪の発達初期においてはS系の風が卓越しており、ケース4では初期に比較的小さいエネルギーピークが存在したことによるものと思われる。図-2に示したCSF-1の高周波側の勾配は、いずれも平均スペクトルの高周波側の勾配に比べて急であり、ピーク周波数はCSF-1の方がやや低周波側に寄る傾向があるもののほとんど一致している。また、外洋からのうねりの侵入が顕著なケース5以外では、いずれもCSF-1は単峰型の形状を示している。図-2に示したCSF-2の高周波側の勾配は、CSF-1のそれよりもさらに急であり、高周波側のピーク周波数は、いずれもCSF-1のそれよりもかなり高周波側にみられる。また、CSF-



(1)



(2)

図-2 スペクトル特性関数 (CSF-1, CSF-2)

2の形状は、Hasselmannら⁴⁾によって示される wave-wave interaction を表わす関数 (S_{nl}) に形状的によく類似している。ただし、砕波に伴う関数 S_{as} に類似した関数形は、CSF-3以下のいずれにおいても現われていない。このことは、砕波によるエネルギーの損失は、究極的には wave-wave interaction のような非線型性を表わす項により支配されることを意味しているのではないと思われる。

図-3には、(3)式に示す Weighting Function の時間変化を示す。図中に示す番号は、表-1のケース番号

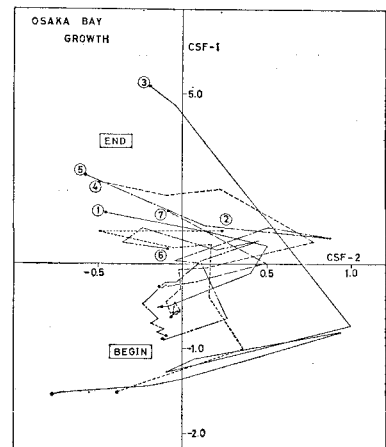


図-3 Weighting Function (CSF-1 vs CSF-2)

に対応している。これによると、全ケースの中で最も強い風が吹き、かつ波が急激に発達したケース3では、20時から22時にかけてCSF-1に対する W_{i1} は急激に増大しており、 W_{i2} は負から正に移行している。ケース1から7に示す波浪の発達過程についての W_{i1} と W_{i2} の変化傾向はおおむね同様であるが、風速が大きいほど W_{i1} の増大は急激であり、しかも W_{i1} の大きさは風速の大きさに比例している。また、ケース3の17時には風向がSからWに急変(風速はほぼ一定)しているが、この影響は、 W_{i1} の僅かな減少、 W_{i2} の大幅な減少となって現れている。この傾向はどのケースにおいても共通している。

一方、波浪の減衰時(ケース8~10)には、表-2によると波浪の発達時に比べて第一主成分の寄与率が低く

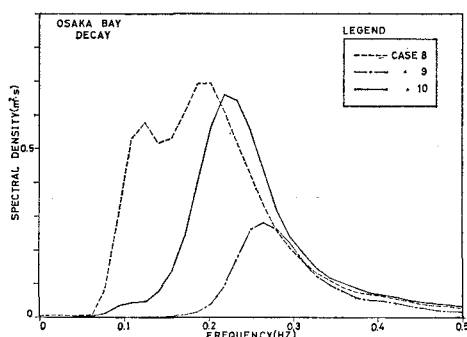
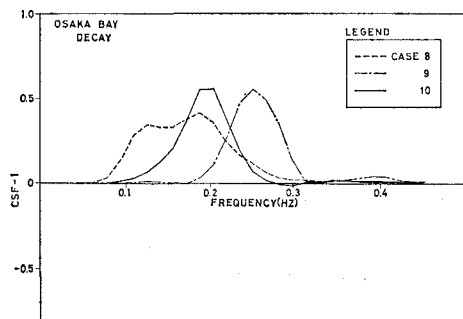
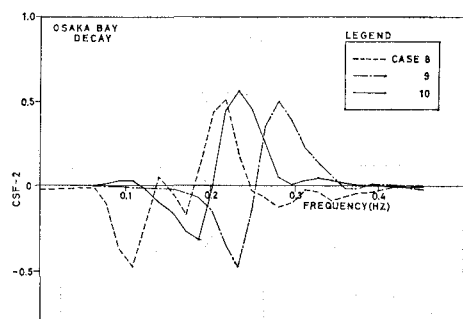


図-4 平均スペクトル(波浪の減衰時)



(1)



(2)

図-5 スペクトル特性関数(CSF-1, CSF-2)

第二主成分の寄与率は増大する傾向がみられる。ケース8で第一主成分の寄与率が最も低く、第二主成分の寄与率が最も高いのは、先に述べたように、この間の波浪の増大に対しては外洋からのうねりの侵入の影響の大きいことが考えられる。またケース9でも同様の傾向がみられるのは、16時から19時にかけて一時風速の増大が見受けられたことによるものと考えられる。したがって、気象条件の急変がない限りは、波浪の発達及び減衰時におけるCSF-1, CSF-2の寄与率にはほとんど差異がなく、風波の平衡状態が持続する場合、あるいはエネルギー変化が緩やかな場合には、CSF-1, CSF-2の寄与率はそれぞれ減少、増大する傾向がみられることがわかる。

図-4~5には波浪の減衰時の平均スペクトル、及びスペクトル特性関数を示す。これによると、CSF-1の高周波側の勾配は波浪の発達時と同じくいずれも急であり、ピーク周波数はいずれもCSF-1の方が低周波側となっている。とりわけ、ケース10ではその影響が顕著である。また、CSF-2の高周波側の勾配は、CSF-1のそれよりも急であり、ピーク周波数は平均スペクトルに比べて高周波側となっている。

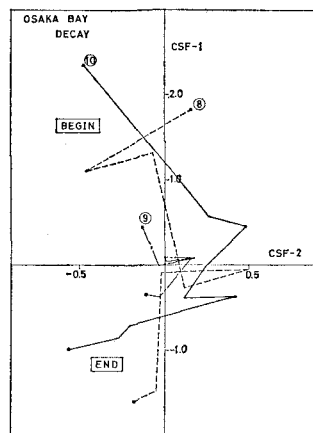
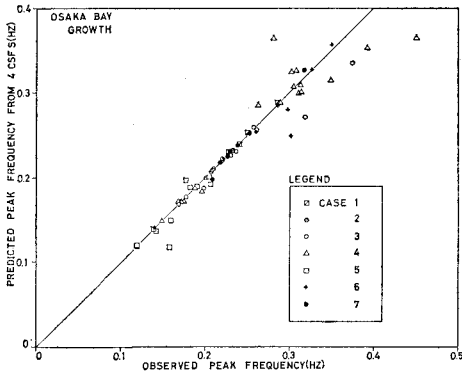


図-6 Weighting Function (CSF-1 vs CSF-2)

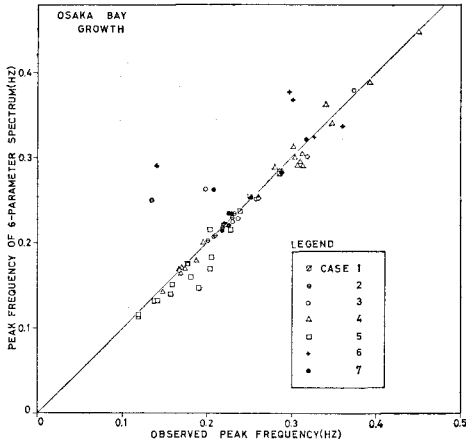
図-6には、ケース8~10における W_{i1} と W_{i2} の時間変化を示す。これによると、波浪の発達時に比べて、変化はやや緩やかであることを除けば全体的な傾向はほぼ逆であることがわかる。

表-2に示すケース11, 12は、ケース4のそれぞれ期間、時間間隔(2時間毎)を変えて解析した結果である。ケース11については、対象とした期間が短いためかCSF-1の寄与率はやや減少し、一方ケース12については、逆の結果が得られている。このことは、寄与率については対象とするスペクトル時系列の時間的な変動性により異なった結果を与えることを示唆している。しかしながら、本稿に示していないが、CSF-1, CSF-2の形状については、ケース4, 11, 12のいずれにおいてもほとんど有意な差異は示していないことを付記しておく。

図-7には、波浪の発達時、図-8には波浪の減衰時におけるそれぞれCSF-1~4、及びOchi & Hubbleによる6パラメータモデル⁹⁾により推定されるスペクトルのピーク周波数と実測スペクトルのピーク周波数の比較図を示している。これらによると、波浪の発達時におい



(1)



(2)

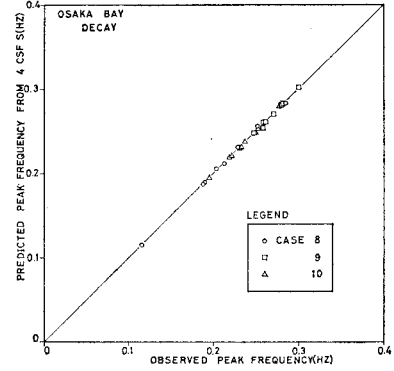
図-7 ピーク周波数の比較 (波浪の発達時)

では、全般的に6パラメータモデルとCSF-1~4による推定結果はほぼ同等であるが、風波が十分に発達した状態においては、後者が優る傾向にある。一方波浪の減衰時には、CSF-1~4による推定結果は、6パラメータモデルよりも明らかに良好なものとなることがわかる。

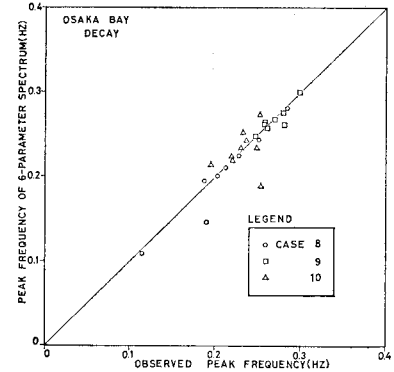
なお、6パラメータモデルに対する近似にはシンプレックス法を用いている。

5. あとがき

本稿では、大阪湾内で観測されたスペクトル時系列10個を対象として、PCAを適用して得られるスペクトル特性関数に関する調査検討をおこない、この結果、(1) スペクトル特性関数の形状はHasselmannらによって示されているSource Functionの形状によく類似しているが、*Sas*に相当するような関数形は出現しない、(2) 高周波側の勾配は、平均スペクトル、CSF-1、CSF-2の順に急になり、ピーク周波数については、CSF-1、平均スペクトル、CSF-2の順に高周波側となる傾向がみられる、(3) 風向が急変した時にはCSF-2に対する重み関数が



(1)



(2)

図-8 ピーク周波数の比較 (波浪の減衰時)

大きく変化する、(4) CSF-1~4により推定されるスペクトルは、6パラメータモデルよりもよい推定値を与えることなどが明らかになった。

今後、さらに沿岸波浪に対する解析結果を集積して、スペクトル時系列の活用方策の検討、Source Functionの設定に寄与したいと考えている。

参考文献

- 1) Kendall, M. C. and A. Stuart: The Advanced Theory of Statistics, III. Design and Analysis, and Time Series. Hafner, New York, 1968.
- 2) Vincent, C. L. and D. T. Resio: An Eigenfunction parameterization of a time sequence of wave spectra, Coastal Eng., 1, pp. 185~205, 1977.
- 3) Aubrey, D. G. et al.: The Statistical Prediction of Beach changes in Southern California, J. Geophys. Res., 85, pp. 3264~3276, 1980.
- 4) Hasselmann, K. et al.: Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project JONSWAP, Deutsches Hydrographisches Institut, 95 p., 1973.
- 5) Ochi, M. K., and E. N. Hubble: On six-parameter wave spectra, Proc. 15th Conf. Coastal Eng., 1976.