

流れによる不規則波の屈折の数値計算

酒井哲郎*・小関仁彦**・岩垣雄一***

1. ま え が き

流れによる波の屈折は、最近沿岸流理論において、波によって生じた沿岸流による波の屈折（沿岸流と入射波の干渉）の問題として注目されているが、その外にも河口付近での波の変形においては無視しえない。理論的な研究としては、とくにラディエーション応力の概念が明らかにされてからは、Longuet-Higgins ら (1961)¹⁾が取りあげた。一方数値計算手法は、Noda ら (1974)²⁾、Skovgaard ら (1976)³⁾および岩垣ら (1977)⁴⁾のものがある。ただしこれらはいずれも規則波を対象としたものであり、実際の応用においては不十分である。ここでは流れと水深変化による不規則波の屈折、とくにその方向スペクトル分布の変化を計算する数値計算モデルを開発する。なお不規則波の流れによる屈折に関しては James ら (1977)⁵⁾のものがあるが、方向スペクトル分布の計算は扱っていない。

2. 流れによる不規則波の屈折の数値計算モデル

(1) 基礎式

波の屈折の問題では、波向を決定する運動学的な関係式と、波高の変化を決定する力学的な関係式とがある。流れによる波の屈折の場合も、波数非回転の条件式と流れの中での波のエネルギーの保存式がそれらに当たる。規則波の場合にはこれらの関係式を別個に解いていけばよいが、不規則波の場合、各成分波の波向の変化も結果的には方向スペクトル分布を変形させるので、出来ることなら成分波の波向とエネルギーの変化を同時に計算した方が便利である。水深の変化のみによる不規則波の屈折の場合は、すでにそのような計算法が開発されている (Karlsson (1969)⁶⁾、永井ら (1974)⁷⁾)。そこでは、本来時間 t と平面座標 x, y の関数としての不規則波の成分波のエネルギーの平衡式を変形し、次のように波向 θ をも独立変数に加えている。

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Dv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Dv_y) + \frac{\partial}{\partial \theta}(Dv_\theta) + Q = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 D は方向スペクトル密度、 Q は砕波や底面摩擦によるエネルギー損失量であり、 $v_x \sim v_\theta$ は次式で与えられる。

$$v_x = c_g \cos \theta, \quad v_y = c_g \sin \theta, \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$v_\theta = \frac{c_g}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial c}{\partial y} \cos \theta \right) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 c_g は成分波の群速度、 c は波速、 θ は波向と x 軸のなす角度である。

流れが存在する場合に同様な形を用いるには、ラディエーション応力を含んだ形の流れの中での波のエネルギーの保存式は複雑すぎる。その点、同じ流れの中での波のエネルギーの保存式でも、“wave action” の保存式 (Bretherton and Garrett (1969)⁸⁾) は、式 (1) と同様な形で次のように表わすことができる ($Q=0$ とする)。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla(Av) = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 A は wave action と呼ばれ、 D/ω_r (ω_r : 成分波の流れに相対的な角周波数) で定義される。 v については本来は $U + c_{gr}$ (U : 流れのベクトル、 c_{gr} : 流れに相対的な群速度ベクトル) であるが⁹⁾、水深変化のみによる条件の場合と同様に、ここでは波向 θ の変化速度 v_θ をも含める。 v_θ は $v = U + c_{gr}$ で運動する点から見た θ の変化速度である。

一般に波向の変化は波数非回転の条件式で与えられる¹⁰⁾。

$$\frac{\partial(k \cos \theta)}{\partial y} - \frac{\partial(k \sin \theta)}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで k は波数である。一方波数の運動学的保存式¹⁰⁾から、

$$k(c_r + U \cos \theta + V \sin \theta) = \omega_0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

が得られる。ここで c_r は流れに相対的な波速、 U, V は U の x, y 成分、 ω_0 は流れのない領域での角周波数であり、また静止座標系から見た角周波数でもある。式 (6) を用いて k を与え、式 (5) を変形すると、

$$(U + c_{gr} \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (V + c_{gr} \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

* 正会員 工博 京都大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 東京都建設局

*** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial U}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial U}{\partial y} \cos \theta \right) \cos \theta \\
&+ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial V}{\partial y} \cos \theta \right) \sin \theta \\
&+ \left(\frac{\partial c_r}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial c_r}{\partial y} \cos \theta \right) \\
&+ \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta \right) (c_{gr} - c_r) \\
&= v_\theta \dots\dots\dots (7)
\end{aligned}$$

となり、定常状態 ($\partial\theta/\partial t=0$) を考えると、式 (7) が v_θ であることがわかる。

このように式 (4) は式 (1) に比べて、 D を A に、また $v_x \sim v_\theta$ を上述したようにおきかえたものになっている。定常状態を考えると、式 (4) は次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x}(Av_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Av_y) + \frac{\partial}{\partial \theta}(Av_\theta) = 0 \dots\dots (8)$$

式 (8) の差分化は永井⁷⁾と同様に行なった。図-1 は差分化に必要な格子と定義である。 x, y 方向以外に θ に関しても離散化している。後に述べるように、 x 軸を海岸線に直交する方向にとり、波はすべて x 軸の正方向に進むと仮定すると、式 (8) の左辺第1項の差分表示は1種類であるが、第2, 第3項に関しては v_y, v_θ の正負によりそれぞれ4種類の表現が得られる。これらの表現を式 (8) に代入すると16通りの結果が得られるが、形としてはいずれも次式のようになる。

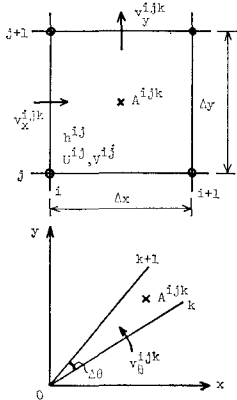


図-1 差分化のための格子と定義

$$\begin{aligned}
&a_1 A^{i,j,k} + a_2 A^{i,j-1,k} + a_3 A^{i,j+1,k} + a_4 A^{i,j,k-1} + a_5 A^{i,j,k+1} \\
&= b A^{i-1,j,k} = B \dots\dots\dots (9)
\end{aligned}$$

ここで、 $a_1 \sim a_5, b$ はいずれも $v_x, v_y, v_\theta, \Delta x, \Delta y, \Delta \theta$ で与えられる。式 (9) で i を固定すると、 $j=1 \sim M, k=1 \sim N$ としてこのような式は $M \cdot N$ 個存在し、 $M \cdot N$ 個の $A^{i,j,k}$ に関する $M \cdot N$ 元の連立方程式を解くことにより、特定の i に対する各 j, k の wave action が得られる。なお計算は x の正の方向に進めるので、 $A^{i-1,j,k}$ は既知である。同様の計算を i を1つ増して行ない、計算領域の岸側境界に達するまで行なう。これらの計算は、不規則波の各周波数毎に行なう。

(2) 計算領域、沖波、境界条件

具体的な計算例として、図-2 のような領域を考える。水深は、流れの効果のみを調べるために一様 (50 m) と

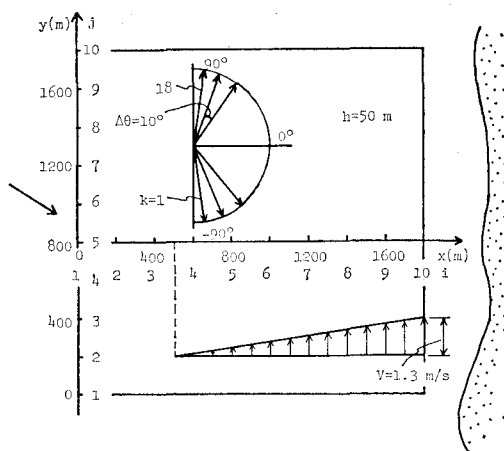


図-2 計算領域

した (このモデルでは任意の水深変化を考慮することができる)。沖波としては、光易型方向スペクトルを与えた。有義波周期 $(T_{1/3})_0 = 7.0$ sec, 有義波高 $(H_{1/3})_0 = 3.0$ m とした。波高は $\pm 90^\circ$ の範囲を 10° 毎に18等分した。周波数は、方向スペクトル密度の値が $10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{sec}$ 以上の周波数範囲 $0.09 \sim 0.71$ Hz を、その対数が等分割になるように19分割した。 $S_{\max}$ は10とした。

計算は x 方向に前進型であるので、岸側境界 ($i=10$) では境界条件を与える必要はない。問題は側方境界で与える条件であるが、ここでは永井⁷⁾の結果を参考にして内外同一の wave action を有するという次の条件を用いた。

$$\begin{aligned}
&A^{i0k} = A^{i1k}, \quad A^{i11k} = A^{i10k} \quad (i=1 \sim 10, k=1 \sim 18) \\
&\dots\dots\dots (10)
\end{aligned}$$

また θ に関しては、沖方向に向うエネルギーは無視することとし、次のようにした。

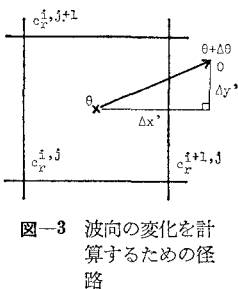
$$\begin{aligned}
&A^{i,j0} = A^{i,j19} = 0 \quad (i=1 \sim 10, j=1 \sim 10) \\
&\dots\dots\dots (11)
\end{aligned}$$

(3) v_θ の計算

v_θ の計算には特別の注意が必要である。式 (7) でわかるように v_θ には $\partial\theta/\partial x, \partial\theta/\partial y$ の項が含まれている。これらは、 θ の変化の計算をしてはじめて与えられるものである。この問題は規則波の場合にもあり、流れによる屈折に固有の問題である。水深の変化のみによる屈折の場合は、式 (6) において $U=V=0$ となり、 θ に無関係になるため、波向 θ の変化を与える式には θ の勾配が含まれていない (式 (3) の v_θ 参照)。この問題を数値計算上で近似的に解決するために、ここでは規則波の場合について行なったのと同様の方法¹¹⁾を用いる。ただし規則波の場合は、 c_r の勾配の項においてのみ θ の変化を考慮すればよかったが、この場合には $U + c_{gr}$ で与えられる運動点から見た v_θ であるので、 θ の勾配の項も陽に現れている (式 (7))。

具体的には、 $A^{i,j,k}$ の定義点から規則波の場合の波向の変化を求める経路

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= U + c_r \cos \theta \\ \frac{dy}{dt} &= V + c_r \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$



を用いて、 Δt (ここでは 20 sec) 時間後の点 0 を求める (図-3)。この間の θ の変化を次式で求める¹²⁾。

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial U}{\partial y} \cos \theta \right) \cos \theta \\ &+ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial V}{\partial y} \cos \theta \right) \sin \theta \\ &+ \left(\frac{\partial c_r}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial c_r}{\partial y} \cos \theta \right)^* \dots (13) \end{aligned}$$

ただし、この場合、 $\partial c_r / \partial x$ 、 $\partial c_r / \partial y$ の計算では θ は一定としている。こうして得られた $\Delta \theta$ から、式 (7) の $\partial c_r / \partial x$ 、 $\partial c_r / \partial y$ の計算の際の θ の変化および $\partial \theta / \partial x$ 、 $\partial \theta / \partial y$ を与えた¹⁴⁾。

3. 数値計算例と考察

図-4 は、沖側境界での主波向 $(\theta_p)_0 = -60^\circ$ の不規則波の方向スペクトル分布の変化を示す。図の (1) が沖側境界での分布、(2) が $x=1,700$ m での分布である。 -90° よりさらに負で値の大きい波向成分は、沖側に向うので無視している。流れは図-2 に示すように、 $x=500$ m から増加し $x=1,800$ m で 1.3 m/s の三角形分布の沿岸方向流れ (y の正の向き) である (流速分布は任意のものを与えることが出来るが、ここでは簡単のために y 方向に変化しない三角形分布のものをを用いている)。したがって $\theta < 0$ の成分が流れと対向している。沖波、流れ、水深いずれも y 方向には変化しないので、方向スペクトル分布も y 方向には変化しない。図から明かなように、流れによる屈折後の方向スペクトルは変形し、 $\theta < -55^\circ$ でのエネルギーの集中、主波向の -60° から -55° への移動、ピークエネルギーの増加が見られる。これは、屈折による波向の正側への変化と、 $\theta < 0$ の成分の逆流による波高の増加の結果と考えられる。 $\theta > 0$ の成分は順流によって波向がさらに正側に変化しているはずであるが、図では明らかない。

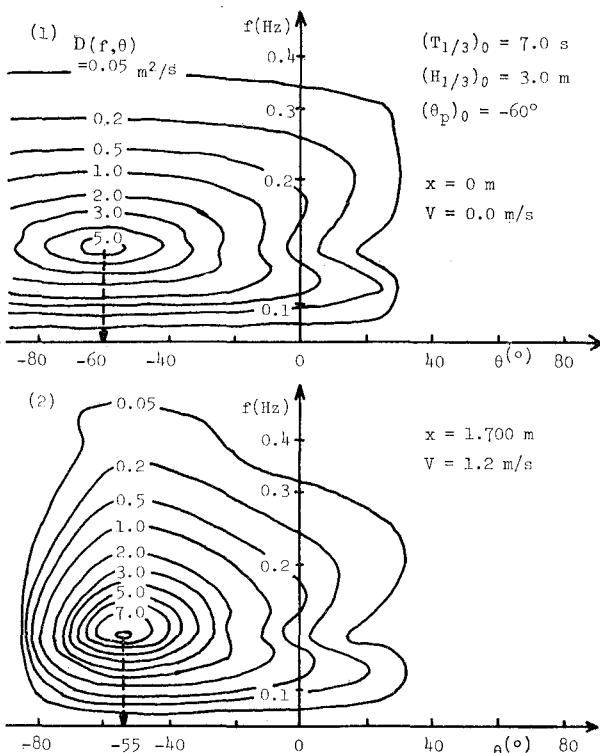


図-4 三角形分布流れによる方向スペクトル分布の変化 (沖波主波向 -60°)

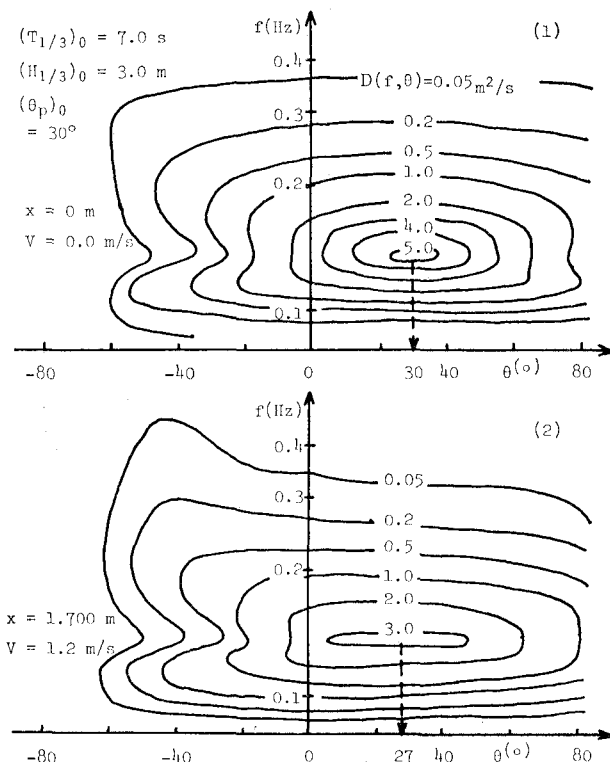


図-5 三角形分布流れによる方向スペクトル分布の変化 (沖波主波向 $+30^\circ$)

* 文献 4) では Arthur の式¹³⁾を用いたため、 $\partial \theta / \partial x$ 、 $\partial \theta / \partial y$ の項を含んでいたが、この式は明らかに間違いで、式 (13) を用いるべきである。

図-5は、沖側境界で主波向が $+30^\circ$ の場合の同様の变化を示している。この場合には $\theta < 0$ の成分の変化は顕著でないが、 $\theta > 0$ では全体に値が小さくなっている。これは $\theta > 0$ の成分の順流による波高の減少によるものと考えられる。ただし、主波向はわずかではあるが減少している。

次に以上のような方向スペクトル分布の変化から有義波高の変化を求めた。有義波高は方向スペクトル分布を周波数、波向に関して積分し、その平方根を4倍して求めた。図-6は沖側境界での主波向が -30° の場合、図-7は $+30^\circ$ の場合である。図中には、規則波としての波高の変化をも示している。これは岩垣ら⁴⁾の手法を用い、沖側境界での波高、周期を有義波高、有義波周期にとり、波向も主波向にとって計算した規則波としての波高の変化を求めたものである。主波向が流れと対向する図-6の場合は、有義波高は規則波以上に増加する一方、主波向にとって流れが順流になる図-7では、規則波以上に有義波高が減少している。このような計算は他の主波向に対しても行なったが、一般的に有義波高に関しては、主波向と流れの方向の関係から規則波の場合に予想される変化が、規則波より顕著に起こるようである。

しかしながら、波向に関してはそれほど簡単ではない。代表波向をどのように定義するか自体問題であるが、波向に関する方向スペクトルの一次モーメントを代表波向

としたところ、規則波としての波向の変化とは異なった変化をすることがある。例えば沖側境界での主波向が $+30^\circ$ の場合、規則波の場合は順流によってさらに波向が増加するが、不規則波の代表波向は、 $\theta < 0$ の成分の逆流によるエネルギーの増加によって、逆に減少する。

4. あとがき

以上、流れによる（同時に水深変化による）不規則波の屈折による方向スペクトル分布の変化を計算する数値計算モデルについて述べたが、いくつかの問題もある。とくに、このモデルでは、不規則波をスペクトルで表現する場合に共通の問題として、各成分波が独立して変形すると仮定している。また側方境界条件についても議論の余地がある。さらに実際の計算では連立方程式を解く必要があるが、その際生じる ill-condition の出現およびそれと本来の波と流れの干渉の力学的機構との関連の解明の問題がある。

なお、この研究の一部は文部省科学研究費自然災害特別研究(1)(大阪大学工学部榎本亨教授代表)によったことを付記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart: The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents, J.F.M., Vol. 10, pp. 529~549, 1961.
- 2) Noda, E. K., C. J. Sonu, V. C. Rupert and J. I. Collins: Nearshore circulations under sea breeze conditions and wave-current interactions in the surf zone, Tetra Tech. Rep. TC-P-72-149-4, 1974.
- 3) Skovgaard, O. and I. G. Jonsson: Current depth refraction using finite elements, Proc. 15th Conf. Coastal Eng., pp. 721~737, 1976.
- 4) 岩垣雄一・酒井哲郎・岡 幸夫: 流れによる波の屈折と波高変化, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 25~29, 1977.
- 5) James, E. C., J. I. Collins, P. A. Wagner and M. A. Tayfun: Ocean wave spectrum modifications by spatially varying currents and bottom topography, Tetra Tech. Rep. TC-493-1, 1977.
- 6) Karlsson, T.: Refraction of continuous ocean wave spectra, Proc. ASCE, WW4, pp. 437-448, 1969.
- 7) 永井康平・堀口孝男・高井俊郎: 方向スペクトルをもつ沖波の浅海域における伝播の計算について, 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 249~253, 1974.
- 8) Bretherton, F. P. and C. J. R. Garrett: Wave trains in inhomogeneous moving media, Proc. Roy. Soc., A 302, pp. 529~554, 1969.

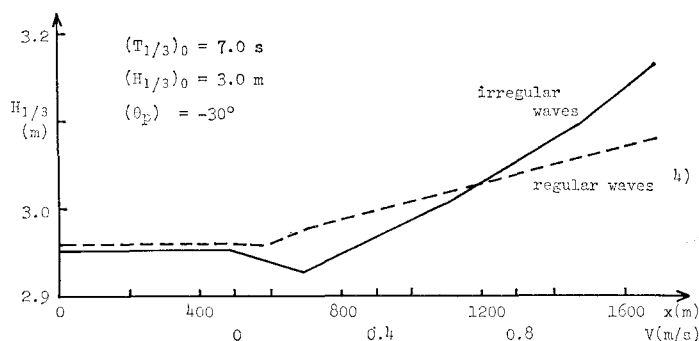


図-6 三角形分布流れによる有義波高の変化 (沖波主波向 -30°)

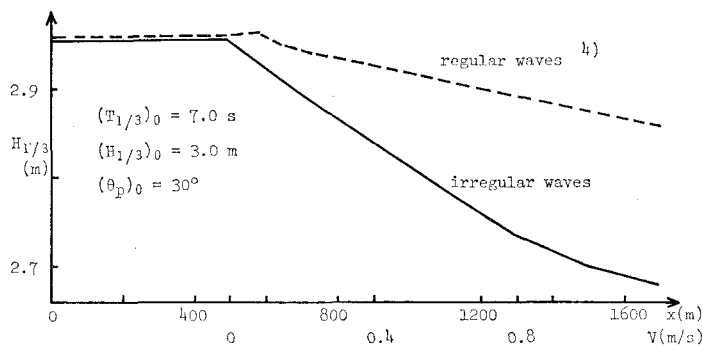


図-7 三角形分布流れによる有義波高の変化 (沖波主波向 $+30^\circ$)

- 9) Jonsson, I. G.: A new proof of an energy equation for surface gravity waves propagating on a current, Basic Res., Prog. Rep. 23, Coastal Eng. Lab., Tech. Univ. Denmark, pp. 11~19, 1971.
 - 10) Phillips, O. M.: The Dynamics of the Upper Ocean, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, p. 23, 1977.
 - 11) 酒井哲郎・岩垣雄一・杉本俊一: 流れによる波の屈折の数値計算の改良, 第33回年次学術講演会講演概要集, 第2部, pp. 772~773, 1978.
 - 12) Iwagaki, Y., T. Sakai, T. Tsuda and Y. Oka: Wave refraction and wave height variation due to current, Bull. Disaster Prev. Res. Inst. Kyoto Univ., Vol. 27, p. 81, 1977.
 - 13) Arthur, R. S.: Refraction of shallow water waves: The combined effect of currents and underwater topography, Trans. A.G.U., Vol. 31, No. 4, pp. 549~552, 1950.
 - 14) 小関仁彦: 流れによる不規則波の屈折の数値計算手法の研究, 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻修士論文, 1981.
-