

二方向波浪系における代表波向の算定について

合 田 良 実*

1. ま え が き

波浪観測は海岸・港湾・海洋建設工事の基礎データを得るために欠かせないものであり、我が国でも各地で着実な努力が続けられて現在ではかなりの波浪データが蓄積されている。しかし、これらの大半は波高・周期の情報であって、波向については不明のことが多い。波向観測には種々の方式が試みられているものの未だ決定版といえるものがなく、これが波向観測の普及を妨げている。また、波向そのものの定義も必ずしも明快でない。例えば、異なる方向から風波とうねりが同時に来襲している状態（これをここでは二方向波浪系と称する）での波向をどのように定義するかは未解決のままである。本論文はこの問題について数値計算によって検討した結果を報告するものであり、今後の波向観測の普及の一助となれば幸いである。

2. 代表波向および方向集中度の算定理論

(1) 代表波向の定義

方向スペクトルによって記述される不規則波の波向の理論は、すべて Longuet-Higgins¹⁾ に基づくといえてよい。いま、波数空間表示の方向スペクトルを $E(l, m)$ で表わし、その原点に関するモーメントを次のように表記する。

$$M_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(l, m) l^p m^q dl dm \quad (1)$$

なお、極座標 (k, θ) とは $l = k \cos \theta$, $m = k \sin \theta$ の関係にある。

$p=q=0$ の 0 次モーメントは $M_{00} = \bar{\eta}^2$ である。ただし、 η は表面波形すなわち平均水位からの水面上昇量である。また、1 次モーメントからは平均波数 $\bar{l}$, $\bar{m}$ が次のように定義できる。

$$\bar{l} = M_{10}/M_{00}, \quad \bar{m} = M_{01}/M_{00} \quad (2)$$

平均波向 $\bar{\theta}$ は、 $\bar{l}$, $\bar{m}$ で与えられるスペクトルの重心と座標原点を結ぶ方向として次のように求められる。

$$\bar{\theta} = \tan^{-1}(\bar{m}/\bar{l}) = \tan^{-1}(M_{01}/M_{10}) \quad (3)$$

次に、2 次モーメントからは座標軸を回転したときに

座標軸上の自乗平均波数が最大、すなわち波の峯が最も密に並んでいる方向が次のように求められる。

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2M_{11}}{M_{20} - M_{02}} \right) \quad (4)$$

Longuet-Higgins は一般の不規則波形に対して θ_p を principal direction と呼んでおり、波浪については主波向と呼ばれる。平均波向は全平面 ($-180^\circ \sim 180^\circ$) で求められるのに対し、主波向は半平面 ($-90^\circ \sim 90^\circ$) でしか求められないことに注意する必要がある。

(2) 二方向波浪系の代表波向

簡単のために、二方向からの規則波の重畳状態を考える。波数スペクトル空間では図-1 のように波数 k , 波向 θ , エネルギー E (H^2 に比例) の点として表示される。ここで、二つの波向の 2 等分値を θ で表わし、これを中央波向と呼ぶことにする。

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2), \\ \Delta &= \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) > 0, \\ \theta_1 &= \theta + \Delta, \\ \theta_2 &= \theta - \Delta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

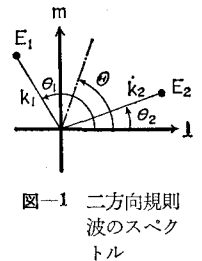


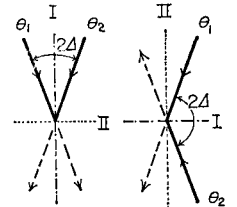
図-1 二方向規則波のスペクトル

図-1 について平均波向および主波向を計算すると、

$$\tan(\bar{\theta} - \theta) = \frac{E_1 k_1 - E_2 k_2}{E_1 k_1 + E_2 k_2} \tan \Delta, \quad (6)$$

$$\tan 2(\theta_p - \theta) = \frac{E_1 k_1^2 - E_2 k_2^2}{E_1 k_1^2 + E_2 k_2^2} \tan 2\Delta. \quad (7)$$

平均波向 $\bar{\theta}$ は常に $\theta_2 \leq \bar{\theta} \leq \theta_1$ の範囲にある。しかし、主波向は $2\Delta < 90^\circ$ のときは $\theta_2 \leq \theta_p \leq \theta_1$ であるけれども、 $2\Delta > 90^\circ$ のときは $\theta - 90^\circ < \theta_p \leq \theta_2$ または $\theta_1 \leq \theta_p < \theta + 90^\circ$ の範囲に逸れてしまう。後出の図-8はこの例である。数式的には $2\Delta \geq 90^\circ$ によって $\tan 2\Delta$ の符号が変わるためである。物理的には、



(a) $2\Delta < 90^\circ$ (b) $2\Delta > 90^\circ$

図-2 二方向波浪系の波向

方向スペクトルの 2 次モーメントだけでは波の進行・逆行

を判別できないため、図-2の(a)と(b)のケースが区別できないことによる。すなわち、中央波向はいずれもIの方向であるが、波峰が最密なのは(a)ではI、(b)ではIIの方向である。このため、(b)の場合の主波向は中央方向と90°異なるIIの近傍を示す結果になる。このように、Longuet-Higginsの提案した代表波向のうちの主波向は二方向波浪系に対して不適格な場合がある。

(3) 方向集中度の定義および平均分散角の提案

方向スペクトルのモーメントを使った方向集中度の指標として、Longuet-Higginsは次のlong-crestednessパラメーター γ を定義した。

$$\gamma = \left\{ \frac{(M_{20} + M_{02}) - \sqrt{(M_{20} - M_{02})^2 + 4M_{11}^2}}{(M_{20} + M_{02}) + \sqrt{(M_{20} - M_{02})^2 + 4M_{11}^2}} \right\}^{1/2} \quad (8)$$

この γ は波数が最大である θ_p の方向と、これに直交する $\theta_p \pm 90^\circ$ の方向とにおける波数の比の逆数である。単一波群の場合には方向集中度が高いほど γ が0に近づき、無指向性が強まるほど1に近づく。

方向関数が $\cos^{2n}\theta$ 型の場合について計算すると、 n を整数として γ は次式で求められることが分る。

$$\gamma = 1/\sqrt{2n+1} \quad (9)$$

一方、 $\cos^{2S}(\theta/2)$ 型的光易型方向関数の場合には、スペクトルのピーク周波数における S の最大値 $S_{\max}$ をパラメーターとして、図-3のような値をとる。ただし、周波数スペクトルは

$H_{1/3}$, $T_{1/3}$ をパラメーターとして与えられるBretschneider-光易型の場合である。以下においては、この組合せを光易型方向スペクトルと略称する。 γ の値は周波数スペクトルを計

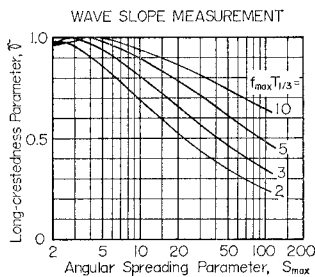


図-3 光易型方向スペクトルの γ

算する周波数の最大値 $f_{\max}$ ($=1/2\Delta t$)と $T_{1/3}$ の積の値によってかなり変動する。しかも、 $\cos^{2n}\theta$ 型に比べて相当に大きな値である。すなわち、総エネルギーの分布でいえば $\cos^2\theta$ 型と $S_{\max}=10$ はほぼ同等であるけれども、 γ は前者が0.5772、後者が0.69~0.94と大きく異なるのである。

また、二方向波浪系について計算すると、特性の等しい二つの波群が $2\Delta=90^\circ$ の角度で交じわるときは、 $\gamma=1$ となることが証明される。これは、直交する二方向に沿っての波数の比によって定義される γ の性質を考えれば当然といえる。しかし、単一波群と二方向波浪系を何らかの指標で判別しようとする目的からは γ は不適格である。そこで、波数空間において座標原点と方向スペク

トルの重心を結ぶ主軸からのスペクトル密度の自乗平均分散距離 R を導入する。図-4において任意の点 $P(l, m)$ から主軸OGに下した垂線の脚点 $Q(x_0, y_0)$ との距離 PQ を使い、 R を次のように定義する。

$$R^2 = \frac{1}{M_{00}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(l, m) PQ^2 dl dm$$

$$= \frac{M_{01}^2 M_{20} - 2M_{10} M_{01} M_{11} + M_{10}^2 M_{02}}{M_{00}(M_{10}^2 + M_{01}^2)} \quad \dots (10)$$

この R は波数の次元を持つので、これを平均波数 $\bar{k} = \sqrt{l^2 + m^2}$ で除してその逆正接をとることにより、次のような平均分散角 θ_k が定義できる。

$$\theta_k = \tan^{-1}(R/\bar{k})$$

$$= \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{M_{00}} \sqrt{M_{01}^2 M_{20} - 2M_{10} M_{01} M_{11} + M_{10}^2 M_{02}}}{M_{10}^2 + M_{01}^2} \right\} \quad (11)$$

規則波では $\theta_k=0$ であり、無指向性波浪では $\theta_k=90^\circ$ となる。また、二方向波浪系では $\theta_k > 2\Delta$ となることが数値的に例証される。

(4) 水面傾斜測定による代表波向と方向集中度

方向スペクトルが何らかの方法によって求められている場合には、以上によって代表波向と方向集中度が計算できる。しかし、波向観測の実務を考えると表面ブイあるいは2方向流速計などの出力から直接に波向等を算定できることが望ましい。このためには、観測値の時系列データ間の共分散を用いる方法が考えられる。

いま、表面ブイの上下運動速度 η_t および水平2方向の傾斜 η_x, η_y が測定されたとする。簡単のため、ブイの応答特性は無視し、いずれのデータも水面の運動および傾斜を忠実に記録していると仮定する。そうすると、この3量間の共分散は方向スペクトルの定義から次のように方向スペクトルのモーメントに結びつけられる。

$$\left. \begin{aligned} \overline{\eta_t^2} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi f^2 S(f, \theta) d\theta df = M_{00}^* \\ \overline{\eta_t \eta_x} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi f S(f, \theta) k \cos \theta d\theta df = M_{10}^* \\ \overline{\eta_t \eta_y} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi f S(f, \theta) k \sin \theta d\theta df = M_{01}^* \\ \overline{\eta_x^2} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi S(f, \theta) k^2 \cos^2 \theta d\theta df = M_{20} \\ \overline{\eta_x \eta_y} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi S(f, \theta) k^2 \cos \theta \sin \theta d\theta df = M_{11} \\ \overline{\eta_y^2} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi S(f, \theta) k^2 \sin^2 \theta d\theta df = M_{02} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

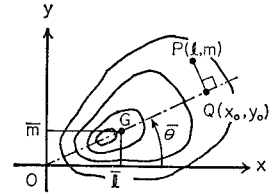


図-4 波数空間での方向スペクトル

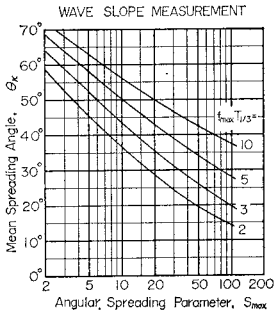


図-5 水面傾斜測定による平均分散角

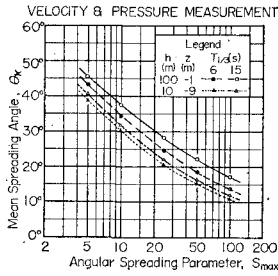


図-6 水粒子速度・水圧測定による平均分散角

このうち、 M_{00}^* , M_{10}^* , および M_{01}^* は厳密には式 (1) の定義に一致しないが、違いは f^2 または f が乗じられていることのみであるので、これらを式 (1) によるものの代替として準用することにする。この結果、 $\bar{\theta}$, θ_p , γ および θ_s が式 (12) に出てくる 6 個の共分散を使って求められることになる。図-5 は、こうした水面傾斜測定の場合の θ_s を光易型方向スペクトルの数値計算によって算定した結果である。図-3 の γ と同様、 $f_{\max} T_{1/3}$ の値が増すにつれて θ_s の値が増大する。

(5) 水粒子速度測定による代表波向と方向集中度

水中のある高さ z (静水面から上向きに正) の位置で 2 方向の速度成分 u , v を測定して主波向を求めることは、永田²⁾以来広く行なわれている。さらに同一鉛直軸上の水位情報を取得すれば、平均波向が得られる。水位情報として同一点の水中圧力の水頭 $\eta_p = p/\rho g$ を測定する場合の共分散は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \overline{\eta_p^2} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi K_p^2 S(f, \theta) d\theta df = \tilde{M}_{00}, \\ \overline{\eta_p u} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi K_p^* K_p S(f, \theta) k \cos \theta d\theta df = \tilde{M}_{10}, \\ \overline{\eta_p v} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi K_p^* K_p S(f, \theta) k \sin \theta d\theta df = \tilde{M}_{01}, \\ \overline{u^2} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi K_p^2 S(f, \theta) k^2 \cos^2 \theta d\theta df = \tilde{M}_{20}, \\ \overline{uv} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi K_p^2 S(f, \theta) k^2 \cos \theta \sin \theta d\theta df = \tilde{M}_{11}, \\ \overline{v^2} &= \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi K_p^2 S(f, \theta) k^2 \sin^2 \theta d\theta df = \tilde{M}_{02}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、

$$K_p = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}, \quad K_p^* = \frac{g}{2\pi f} K_p. \quad \dots\dots\dots (14)$$

式 (13) の 0~2 次モーメントは式 (1) の定義と K_p および K_p^* の項だけ異なっているが、これらは f のみの関数であるので θ に関する性質は式 (1) のものと同等と考えられる。そこで式 (13) を式 (1) の代替として

準用することにより、 η_p , u , v の共分散を使って $\bar{\theta}$, θ_p , γ および θ_s が求められることになる。

図-6 は水深 $h=100$ m, 深度 $z=-1$ m のやや仮想的な表面計測と、 $h=10$ m, $z=-9$ m の底面計測の場合を考えて光易型方向スペクトルに対する平均分散角を数値計算した結果である。水粒子速度測定の場合は平均分散角が小さく、また $f_{\max} T_{1/3}$ の値による変化が少ないことが特徴的である。これは、式 (14) の K_p^* が $1/f$ に比例するためにスペクトルの高周波数側の影響が抑えられることによると考えられる。 γ も同様に減少し、底面計測の場合に $S_{\max}=10$ で $\gamma \approx 0.6$, $S_{\max}=100$ で $\gamma \approx 0.2$ となる。

3. 数値シミュレーションによる検討

(1) 数値シミュレーションの方法

水位その他の時間波形は次の有限フーリエ級数を用いてシミュレートした。

$$\zeta_i = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N K_i(f_m, \theta_n) a_{m,n} \cos(2\pi f_m t + \epsilon_{m,n} + \phi_i) + w_i(t), \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $K_i(f_m, \theta_n)$ は水位波形に対する各変量の伝達関数、 $a_{m,n}$ は水位波形成分波の振幅、 $\epsilon_{m,n}$ は位相遅れ角で $0 \sim 2\pi$ に等密度でランダムに分布、 ϕ_i は各変量の位相変換角、 $w_i(t)$ は計測その他によるノイズを模式化した正規確率分布の乱数である。

振幅 $a_{m,n}$ は方向スペクトルから次式で定める。

$$a_{m,n} = \sqrt{2S(f_m, \theta_n) \Delta f_m \Delta \theta_n}. \quad \dots\dots\dots (16)$$

成分数は $M=101$, $N=72$ を標準とし、 f_m は等分割した区間内で乱数によって設定し、 θ_n は $-\pi \sim \pi$ を等分割して与えた。計算データ個数は $\Delta t=1$ s ごとの 1024 個である。ノイズは rms 値で水位波形の 1% を与えた。

(2) 二方向波浪系の代表波向

二方向からの規則波の重畳状態に対する平均波向と主波向は式 (6), (7) で与えたところであるが、光易型方向スペクトルで表現される不規則波の二方向波浪系について水面傾斜による波向測定を対象として数値シミュレーションした結果が図-7, 8 である。一つは風波を代表する $T_{1/3}=8$ s, $S_{\max}=10$, もう一つはうねりを代表する $T_{1/3}=16$ s, $S_{\max}=100$ を考え、それぞれのエネルギー ($\propto H_{1/3}^2$) の相対値を横軸にとって表示したものである。波向は $\theta_i = \pm 40^\circ$ および $\pm 60^\circ$ の 2 種類であり、各エネルギー比ごとに 8 回のシミュレーションを行なって平均値 $\pm$ 標準偏差の形で示している。

図中の実線および破線は方向スペクトルの数値積分で求めた値であり、シミュレーションの平均値はこれに合致している。平均波向 $\bar{\theta}$ はエネルギー比 $E_2/(E_1+E_2)$ が 0 から 1 に増すにつれて θ_1 から θ_2 に漸変する。しかし、 θ_p は $\theta_i = \pm 40^\circ$ では $+40^\circ$ から -40° へ次第

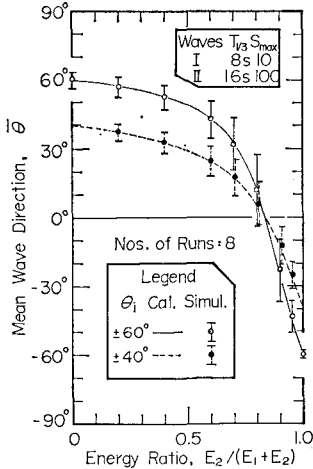


図-7 平均波向とエネルギー比の関係

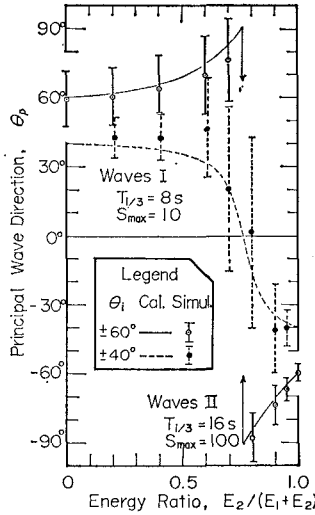


図-8 主波向とエネルギー比の関係

に移っているけれども、 $\theta_i = \pm 60^\circ$ のケースは一度 $+90^\circ$ へ向って増加してから $E_2/(E_1+E_2) \div 0.76$ で -90° に急変し、それから -60° へ接近する。これは式(7)で説明したところであり、 $2d > 90^\circ$ のときに中央波向と 90° ずれた方向に θ_p が向く特性を例示している。

代表波向とエネルギー比の関係は直線の変化であることが望ましいが、実際には必ずしもそのようにならない。水面傾斜測定では短周期の波の影響が強く、海底の水粒子速度測定では長周期の波の影響が強く現われる。いま、平均波向が中央波向と一致するエネルギー比に着目し、これを水面傾斜測定の場合について計算した結果が図-9である。周期の差が大きいくほど短周期の影響が強いことが分る。また、このエネルギー比は S_{max} の組合せにも関係し、周期が同一であれば S_{max} の大きな方の波が平均波向に対する影響力が強い。水粒子速度を水面近くで測定する場合には、平均波向とエネルギー比の関係がかなり直線的となり $\bar{\theta} = \theta$ となるエネルギー比が 0.5 よりもやや大きい程度である。

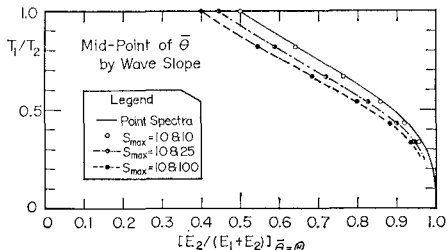


図-9 平均波向が中央波向と一致するエネルギー比

(3) 二方向波浪系の方向集中度

図-10は、図-7, 8と同じ波群の組合せの場合の平均分散角の変化である。一般に、平均波向が中央波向と

一致するエネルギー比の近傍で θ_e は最大となる。水面傾斜測定の場合には、 $\theta_e \geq 55^\circ$ であればほぼ二方向波浪系と判断することができよう。

γ の場合には他の条件が同じであれば $2d = 90^\circ + \alpha$ と $2d = 90^\circ - \alpha$ の二つの組合せが同一の γ の値を与えるなど、二方向波浪系の指標として適切でない。図-11は、海底で水粒子速度を測定しているときに $T_{1/3} = 5s$, $S_{max} = 10$ の波群と $T_{1/3} = 7s$, $S_{max} = 25$ の波群が $\theta_i = \pm 45^\circ$ で来襲した状態を想定し、数値シミュレーション結果から γ を求めた例である。このときは $E_2/(E_1+E_2) = 0.23$ で $\theta_p = \theta$ となり、かつ $\gamma = 1$ となる。シミュレーションによる γ の値は方向スペクトルの数値積分で求めた値よりもやや小さいけれども、全体としての傾向は良く一致している。

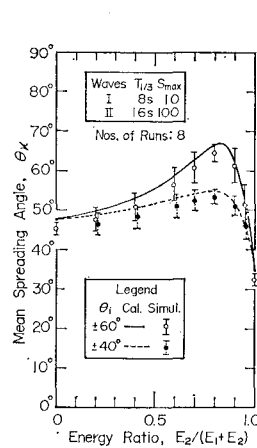


図-10 平均分散角とエネルギー比の関係

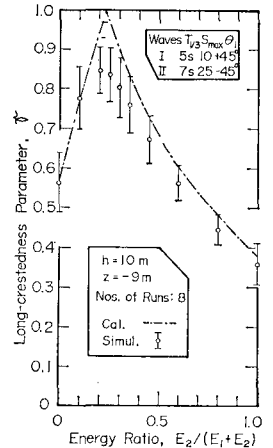


図-11 水粒子速度測定による γ とエネルギー比の関係

4. 代表波向等の算定値の信頼限界

不規則波の解析では常に統計的変動性に留意しなければならない。代表波向の場合、その標準偏差が大きくなければ入射波向の回りに正規分布することが数値シミュレーションで確かめられている³⁾。図-12は平均波向 $\bar{\theta}$ と主波向 θ_p の標準偏差を数値シミュレーション結果について求めたものである。大きな白・黒丸はノイズを0とした100回繰り返しの結果であり、小さな白・黒丸は単一波群の不規則波で S_{max} を変えたものおよび二方向波浪系のデータで、8~10回の繰り返しである。すべて波数125波程度であって、水面傾斜測定の場合である。図の横軸は平均分散角であり、 θ_p の一部に全体の傾向よりも小さいものがあることを除けば、 $\bar{\theta}$ と θ_p の標準

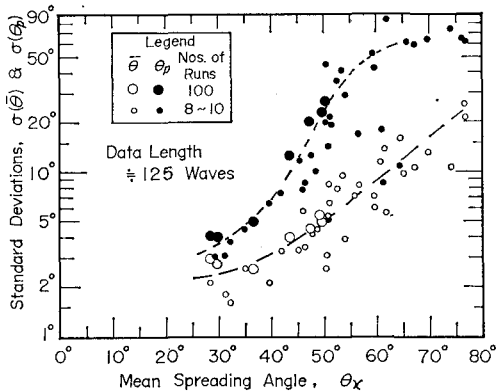


図-12 平均波向および主波向の標準偏差

偏差は θ_x によってほぼ一義的に定まっている。

$\bar{\theta}$ と θ_p を比べると、前者は3変量のデータから計算されるのに対して後者は2変量のデータに基づくものだけあって、後者の方が標準偏差が大きく、統計的変動性が高い。特に、平均分散角が 50° 程度を超えると $\sigma(\theta_p) \geq 20^\circ$ となり、信頼性に乏しくなる。データの記録波数が少ないときは標準偏差が増大するが、この変化は波数の $-2/3$ 乗に比例するようである³⁾。

海底での水粒子速度測定の場合には、粒子速度の伝達関数の影響で代表波向の標準偏差が図-12よりも大きくなる傾向がある。

平均分散角 θ_x 自体も統計的変動を示すが、波数125波程度ではその標準偏差が $2^\circ \sim 4^\circ$ でほぼ一定である。一方、long-crestedness パラメーター γ は、その絶対値が0.5程度のときに波数約125波における変異係数が8%程度である。 θ_x 、 γ とともにその標準偏差は波数の $-1/2$ 乗に比例する。

一方、水面傾斜や水粒子速度相互のクロススペクトル解析を行なうと、周波数帯別の波向や γ 、 S などが求められる。

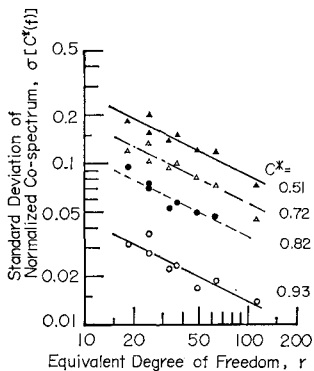


図-13 正規化されたコスプレクトルの標準偏差

それらの標準偏差はスペクトル解析の等価自由度 r の $-1/2$ 乗に比例して変化する。図-13は水面傾斜相互および水面上下速度とのスペクトルを幾何平均で正規化したもの、すなわち $C_{ij}^* = C_{ij} / \sqrt{S_i S_j}$ について標準偏差を求めた結果であり、このようなデータからほぼ次の関係式が導かれる。

$$\sigma(C^*) = (1 - C^{*2.5}) / \sqrt{r} \quad (17)$$

また、コスプレクトル自体の変異係数は周波数スペクトル密度も含めてほぼ次の式で表わし得るようである。

$$\sigma[C_{ij}(f)] / \sqrt{S_i(f) S_j(f)} = \sqrt{2/r} \quad (18)$$

このようなクロススペクトルの統計的変動性のために周波数帯別の波向、方向集中度等もまた変動性を免れない。自由度が $r=100$ の場合、数値シミュレーションの結果では $\bar{\theta}(f)$ で約 4° 、 $\theta_p(f)$ で約 6° の標準偏差、 $\gamma(f)$ で約 11%、方向集中度 S で約 24% の変異係数を示している³⁾。

5. む す び

表面ブイや2方向流速計による波向観測においては、測定値の時系列データ間の共分散の計算によって波群全体の代表波向および方向集中度を求め得ることが明らかにされた。二方向波浪系存在の可能性および統計的変動性を考慮すると、代表波向としては平均波向を用いるのが適切と考えられる。方向集中度としては新しく定義した平均分散角が long-crestedness パラメーターよりも適用範囲が広く、一般的な指標として適当である。

なお、共分散法による波向観測は昭和55年度に港湾技術研究所と松下通信工業株式会社の共同研究として運輸省第三港湾建設局所有の高知沖ディスクブイを借用して現地実験を行ない、基本的な適用性を確認している。この結果については別の機会に発表したいと考えている。

参 考 文 献

- 1) Longuet-Higgins, M. S.: The statistical analysis of a random, moving surface, Phil. Tras. Roy. Soc. London, A (1966), 249, pp. 321~387, 1956.
- 2) Nagata, Y.: The statistical properties of orbital wave motions and their application for the measurement of directional wave spectra, J. Oceanog. Soc. Japan, 19-4, pp. 169~181, 1964.
- 3) 合田良実: 共分散法による波向算定方式の数値的検討, 港湾技研報告, 20-3, 1981.