

有限振幅波の浅水変形と屈折係数

岩垣雄一*・塩田啓介**・土居宏行***

1. 緒 言

浅海における波の屈折に伴う変形を論ずる場合には、水深変化と同時に波向線間隔の変化が波高におよぼす影響を考慮する必要がある。

水深変化による一次元的な波浪変形である浅水変形については、有限振幅としての波の非線型性を評価するという立場で、Le Méhauté-Webb¹⁾、岩垣・酒井^{2),3)}、山口・土屋⁴⁾、首藤⁵⁾、あるいは最近では酒井・Battjes⁶⁾らによって幾多の研究が行われてきた。彼らは有限振幅波理論として、ストークス波やクノイド波あるいは Cokelet の理論⁷⁾を用いて計算を行っている。それらによると、水深減少に伴う波高の増大を表わす曲線は各理論によって若干異なるが、いずれも砕波点に近づくとき波高変化に及ぼす波の非線型効果が顕著となり、沖波との波高比は微小振幅波理論によるものよりかなり大きくなることが明らかにされている。

一方、屈折に伴う波向線間隔変化が波高に及ぼす影響については、微小振幅波理論を用いたエネルギーフラックス法によると、波高は波向線間隔の 1/2 乗に逆比例することがわかっている。しかし、この場合も浅水変形と同様に、砕波点に近づくにつれて波の非線型効果が顕著になることが予想される。岩垣⁸⁾はハイパボリック波を用いて計算を行い、波高水深比が小さい場合には、波高は波向線間隔の 2/3 乗に逆比例して増加することを示している。また佐伯⁹⁾は孤立波のエネルギーフラックス式を導くと同時に、実験によって検討を行っているが、実験値は理論よりかなり小さな値をとっている。首藤⁵⁾は水路幅とともに水深が変化する場合について、非線型長波の変形式を与えている。

本研究では、特に、従来明らかにされていない波向線間隔が波高変化に及ぼす非線型効果について検討するため、まずエネルギーフラックス法により水深および波向線間隔を含んだ有限振幅波の変形式を誘導する。ついで、水深あるいは水槽幅を漸減させた場合の波高変化に

関する実験を行い、理論値と比較する。さらに、非線型効果を考慮した波高変化算定式を浅水係数と屈折係数に分離した形で与えることを試みる。

2. 波向線間隔を考慮した有限振幅波の変形式

(1) ストークス波の場合

土屋・山口⁴⁾によると、波速の第 2 定義に基づくストークス波の第 4 次近似解の単位時間、単位幅あたりのエネルギーフラックス $\bar{W}_s$ は次式で示される。

$$\begin{aligned} \bar{W}_s = & \frac{\rho c^3 \lambda^2}{8k} \left[A_{11}^2 (2kh + \sinh 2kh) \right. \\ & + 8\lambda^2 \left\{ kh \left(A_{02}^2 + \frac{1}{2} A_{11} A_{13} + A_{22}^2 \right) \right. \\ & + \frac{A_{11}^2 B_{22}}{8} + A_{02} A_{11} \cosh kh \\ & + \frac{A_{11} A_{22}}{2} \cosh kh + \frac{A_{11} A_{13}}{4} \sinh 2kh \\ & + \frac{3}{16} A_{11}^2 \sinh 2kh + \frac{A_{11}^2 B_{22}}{8} \cosh 2kh \\ & \left. \left. + \frac{A_{11} A_{22}}{2} \cosh 3kh + \frac{A_{22}^2}{4} \sinh 4kh \right\} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 h : 水深、 ρ : 流体の密度、 c : 波速、 λ : 波形勾配に相当する微小量、 k : 波数 $= 2\pi/L$ 、 L : 波長、 A_{ij} および B_{ij} : kh のみの関数¹⁰⁾である。

$\bar{W}_s$ の計算においては次の 2 つの式が必要である。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{\tanh kh}{kh} (1 + \lambda^2 c_1)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\pi H}{L} = B_{33} \lambda^3 + \lambda \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 g : 重力加速度、 H : 波高、 c_1 および B_{33} : kh のみの関数¹⁰⁾である。沖波のエネルギーフラックス $\bar{W}_{s0}$ は式 (1) より次のように求まる。

$$\bar{W}_{s0} = \frac{\rho c_0^3 L_0}{8\pi} \lambda_0^3 \left(1 + \frac{3}{4} \lambda_0^2 \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 λ_0 および L_0 は深海波の λ および L である。また式 (2) および式 (3) はそれぞれ次式のようになる。

* 正 会 員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科
 ** 正 会 員 工修 川崎製鉄(株)エンジニアリング事業部
 *** 学生会員 京都大学大学院 工学研究科

$$\frac{L_0}{T^2} = \frac{g}{2\pi} (1 + \lambda_0^2) \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\pi H_0}{L_0} = \frac{3}{8} \lambda_0^3 + \lambda_0 \dots\dots\dots (6)$$

ここに, T : 周期, H_0 : 沖波波高である.

いま2本の波向線で輸送される波のエネルギーは保存され, 波向線を横切ってエネルギーの出入りがないものとすれば, 次の関係式が成り立つ.

$$b_0 \bar{W}_0 = b \cdot \bar{W} \dots\dots\dots (7)$$

ここに, b_0 および b : 深海域および浅海域における波向線間隔, $\bar{W}_0$ および $\bar{W}$: 深海域および浅海域における波のエネルギーフラックスである.

式(7)における $\bar{W}_0$ および $\bar{W}$ にそれぞれ $\bar{W}_{s0}$ および $\bar{W}_s$ を代入して変形すると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} & \lambda_0^3 \left(1 + \frac{3}{4} \lambda_0^2 \right) \frac{b_0}{b} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{L}{L_0} \right)^4 \lambda^2 \left[A_{11}^2 (2kh + \sinh 2kh) \right. \\ & \quad + 8\lambda^2 \left\{ kh \left(A_{02}^2 + \frac{1}{2} A_{11} A_{13} + A_{22}^2 \right) \right. \\ & \quad + \frac{A_{11}^2 B_{22}}{8} + A_{02} A_{11} \cosh kh \\ & \quad + \frac{A_{11} A_{22}}{2} \cosh kh + \frac{A_{11} A_{13}}{4} \sinh 2kh \\ & \quad + \frac{3}{16} A_{11}^2 \sinh 2kh + \frac{A_{11}^2 B_{22}}{8} \cosh 2kh \\ & \quad \left. \left. + \frac{A_{11} A_{22}}{2} \cosh 3kh + \frac{A_{22}^2}{4} \sinh 4kh \right\} \right] \\ & \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

式(2), (3), (5), (6) および (8) を用いれば, 沖波波形勾配と水深沖波波高比を与えることにより波高比 H/H_0 が求められる.

(2) ハイパボリック波の場合

クノイド波の適用領域では, その初等関数表現であるハイパボリック波を用いることにする. 著者ら¹¹⁾はすでに, 従来のハイパボリック波を再検討する意味で, Laitone¹²⁾ および Chappellear¹³⁾ のクノイド波理論から導いた新しいハイパボリック波の表現式を示した. ここでは, それらの波の諸量を用いて計算を行う.

a) Laitone のクノイド波に基づくハイパボリック波¹¹⁾の場合

エネルギーフラックス $\bar{W}_L$ は次式で示される.

$$\begin{aligned} \bar{W}_L &= \frac{2}{3} \rho g H^2 \sqrt{gh} \\ & \times \frac{1}{K} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} + \left\{ \frac{2}{5} - 3 \frac{1}{K} + \frac{15}{4} \left(\frac{1}{K} \right)^2 \right\} \frac{H}{h} \right] \\ & \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここに, K は第1種完全楕円積分であり, 次式で近似される.

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{H}{h} \right)^{0.5} T \sqrt{g/h} \left\{ 1 - 0.168 \left(\frac{H}{h} \right)^{1.124} \right\} \\ & \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

式(7)において $\bar{W}_0$ および $\bar{W}$ にそれぞれ $\bar{W}_{s0}$ および $\bar{W}_L$ を代入し, 式(5), (6) および (10) を用いて変形すれば次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{H}{H_0} &= \frac{3}{64} \pi^{-4/3} \left(\frac{h}{L_0} \right)^{-1} \left(\frac{H_0}{L_0} \right)^{-1} \left(\frac{b_0}{b} \right)^{2/3} \\ & \times \{ (1 + \lambda_0^2) \lambda_0^2 (4 + 3\lambda_0^2) \}^{2/3} \left\{ 1 - 0.168 \left(\frac{H}{h} \right)^{1.124} \right\}^{2/3} \\ & \times \left[1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} + \left\{ \frac{2}{5} - 3 \frac{1}{K} + \frac{15}{4} \left(\frac{1}{K} \right)^2 \right\} \frac{H}{h} \right]^{-2/3} \\ & \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

上式から波高比 H/H_0 を求めるには, 式(5), (6) および (10) を用いて繰返し計算を行う必要がある.

b) Chappellear のクノイド波理論に基づくハイパボリック波¹¹⁾の場合

エネルギーフラックス $\bar{W}_c$ は次式で示される.

$$\begin{aligned} \bar{W}_c &= \frac{2}{3} \rho g h^2 \sqrt{gh} \\ & \times \frac{1}{K} \left[L_1^2 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \right) + 13 L_1^2 L_3 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{L_1^3}{5} \left\{ 47 - 80 \frac{1}{K} + 15 \left(\frac{1}{K} \right)^2 \right\} \right] \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

この場合 K は, Laitone の場合の式(10)に対して次式で示される.

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{H}{h} \right)^{0.5} T \sqrt{g/h} \\ & \times \left\{ 1 + 0.106 \left(\frac{H}{h} \right)^{2.25} \right\} - 1.09 \left(\frac{H}{h} \right)^{1.24} \\ & \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

また, L_1 および L_3 は次式で近似される.

$$\begin{aligned} L_3 &= -0.5 \frac{H}{h} + 0.21 \left(\frac{H}{h} \right)^{1.59} - 0.33 \frac{1}{K} \left(\frac{H}{h} \right)^{0.85} \\ & \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{2}{17} \left\{ -(1 + 6L_3) + \sqrt{(1 + 6L_3)^2 + 17 \left(\frac{H}{h} \right)} \right\} \\ & \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

Laitone の場合と同様にして,

$$\begin{aligned} \frac{H}{H_0} &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{64\pi} \right)^{2/3} \left(\frac{h}{L_0} \right)^{-2/3} \left(\frac{H_0}{L_0} \right)^{-1} \left(\frac{b_0}{b} \right)^{2/3} \\ & \times (1 + \lambda_0^2) \{ \lambda_0^2 (4 + 3\lambda_0^2) \}^{2/3} \\ & \times K^{2/3} \left[L_1^2 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \right) + 13 L_1 L_3 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{L_1^3}{5} \left\{ 47 - 80 \frac{1}{K} + 15 \left(\frac{1}{K} \right)^2 \right\} \right]^{-2/3} \frac{H}{h} \\ & \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

が導かれるが, 上式から波高比 H/H_0 を求めるには, やはり式(5), (6), (13), (14) および (15) を用いて繰返し計算を行わねばならない.

3. 一様に水深と水槽幅が変化するときの波高変化の実験

実験は水深あるいは水槽幅を漸減させ、3つの組合せの場合に対して波高変化を測定した。

(1) 実験装置および方法

図-1 は水深が一定で水槽幅漸減の場合の実験装置の模式図である。水槽内に設けた側壁には厚さ 3 mm のアルミ板に補強材を組んだものを使用した。側壁の勾配 I は $1/20$ および $1/30$ の 2 ケースとした。波高計は容量式のものをを用いた。各地点で

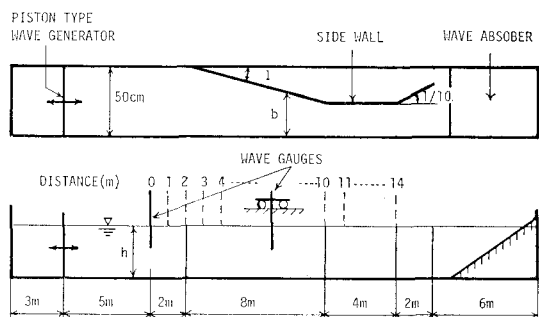


図-1 水深一定、水槽幅漸減の場合の実験装置

の波高は水槽末端の消波装置からの反射波の影響を除くために、最初の波が通過して数波目から 3 波の平均とした。水深漸減、水槽幅一定の場合の実験は $1/30$ 勾配の鋼製斜面を設置して行った。水深および水槽幅が共に漸減する場合の実験は、 $1/30$ 勾配斜面上に図-1 に示した側壁を勾配 $I=1/30$ に設置し行った。図-2 はこの場合

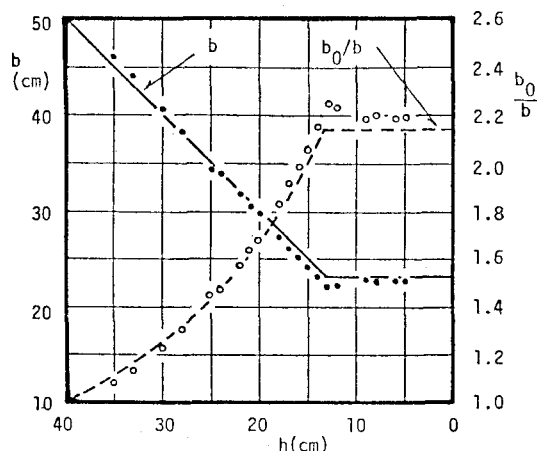
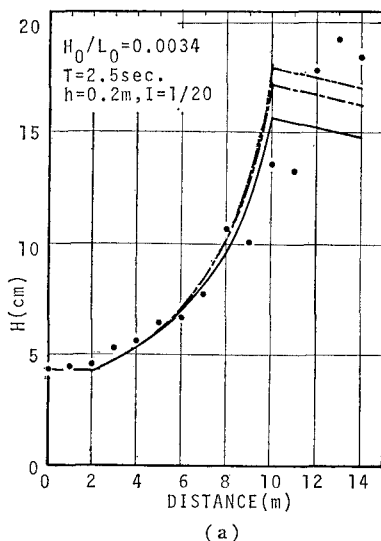


図-2 水槽幅漸減の計画値と実測値の比較



(a)

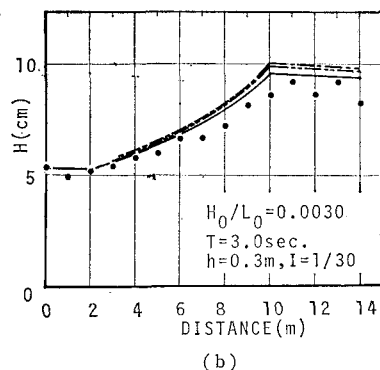


図-3 水深一定、水槽幅漸減の場合の波高変化

の各水深に対する水槽幅の計画値(実線と破線)と実測値を示したものであり、水槽幅はほぼ計画通りに漸減していることがわかる。側壁を設置した場合の波高測定は 4 台の波高計を各地点に移動させ、波高が十分定常になった状態において行った。

(2) 実験結果および理論との比較

本実験での問題点は 2 つあった。1 つは境界摩擦の効果をどう評価するかという問題と、側壁による反射の影響がどれだけあるかという問題である。前者については、理論式より直接計算される波高に摩擦減衰率を合わせて理論曲線とした。摩擦減衰率は水槽を 1 m ごとに分割し、その中間における水槽幅を代表値 B とし、微小振幅波理論による式⁹⁾から求めた。後者については、 $1/20$ 勾配側壁において反射率を測定したところ 3% 程度なので無視した。

図-3 は、水深一定、水槽幅漸減の場合の波高変化の 2 例を示したもので、実線は微小振幅波、破線はストークス波、一点鎖線および二点鎖線は Laitone および Chappellear のクノイド波理論によるハイパボリック波の曲線である。 $1/20$ 勾配側壁の場合には、実験値は漸減後の一様幅部分をみると、微小振幅波よりも有限振幅波の理論値により近いことがわかる。 $I=1/30$ の場合の実験値は微小振幅波の値よりも小さい結果が得られているが、側壁勾配が小さいときには、摩擦減衰の評価が十分正確でないと水槽幅減少の効果を正しく抽出できないのかも知れない。

図-4 は、水深漸減、水槽幅一定の場合の波高変化の 2 例を示したものである。一点鎖線は微小振幅波、破線はストークス波、実線は Chappellear のクノイド波理論に基づくハイパボリック波による曲線である。この図からわかるように、実験値はハイパボリック波とストーク

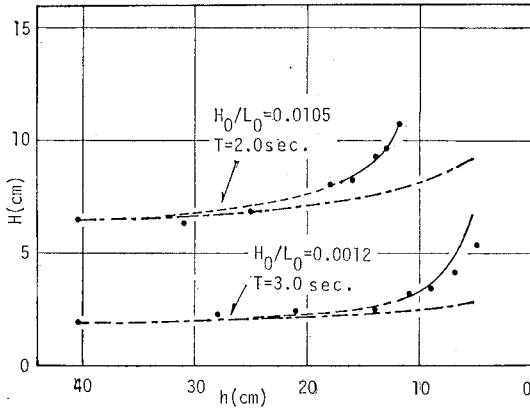


図-4 水深漸減, 水槽幅一定の場合の波高変化

ス波の理論を接続したものとよく一致している。

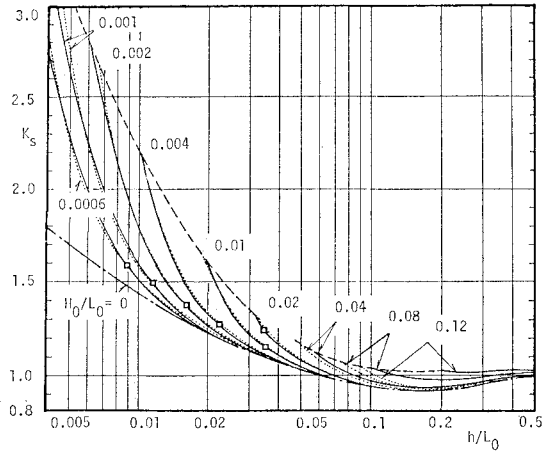
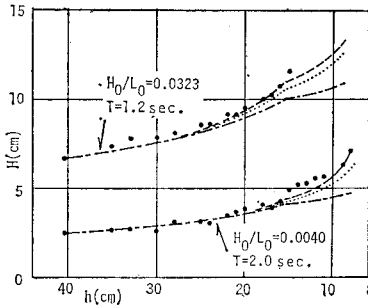
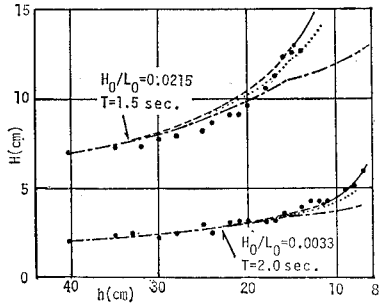


図-6 有限振幅波の浅水係数



(a)



(b)

図-5 水深漸減, 水槽幅漸減の場合の波高変化

図-5 は、水深漸減, 水槽幅漸減の場合の波高変化の例を示したものである。図中の一点鎖線, 破線, 実線は図-4 の場合と同じであり, 点線は Chappellear のクノイド波理論に基づくハイパボリック波およびストークス波の浅水係数に従来用いられている屈折係数 $(b_0/b)^{0.5}$ をかけ合わせて得た曲線を接続したものである。全体的に実験値はハイパボリック波とストークス波を接続して得た曲線によく一致しており, 砕波点近傍では有限振幅波の浅水係数に $(b_0/b)^{0.5}$ をかけ合わせて得た理論値よりも大きな値をとることがわかる。

4. 有限振幅波の浅水係数および屈折係数

微小振幅波理論では屈折による波高変化は, 浅水係数と屈折係数に分離した形で示される。それに対して有限振幅波理論を用いた場合には, 両者は分離された形とはならない。しかし, ここでは実用上便利のように, 微小振幅波理論から得られる結果に簡単な補正をほどこした形で, 有限振幅波理論の浅水係数および屈折係数の表現式を提案する。

(1) 浅水係数 K_s

図-6 における実線は, ストークス波の式 (8) と

Chappellear のクノイド波理論に基づくハイパボリック波の式 (16) によって求めた浅水係数曲線を口印の場所で接続したものであり, これを次式で近似し点線で示したものである。

$$K_s = K_{s0} + 0.0015 \left(\frac{h}{L_0} \right)^{-2.8} \times \left(\frac{H_0}{L_0} \right)^{1.2} \quad \dots (18)$$

ここに, K_{s0} は微小振幅波理論による浅水係数であり, 図中には一点鎖線で示されている。破線は Rankine-Stokes の条件によって求めた砕波限界である。 $H_0/L_0 \leq 0.04$ では, 式 (18) は有限振幅波理論による浅水係数をよく表わしているといえよう。

(2) 屈折係数 K_r

いま, 有限振幅波の場合も次式を仮定する。

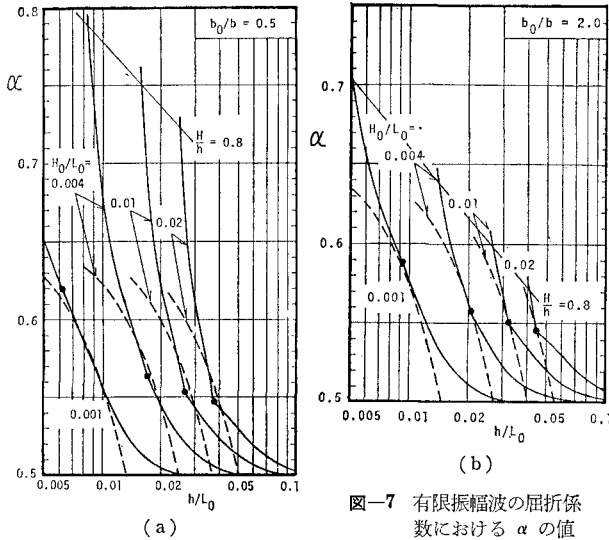
$$\frac{H}{H_0} = K_s \cdot \left(\frac{b_0}{b} \right)^\alpha \quad \dots (19)$$

上式を変形すれば次式を得る。

$$\alpha = \log \left\{ \frac{H/H_0}{K_s} \right\} / \log \left(\frac{b_0}{b} \right) \quad \dots (20)$$

図-7 における実線は, おおの $b_0/b = 0.5$ および 2.0 において, ストークス波と Chappellear のクノイド波に基づくハイパボリック波により H/H_0 および K_s を計算し, (20) 式により α を求めたものである。黒丸は両理論曲線の交点を示す。浅水に伴って α は 0.5 から次第に増加し, 砕波点近傍ではかなり大きな値をとることがわかる。

つぎに, α についての簡略式を求める。式 (11) において, H/h および $\{ \}$ 内の λ_0 の 4 次以上を無視し, さらに $\lambda_0 = \pi H_0/L_0$ とおくと次式を得る。



図一七 有限振幅波の屈折係数における α の値

$$\frac{H}{H_0} = \frac{3}{16} \left(\frac{1}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{h}{L_0} \right)^{-1} \left(\frac{b_0}{b} \right)^{2/3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \right)^{-2/3} \quad (21)$$

上式において第1次近似として $1/K$ を無視し、 $H/h = (H/H_0) \cdot (H_0/L_0) \cdot (h/L_0)^{-1}$ の関係式に代入し、さらに、 $T\sqrt{g/h} = (2\pi)^{1/2} (h/L_0)^{-1/2}$ なる関係式を用いると、 $1/K$ はほぼ次式で近似される。

$$\frac{1}{K} = 3 \left(\frac{h}{L_0} \right)^{3/2} \left(\frac{H_0}{L_0} \right)^{-2/3} \left(\frac{b_0}{b} \right)^{-1/3} \quad (23)$$

したがって、これを式(21)に代入し、 α を求めると、次式を得る。

$$\alpha = \frac{2}{3} + \log \left[1 - 3 \left(\frac{h}{L_0} \right)^{3/2} \left(\frac{H_0}{L_0} \right)^{-2/3} \left\{ 1 - \left(\frac{b_0}{b} \right)^{-1/3} \right\} \right] / \log \left(\frac{b}{b_0} \right) \quad (24)$$

図一七における破線は上式によって求めた値である。したがって、有限振幅波の屈折係数 K_r は次のように表わされる。

$$K_r = \left(\frac{b_0}{b} \right)^a, \quad a = \max \{0.5, \alpha\} \quad (25)$$

ここに、 $\max \{0.5, \alpha\}$ は式(24)で計算される α の値と0.5のうちの大きい方の値を採用するという意味である。

5. 結 論

以上より次の結論が得られる。

- 1) 水深あるいは水槽幅が漸減する場合の波高変化は、波速の第2定義によるストークス波の第4次近似解および Chappellear のクノイド波に基づくハイパボリック波を用い、エネルギーフラックス法によって得られる理論値とよく一致する。
- 2) 砕波点近傍では、波向線間隔が波高におよぼす非線型効果が無視できない場合がある。
- 3) 有限振幅波の浅水係数は式(18)で、屈折係数は式(24)と(25)で近似的に表現できる。

参 考 文 献

- 1) Le Méhauté, B. and L. M. Webb: Periodic gravity waves over a gentle slope at a third order of approximation, Proc. 9th Conf. on Coastal Eng., pp. 23~40, 1964.
- 2) 岩垣雄一・酒井哲郎: 有限振幅波の shoaling について, 第14回海岸工学講演会講演集, pp. 1~7, 1967.
- 3) 岩垣雄一・酒井哲郎: 有限振幅波の shoaling について(2), 第15回海岸工学講演会講演集, pp. 10~15, 1968.
- 4) 山口正隆・土屋義人: 有限振幅波理論に基づく波の shoaling について, 第22回海岸工学講演会論文集, pp. 59~63, 1975.
- 5) 首藤伸夫: 非線型長波の変形, 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 57~63, 1974.
- 6) 酒井哲郎・J. A. Battjes: Cokelet の理論による波の浅水変形, 第27回海岸工学講演会論文集, pp. 25~29, 1980.
- 7) Cokelet, E. D.: Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth, Trans. R. Soc. London, 286, A1335, pp. 183~230, 1977.
- 8) 岩垣雄一: 波の変形論, 1967年度水工学に関する夏期研修会講義集, B. 海岸・港湾コース, 1967.
- 9) 佐伯 浩・高木和博・尾崎 晃: 孤立波の変形に関する研究(2), 第18回海岸工学講演会論文集, pp. 49~53, 1971.
- 10) Tsuchiya, Y. and M. Yamaguchi: Some considerations on water particle velocities of finite amplitude wave theories, Coastal Engg. in Japan, Vol. 15, pp. 43~57, 1972.
- 11) 岩垣雄一・塩田啓介: ハイパボリック波の表現式の再検討, 第26回海岸工学講演会論文集, pp. 31~35, 1979.
- 12) Laitone, E. V.: Series solutions for shallow water waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 70, No. 4, pp. 995~998, 1965.
- 13) Chappellear, J. E.: Shallow-water waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 67, No. 12, pp. 4693~4704, 1962.