

円筒波の回折とその応用

三 井 宏*・宮 本 佳 明**

1. 緒 言

円筒波入射の場合の回折・散乱を取扱う問題としては、高速道路、新幹線のような線源騒音に対する遮蔽壁の効果、および海中発破やダム上流で崩壊土砂により発生した波の回折現象などがある。海岸工学の分野では、平面波が入射して発生した防波堤や人工島などの周辺の回折・散乱波（1次回折波）が円筒波に近い性質を持っているので、これが入射波となって再び回折・散乱を生じる2次回折波の問題に適用できる。

本研究では、円筒波が入射する場合の単純隅角周辺の回折波、散乱波に対する厳密解および近似解を求め、その近似解の適用範囲を調べる。ついで、これらの式を2次回折波に適用し、模型実験結果と比較して、その適合性を検討する。

2. 円筒波入射の場合の単純隅角周辺の回折・散乱解

本章で示す円筒波入射による単純隅角周辺の波の厳密解および近似解は、電磁波の理論解¹⁾を水波に適用したものである。

図-1 に示すような単純隅角に対して、点源 (r_0, α) から円筒波 $H_0^{(2)}(kR)$ が入射するものとする。ここで、 $H_0^{(2)}(kR)$ は0次の第2種 Hankel 関数である。 kR が

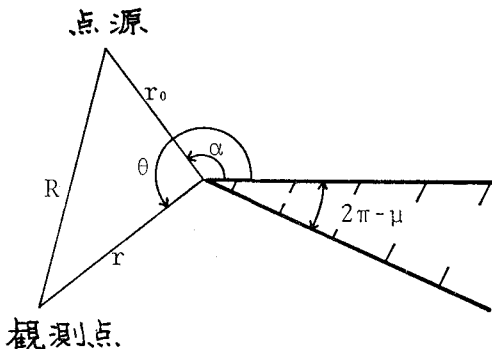


図-1 単純隅角の座標

大きいときの漸近展開は

$$H_0^{(2)}(kR) = \sqrt{2/\pi kR} \cdot \exp\{-i(kR - \pi/4)\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

となる。ここで、 $R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \alpha)}$ である。式からわかるように、この波は点源から遠方に離れるに従って、 $\sqrt{kR}$ に反比例する振幅をもち、その波峰線は点源を中心として、同心円状に外方へ進む波長 $2\pi/k$ の円筒波である。

この円筒波を入射波とした場合の隅角周辺の波の厳密解は、次式のように整次および非整次の Hankel 関数と Bessel 関数をもった級数合計の式となる²⁾。

$$f = 2\pi/\mu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cdot \cos(n\pi\theta/\mu) \cdot \cos(n\pi\alpha/\mu) \cdot S_{n\pi/\mu}(kR) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $\epsilon_0 = 1, \epsilon_{1,2,3,\dots} = 2$ で S_r は次式の定義による。

$$\begin{aligned} S_r(kR) &= J_r(kr) \cdot H_0^{(2)}(kr_0) \quad (r_0 \geq r) \\ &= J_r(kr_0) \cdot H_0^{(2)}(kr) \quad (r > r_0) \end{aligned}$$

円筒波入射による場合も、平面波入射による場合と同様に、隅角周辺の波は反射領域、入射領域、回折領域と3領域に分けられ、各領域の式は

反射領域 ($0 \leq \theta < \pi - \alpha$);

$$f = H_0^{(2)}(kR) + H_0^{(2)}(kR_1) + \chi_0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

入射領域 ($\pi - \alpha < \theta < \pi + \alpha$);

$$f = H_0^{(2)}(kR) + \chi_0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

回折領域 ($\pi + \alpha < \theta \leq \mu$);

$$f = \chi_0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここに、 $R_1 = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta + \alpha)}$ である。

このように、(2) 式を入射項、反射項および散乱項 χ_0 に分け、 r および r_0 が十分大きい場合の次の近似式³⁾が与えられている。

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \frac{e^{-ik(r+r_0)}}{\pi k \sqrt{rr_0}} \cdot \frac{\pi}{\mu} \cdot \sin \frac{\pi^2}{\mu} \left[\left\{ \cos \frac{\pi^2}{\mu} - \cos \frac{\pi(\theta - \alpha)}{\mu} \right\}^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \cos \frac{\pi^2}{\mu} + \cos \frac{\pi(\theta + \alpha - \mu)}{\mu} \right\}^{-1} \right] \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

なお、 $\alpha = 0, \mu$ の場合は上式全体に係数 0.5 がかかる。

上式は隅角点および各境界線（反射・入射領域の境界線および入射・回折領域の境界線）近傍の地点では、近似精度が悪くなり、過大な散乱振幅を与える。ただし、

* 正 会 員 工 博 徳島大学教授 工学部土木工学科

** 学生会員 徳島大学大学院工学研究科

各境界線上では、(3)~(5)式のかわりに次式があたえられている。

反射・入射領域境界線上 ($\theta=\pi-\alpha$);
$$f=H_0^{(2)}(kR)+0.5H_0^{(2)}(kR_1) + \pi/\mu \cdot \exp\{-ik(r+r_0)\}/\pi k\sqrt{rr_0} \times \left[\frac{\sin(\pi^2/\mu)}{\cos(\pi^2/\mu)-\cos\{\pi(\pi-2\alpha)/\mu\}} - 0.5 \cot \frac{\pi^2}{\mu} \right] \dots\dots\dots (7)$$

入射・回折領域境界線上 ($\theta=\pi+\alpha$);
$$f=0.5H_0^{(2)}(kR_1)+\pi/\mu \cdot \exp\{-ik(r+r_0)\}/\pi k\sqrt{rr_0} \times \left[\frac{\sin(\pi^2/\mu)}{\cos(\pi^2/\mu)-\cos\{\pi(\pi+2\alpha)/\mu\}} - 0.5 \cot \frac{\pi^2}{\mu} \right] \dots\dots\dots (8)$$

壁面沿いに隅角点方向に入射する場合の入射・回折領域境界線上 ($\alpha=0, \theta=\pi; \alpha=\mu, \theta=\mu-\pi$);
$$f=0.5[H_0^{(2)}(kR_1) - \exp\{-ik(r+r_0)\}/\pi k\sqrt{rr_0} \cdot \pi/\mu \cdot \cot(\pi^2/\mu)] \dots\dots\dots (9)$$

沖から隅角点に向かい壁面沿いに入射する場合のその壁面上 ($\alpha=\pi, \theta=0; \alpha=\mu-\pi, \theta=\pi$);
$$f=H_0^{(2)}(kR_1) - \exp\{-ik(r+r_0)\}/\pi k\sqrt{rr_0} \cdot \pi/\mu \cdot \cot(\pi^2/\mu) \dots\dots\dots (10)$$

つぎに、散乱項のみについて、厳密解と近似解とを比較してみる。図-2(a), (b)は、それぞれ、半無限防波堤において点源からの距離が5波長および10波長の場合の厳密解と近似解による散乱振幅の計算結果である。パラメータには、 α と r/L をとってある。厳密解の計算では(3)~(5)式に基づき、あらかじめ(2)式から $H_0^{(2)}(kR)$ や $H_0^{(2)}(kR_1)$ を差引いてある。境界線上および境界線から離れた地点では、両者は良く一致しているが、境界線近傍では、近似解が過大となっている。なお、散乱振幅は $y=0$ に関して線対称であり、領域 $y>0$ ($0\leq\theta<\pi$)の散乱振幅はこれらの図と同様である。

散乱項の近似式の適用範囲を決定するため、平面波入射の場合と同様な手法を用いてみる。すなわち、入射・回折領域境界線ごく近傍の入射領域では、入射円筒波の波峰線と回折波の波峰線は並進して交わらない。境界線からある程度離れた地点で初めてこれらの波峰線は交わり、極大波高を生じる(第1次極大波高)。この第1次極大波高発生地点から境界線までの波峰線並進領域は位相差によって波高が滑らかに変化し、回折領域から入射領域へ移行する遷移領域と考えられる。この遷移領域は以下のようにして求められる。すなわち(6)式の[]

内は負になるので、 χ_0 の位相は $-k(r+r_0)\pm\pi$ となる。入射円筒波の位相は(1)式より $-(kR-\pi/4)$ であるから、両者を等しいと置く

$$k(r+r_0)-\pi=kR-\pi/4 \dots\dots(11)$$

となる。原点を防波堤先端と点源を結ぶ線分の中央にとり、X軸を入射・回折境界線上に点源方向にとり、Y軸をこれと直角方向にとって座標変換すると次式となり、双曲線であることが判明する。

$$k^2X^2/\{(kr_0-3\pi/4)/2\}^2 - k^2Y^2/(\sqrt{3\pi/8}\cdot(kr_0-3\pi/8))^2=1 \dots\dots\dots(12)$$

図-2に記入してある矢印は、この式に基づく双曲線位置を示し、近似解はこの地点から境界線に近くなると過大になることがわかる。なお、この線上での近似解による散乱波高の相対誤差(回折係数の差=|厳密解-近似解|/防波堤先端波高)をまとめたのが表-1である。表-1によれば、 $r_0<r$ の場合に相対誤差が大きいが、この計算範囲での相対誤差は0.01以内である。なお、平面波入射の場合は、この遷移領域は放物線になり、この線上での相対誤差は0.01以内であ

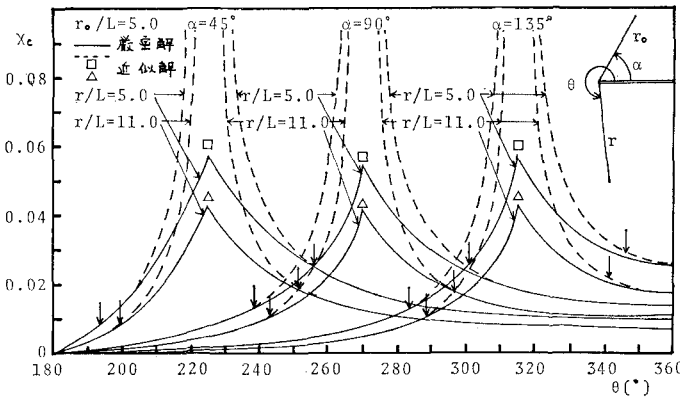


図-2(a) $r_0/L=5.0$ の場合の厳密解と近似解による散乱振幅

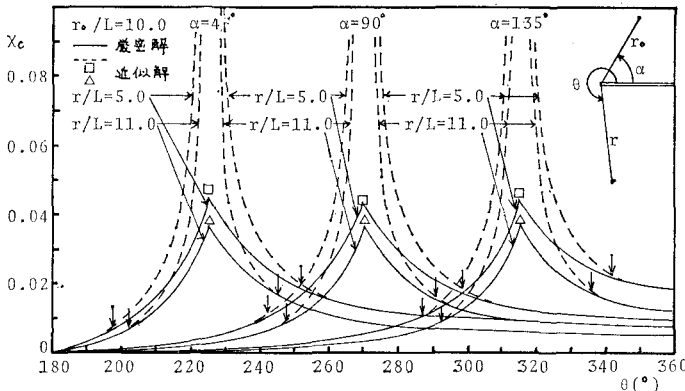


図-2(b) $r_0/L=10.0$ の場合の厳密解と近似解による散乱振幅

表-1 双曲線上の散乱振幅の相対誤差

点源からの距離 r_0/L	2番堤先端波高 $H_0^{(2)}(kr_0)$	入射角 $\alpha(^{\circ})$	双曲線との観測点の座標 $r/L, \theta(^{\circ})$	厳密解 $\times 10^{-2}$	近似解 $\times 10^{-2}$	相対誤差
5.0	0.1423	45	5.0 256.48	2.357	2.458	.007
			11.0 251.85	1.785	1.884	.007
		90	5.0 301.48	2.278	2.403	.009
			11.0 296.85	1.735	1.834	.007
		135	5.0 346.48	2.809	2.915	.007
			11.0 341.85	2.035	2.136	.007
10.0	0.1007	45	5.0 252.26	1.850	1.952	.010
			11.0 246.71	1.501	1.589	.009
		90	5.0 297.26	1.799	1.901	.010
			11.0 291.71	1.455	1.543	.009
		135	5.0 342.26	2.117	2.222	.010
			11.0 336.71	1.639	1.727	.009

ることがわかっている。

3. 2次回折波への応用

(1) 理論モデル

図-3に示す2重半無限防波堤 (Case I), および図-4に示す人工島背後の2次回折波 (Case II) に円筒波入射の回折解を応用してみる。沖側の隅角や防波堤 (1番堤と呼ぶ) で発生した回折波は円筒波に近い性質を持っているので, 2番堤に対しては円筒波入射と仮定する。ただし, (1)~(10)式は単位円筒波 $H_0^{(2)}(kr)$ の入射によるものであるから, 2番堤先端において, 1次回折波の波高と位相に一致するような円筒波に換算する必要がある。このような換算円筒波を用いると, 2番堤背後の2次回折波は次式で示される。

$$\chi_2(r, \theta) = \chi(r_0, \theta_1) / H_0^{(2)}(kr_0) \cdot \chi_0(r, \theta) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに, χ_2 は2次回折波, χ は2番堤先端における1次回折波, $H_0^{(2)}$ は1番堤先端を点源とする2番堤先端における単位円筒波, χ_0 は $H_0^{(2)}$ 入射による2番堤背後の回折波であり, $\theta_1 = \mu_1 - (\pi - \alpha)$ (Case I), $\theta_1 = \mu_1$ (Case II) である。

計算対象が回折領域なので, 厳密解による場合は (13) 式中の χ_0 のかわりに (2) 式の f を用い, 近似解による場合は (6) 式の χ_0 を用いればよい。

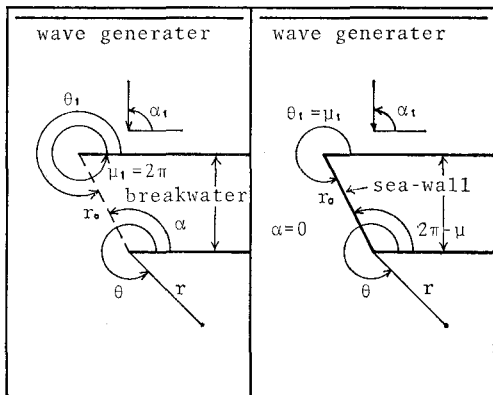


図-3 理論モデル
(Case I)

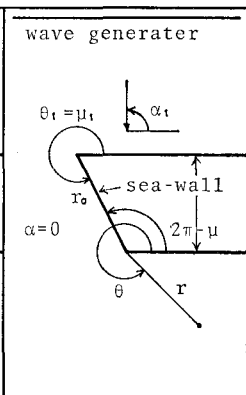


図-4 理論モデル
(Case II)

まず, 平面波入射が1番堤により回折された波 (1次回折波) については, 厳密解と近似解をすでに発表してある^{6), 7)}。

また, 単純隅角の場合において各壁面の反射率が異なる場合の取扱い方法も述べである⁸⁾。なお, 半無限防波堤に対する厳密解に必要な Fresnel 積分については, 次式に示すような関数近似を用いて, 実用的には十分な精度で計算を簡単化する方法が採用されている⁹⁾。すなわち, Fresnel 積分を

$$C = \int_0^{|\sigma|} \cos \frac{\pi^2}{2} u^2 du, \quad S = \int_0^{|\sigma|} \sin \frac{\pi^2}{2} u^2 du \quad \dots\dots\dots (14)$$

と定義する。ここに, $\sigma = 2\sqrt{kr/\pi} \cdot \cos \{0.5(\theta - \alpha)\}$ である。上式を関数近似した式が次式である。

$$\begin{aligned} C &= 0.5 + f(\sigma) \cdot \sin(\pi\sigma^2/2) - g(\sigma) \cdot \cos(\pi\sigma^2/2) \\ S &= 0.5 - f(\sigma) \cdot \cos(\pi\sigma^2/2) - g(\sigma) \cdot \sin(\pi\sigma^2/2) \\ f(\sigma) &= (1 + 0.926\sigma) / (2 + 1.792\sigma + 3.104\sigma^2) + \varepsilon(\sigma) \\ g(\sigma) &= (2 + 4.142\sigma + 3.492\sigma^2 + 6.670\sigma^3)^{-1} + \varepsilon(\sigma) \\ |\varepsilon(\sigma)| &\leq 2 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

つぎに, 2番堤背後の回折領域の波については, 本文中に示した厳密解 (2) 式と近似解 (6) 式を換算式 (13) 式に代入して求める。

計算はすべて平面波入射角 α_1 が 90° の場合のみを対象とし, 2次入射角 α は, Case I について 90° (Case I-1), 78.82° (Case I-2), 68.44° (Case I-3), 60° (Case I-4), Case II については $2\pi - \mu = 100^{\circ}$ (Case II-1), 120° (Case II-2), 135° (Case II-3) のうち Case II-2 のみについて厳密解を計算した。この理由は, Case I では (2) 式中の $S_{n\pi/\mu}$ の次数が $\mu = 2\pi$ であるから $n/2$ となり, S_0 と $S_{1/2}$ を計算すれば, 漸化式によって全ての $S_{n/2}$ が計算できるが, Case II では $2\pi - \mu$ が 100° の場合 $n\pi/\mu = 9n/13$, 120° の場合 $n\pi/\mu = 3n/4$, 135° の場合 $n\pi/\mu = 13n/17$ となり, $2\pi - \mu$ が 100° および 135° の場合の計算が非常に複雑になるからである。なお, 近似解は全てにわたって計算した。また, 級数合計の繰返

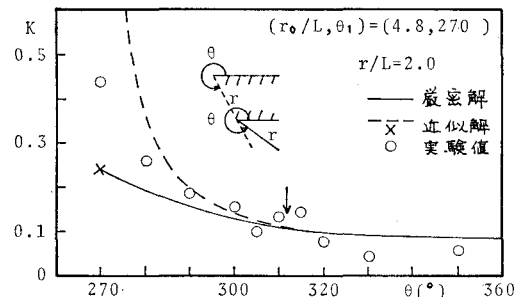


図-5 Case I-1 の波高分布

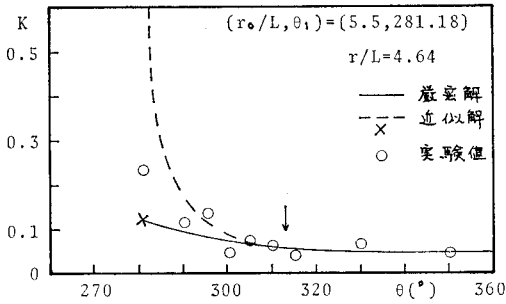


図-6 Case I-2 の波高分布

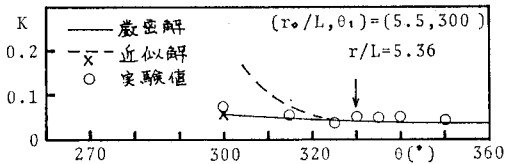


図-7 Case I-4 の波高分布

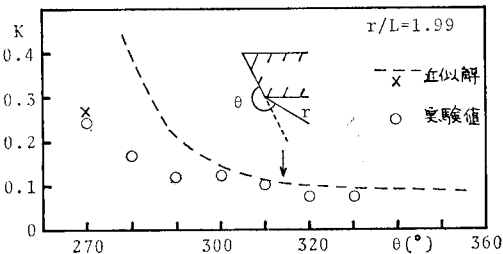


図-8 Case II-1 の波高分布

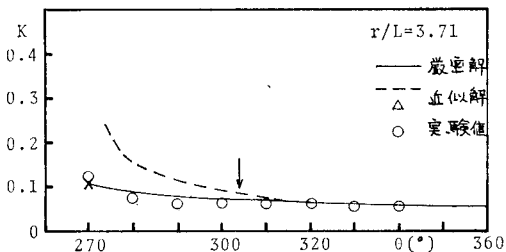


図-9 Case II-2 の波高分布

しは, $S_r \leq 1.0 \times 10^{-10}$ になるまで行った. 厳密解と近似解の計算結果を図-5~9に示す.

(2) 実験値と理論解の比較

実験は長さ 30 m, 幅 15 m のコンクリート製平面水槽で行い, 実験諸元は水深 20 cm, 入射波高 6.0 cm, 周期 0.85 sec, 入射角 $\alpha_1 = 90^\circ$ である. 回折波高測定点数は 12~30 点である.

図-5~9 は, それぞれ, Case I において 2 番堤先端が入射・回折領域境界線上にある場合, 遷移領域内にある場合, 遷移領域外にある場合, Case II において 2 番隅角先端が遷移領域内にある場合, 遷移領域外にある場合である. なお, 厳密解を実線, 近似解を破線で示し, 図中の×印は近似解における入射・回折境界線上の値, ○

印は実験値, 矢印は (12) 式による双曲線の位置を示す.

図-5~7, すなわち Case I-1, I-2, I-4 のいずれの場合も境界線から十分離れた領域では, 厳密解および近似解両者とも実験値とよく一致しており, 境界線近傍においては, 実験値は厳密解に近い値になっている. 図-8, Case II-1 では, 厳密解による計算値がないため, 実験値は近似解とのみ比較せざるを得ないが, 双曲線領域内においても, 境界線上と双曲線上の近似解から内挿される値にほぼ等しく, 他の領域では近似解によく一致している. 図-9, Case II-2 でも, 理論解と実験値は同様な傾向を示している.

4. 結 言

円筒波が入射する場合の回折・散乱波の理論解を提示し, 2 次回折波に適用して実験結果と比較した. 以下に要約するとともに, 今後の問題点を示す.

(1) 円筒波入射の場合の単純隅角周辺における波の散乱項の厳密解と近似解による散乱振幅の計算結果は, 境界線上および境界線から離れた地点では, 良く一致しているが, 境界線近傍では近似解が過大になる. この近似解の適用範囲を決定する双曲線の式 (12) を提案した.

(2) 2 次回折波に適用した結果, 理論計算結果は実験値と良く一致した.

(3) 今後の問題点として, 1 次回折波の入射・回折境界線近傍の遷移領域内 (放物線で示される) に 2 次回折波を発生させる構造物の先端が位置する場合が残されている. この領域内での波は, 平面波と円筒波の中間の性質を持つと考えられる. したがって, このような場合に対しては, 2 次回折波を発生させる構造物への入射円筒波の点源を, 1 次回折波を発生させる構造物の先端とせず, さらに沖側 (無限遠方も含む) にとれば, 平面波入射と円筒波入射との中間の性質を 1 次回折波は持つことになる. 現在, このような方法を用いて計算を実行中である.

参 考 文 献

- 1) Bowman, J. J., Senior, T. B. A. and P. L. E. Uslenghi (editor): Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes, North-Holland (Amsterdam), pp. 252~269, 1969.
- 2) 前出 1).
- 3) 前出 1).
- 4) 三井 宏: 沿岸の開発・保全と環境アセスメント, 土木学会関西支部昭和 53 年度講習会テキスト, 1978.
- 5) 前出 4).
- 6) 三井 宏・村上仁士: 海岸構造物不連続部の波高分布について (第 2 報), 第 14 回海講集, pp. 53~59, 1967.
- 7) 三井 宏・越智 裕・川村勇二: 単純隅角周辺における波の近似解とその応用, 第 25 回海講集, pp. 94~97, 1978.
- 8) 前出 4).
- 9) 三井 宏: 線形理論によるマッハ型反射波の考察, 第 34 回年次講演集, 第 2 部, pp. 645~646, 1979.