

浅海波浪の非線形干渉について

田 淵 幹 修* 滝 川 清**

1. ま え が き

有限振幅波の記述については各種の方法が提案されているが、ここでは、成分波の総和として表わされる速度ポテンシャルを水面条件に代入し、平均法を用いてモード結合方程式を導く。また、これの応用例のいくつかについて概説する。

2. 基礎式および速度ポテンシャルの表現

非圧縮・完全流体の非回転 2 次元運動を考える。静水面に原点を取り、静水面上に x 軸、鉛直上方に z 軸をとる。また水深 h は一定とする。速度ポテンシャルを Φ とすると連続の式は次の Laplace の式で示される。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

また水底および水面条件式は次の様である。ただし水位変動を ζ とし、 g は重力の加速度である。

$$z = -h \text{ で } \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$z = \zeta \text{ で } \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$z = \zeta \text{ で } \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (4)$$

式 (3) より

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left\{ \Phi_t + \frac{1}{2} (\Phi_x^2 + \Phi_z^2) \right\} \Big|_{z=\zeta} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 Φ_t, Φ_x 等の添字はその変数による偏微分を表わすことにする。式 (3)、式 (4) より ζ を消去すると

$$\{ \Phi_{tt} + g\Phi_z + 2\Phi_x \Phi_{xt} + \Phi_z \Phi_{zt} + \Phi_x^2 \Phi_{xx} + \Phi_x \Phi_z \Phi_{zx} \} \Big|_{z=\zeta} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

次に式 (1)、式 (2) を満足する速度ポテンシャルを次のように仮定する。

$$\Phi = \sum_i F_i(z) G_i + Ux - \left(g\gamma + \frac{1}{2} U^2 \right) t$$

$$F_i(z) = \frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h}$$

$$G_i = \phi_i \sin \theta_i + \psi_i \cos \theta_i$$

$$\theta_i = k_i x + s_i \sigma t \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 ϕ_i, ψ_i は時間的空間的にゆっくり変動する振幅で、 U は x の正の方向に流れる一様流の流速、 k_i および σ_i は成分波の wave number と angular frequency で s_i は成分波の進行方向を規定する符号である。また γ は、静水面と波が存在する時の平均水面が一致するという条件より決定される定数である。式 (7) は式 (1) を完全には満足しないが、これは dynamic wave を考えるか $x = \pm \infty$ での適当な境界条件によって処理できる。

3. 水位変動 ζ の一般式

式 (5) に式 (7) を代入し、右辺に現われる ζ が高次の量に掛っている事を利用して同式を右辺の ζ に順次代入すると、 ζ はより高次に移ってゆく。このようにして求めた ζ を 3 次まで表わすと次のようである。

$$\begin{aligned} \zeta = & \gamma - \frac{1}{g} \sum_i \sigma_i' \alpha_i' G_i' \\ & + \frac{1}{2g^2} \sum_{i,j} -g \alpha_i \alpha_j k_i k_j T_i T_j G_i G_j \\ & + \alpha_i \alpha_j (-g k_i k_j + 2 \sigma_i' \sigma_j' k_j T_j) G_i' G_j' \\ & + \frac{1}{2g^3} \sum_{i,j,l} \alpha_i \alpha_j \alpha_l \{ -\sigma_i' \sigma_j' \sigma_l' (k_i^2 \\ & + 2k_j k_l T_j T_l) + g \sigma_i' k_j k_l (k_i T_i + k_j T_j \\ & + k_l T_l) \} G_i' G_j' G_l' + g \alpha_i \alpha_j \alpha_l \sigma_i' k_j k_l (k_i T_j \\ & + k_j T_i + k_l T_j T_l) G_i' G_j' G_l' \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここで、 $G_i' = \phi_i \cos \theta_i - \psi_i \sin \theta_i$, $\sigma_i' = s_i \sigma_i + k_i U$, $T_i = \tanh k_i(h + \gamma)$, $\alpha_i = \cosh k_i(h + \gamma) / \cosh k_i h$ さらに

$$\begin{aligned} \zeta = & \gamma - \frac{1}{g} \sum_i \alpha_i \sigma_i' \phi_i \cos \theta_i \\ & - \frac{1}{2g^2} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j [g k_i k_j T_i T_j \phi_i \phi_j \sin \theta_i \cdot \sin \theta_j \\ & + (g k_i k_j - 2 \sigma_i' \sigma_j' k_j T_j) \phi_i \phi_j \cos \theta_i \cdot \cos \theta_j \\ & - \frac{1}{2g^3} \sum_{i,j,l} \alpha_i \alpha_j \alpha_l \{ -g \sigma_i' k_j k_l (k_i T_j + k_j T_i \\ & + k_l T_j T_l) \} \phi_i \phi_j \phi_l \cos \theta_i \cdot \sin \theta_j \sin \theta_l \\ & + \sigma_i' k_l [2 \sigma_j' \sigma_l' (k_i + 2k_j T_j T_l) - g k_j (k_i T_i \\ & + k_j T_j + k_l T_l) \} \phi_i \phi_j \phi_l \cos \theta_i \cos \theta_j \cos \theta_l \} \\ & \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

* 正会員 熊本大学講師 工学部環境建設工学科

** 正会員 工修 熊本大学助手 工学部環境建設工学科

ただし簡単のため ϕ の掛る項は省略した ϕ および ϕ の微分項も省いた。

4. モード結合方程式

式 (7) で示した速度ポテンシャルを水表面の境界条件式 (9) に代入し、同式に現われる ϕ に式 (8) を用いると次式が得られる (三次まで示す)。

$$\begin{aligned} & \sum_i \alpha_i \{ \phi_{i,tt} + 2U\phi_{i,xt} + U^2\phi_{i,xx} \\ & - 2\sigma_i'(\phi_{i,t} + U\phi_{i,x}) - (\sigma_i'^2 - gk_i T_i)\phi_i \} \sin \theta_i \\ & + \sum_i \alpha_i \{ \phi_{i,tt} + 2U\phi_{i,xt} + U^2\phi_{i,xx} \\ & + 2\sigma_i'(\phi_{i,t} + U\phi_{i,x}) - (\sigma_i'^2 - gk_i T_i)\phi_i \} \cos \theta_i \\ & = \sum_{i,j} P_{i,j}^{(1)} G_i G_j' + \sum_{i,j,l} P_{i,j,l}^{(2)} G_i G_j' G_l \\ & + \sum_{i,j,l} P_{i,j,l}^{(3)} G_i G_j G_l \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{(1)} &= \alpha_i \alpha_j \left\{ 2\sigma_i' k_i k_j + \sigma_j' k_i (k_i - k_j T_i T_j) \right. \\ & \left. - \frac{1}{g} \sigma_i'^2 \sigma_j' k_i T_i \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{i,j,l}^{(2)} &= \alpha_i \alpha_j \alpha_l \left[\frac{3}{2} k_i k_j k_l^2 - k_i k_j^2 k_l T_j T_l \right. \\ & + \frac{1}{2g} \sigma_i' \sigma_j' \{ k_i (k_j^2 - k_l^2 - 4k_j k_l) T_i \\ & + 2k_j (k_i^2 - 2k_j k_l) T_j - k_l^3 T_l \} \\ & \left. - \frac{1}{2g} \sigma_i'^2 k_i k_j k_l T_i \right. \\ & \left. + \frac{1}{2g^2} \sigma_i' \sigma_j' \sigma_l' k_l (k_i + k_l T_i T_l) \right] \end{aligned}$$

$$P_{i,j,l}^{(3)} = \alpha_i \alpha_j \alpha_l \left\{ \frac{1}{2g} k_i k_j k_l (gk_i - \sigma_i'^2 T_i) T_j T_l \right\}$$

式 (10) に $\sin \theta_n$ を乗じ、考えている波の波長および周期程度のオーダーで平均すると、 $\overline{\sin \theta_i \cdot \sin \theta_n} = \{0 \ (i \neq n), 1/2 \ (i=n)\}$, $\overline{\cos \theta_i \cdot \sin \theta_n} = 0$ を考慮して次式を得る。ただし上付バーは平均操作を表す。

$$\begin{aligned} & \phi_{n,tt} + 2U\phi_{n,xt} + U^2\phi_{n,xx} - 2\sigma_n' \phi_{n,t} \\ & + 2U\sigma_n' \phi_{n,x} - (\sigma_n'^2 - gk_n \tanh k_n (h+\gamma)) \phi_n \\ & = \sum_{i,j} Q_{i,j,n}^{(1)} (\phi_i \phi_j + \phi_i \phi_j) \{ \overline{\sin (\theta_i + \theta_j + \theta_n)} \\ & - \overline{\sin (\theta_i + \theta_j - \theta_n)} \} \\ & + Q_{i,j,n}^{(2)} (-\phi_i \phi_j + \phi_i \phi_j) \{ \overline{\sin (\theta_i - \theta_j + \theta_n)} \\ & - \overline{\sin (\theta_i + \theta_j - \theta_n)} \} \\ & + Q_{i,j,n}^{(3)} (\phi_i \phi_j - \phi_i \phi_j) \{ -\overline{\cos (\theta_i + \theta_j + \theta_n)} \\ & + \overline{\cos (\theta_i + \theta_j - \theta_n)} \} \\ & + Q_{i,j,n}^{(4)} (\phi_i \phi_j + \phi_i \phi_j) \{ -\overline{\cos (\theta_i - \theta_j + \theta_n)} \\ & + \overline{\cos (\theta_i - \theta_j - \theta_n)} \} \\ & + \sum_{i,j,l} (-Q_{i,j,l,n}^{(2)} + Q_{i,j,l,n}^{(3)}) (\phi_i \phi_j \phi_l + \phi_i \phi_j \phi_l \\ & + \phi_i \phi_j \phi_l - \phi_i \phi_j \phi_l) \{ -\overline{\cos (\theta_i + \theta_j + \theta_l + \theta_n)} \\ & + \overline{\cos (\theta_i + \theta_j + \theta_l - \theta_n)} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \{ (Q_{i,j,n}^{(2)} - Q_{i,j,n}^{(3)}) (\phi_i \phi_j \phi_l - \phi_i \phi_j \phi_l \\ & - \phi_i \phi_j \phi_l - \phi_i \phi_j \phi_l) \\ & + (Q_{i,j,n}^{(2)} + Q_{i,j,n}^{(3)}) (\phi_i \phi_j \phi_l - \phi_i \phi_j \phi_l + \phi_i \phi_j \phi_l \\ & + \phi_i \phi_j \phi_l) \} \{ -\overline{\cos (\theta_i + \theta_j - \theta_l + \theta_n)} \\ & + \overline{\cos (\theta_i + \theta_j - \theta_l - \theta_n)} \} \\ & + (Q_{i,j,n}^{(2)} + Q_{i,j,n}^{(3)}) (-\phi_i \phi_j \phi_l - \phi_i \phi_j \phi_l \\ & + \phi_i \phi_j \phi_l - \phi_i \phi_j \phi_l) \{ -\overline{\cos (\theta_i - \theta_j - \theta_l + \theta_n)} \\ & + \overline{\cos (\theta_i - \theta_j - \theta_l - \theta_n)} \} \\ & + (Q_{i,j,n}^{(2)} - Q_{i,j,n}^{(3)}) (-\phi_i \phi_j \phi_l + \phi_i \phi_j \phi_l \\ & + \phi_i \phi_j \phi_l + \phi_i \phi_j \phi_l) \{ \overline{\sin (\theta_i + \theta_j + \theta_l + \theta_n)} \\ & - \overline{\sin (\theta_i + \theta_j + \theta_l - \theta_n)} \} \\ & + \{ (Q_{i,j,n}^{(2)} - Q_{i,j,n}^{(3)}) (-\phi_i \phi_j \phi_l - \phi_i \phi_j \phi_l \\ & - \phi_i \phi_j \phi_l + \phi_i \phi_j \phi_l) \\ & + (Q_{i,j,n}^{(2)} + Q_{i,j,n}^{(3)}) (\phi_i \phi_j \phi_l + \phi_i \phi_j \phi_l - \phi_i \phi_j \phi_l \\ & + \phi_i \phi_j \phi_l) \} \{ \overline{\sin (\theta_i + \theta_j - \theta_l + \theta_n)} \\ & - \overline{\sin (\theta_i + \theta_j - \theta_l - \theta_n)} \} \\ & + (Q_{i,j,n}^{(2)} + Q_{i,j,n}^{(3)}) (\phi_i \phi_j \phi_l - \phi_i \phi_j \phi_l + \phi_i \phi_j \phi_l \\ & + \phi_i \phi_j \phi_l) \{ \overline{\sin (\theta_i - \theta_j - \theta_l + \theta_n)} \\ & - \overline{\sin (\theta_i - \theta_j - \theta_l - \theta_n)} \} \quad n=1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$Q_{i,j,n}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{P_{i,j}^{(1)}}{\alpha_n}, \quad Q_{i,j,n}^{(2)} = \frac{1}{4} \frac{P_{i,j,l}^{(2)}}{\alpha_n}, \quad Q_{i,j,n}^{(3)} = \frac{1}{4} \frac{P_{i,j,l}^{(3)}}{\alpha_n} \dots\dots\dots (11)$$

また、 $\cos \theta_n$ を乗じると ϕ_n に関する同様の式が得られる。これは式 (11) の左辺を式 (10) の左辺第 2 項の $\{ \}$ 内の表現に置きかえ、式 (11) の右辺の $\cos$ を $\sin$ に $\sin$ を $\cos$ に (一部正負が変る) 代えた型となる。

式 (11) 右辺の $\cos$ の $()$ 内、例えば $(\theta_i + \theta_j - \theta_n)$ が 0 となる時 (これを共鳴条件または整合条件が満たされたという) のみ右辺の値が存在し、 ϕ_n が ϕ_i, ϕ_j 等と関係づけられる。すなわち干渉共鳴が起ることになる。共鳴条件が完全に満足されないときでも近似的に 0、例えば $\theta_i + \theta_j - \theta_n = \Delta\theta$ という微小量の位相 $\Delta\theta$ が残る時は $\sin(\Delta\theta)$ 等は平均操作を行っても残り共鳴が起る。これを不完全共鳴と呼ぶことにする。

水面波の場合、最も容易に共鳴条件を満足する波は、自己干渉によるところの基本波の整数倍周波数と整数倍波数をもつ波や、多成分波のいわゆる和の波、差の波の拘束波である。

考える成分波が他の成分波と独立な時は式 (11) の右辺は 0、またその成分波のエネルギーは保存されると考えると ϕ_n の時空変化も考えなくてよい。したがって波が存在しているということは $\phi_n \neq 0$ だから式 (11) は次の分散関係式となる。

$$\sigma_n'^2 (= (s_n \sigma_a + k_n U)^2) = gk_n \tanh k_n (h+\gamma) \dots (12)$$

上式の γ は、式 (9) で $\xi=0$ において次式となる。ただし全ての成分波は互いに独立であるとし、また式 (9) 右辺第 2 項の $\cos \theta_i$ にかかる振幅を a_i とおいた。

$$\begin{aligned} \gamma = & \sum_i \frac{gk_i^2 a_i^2}{4\sigma_i'^2} \{1 + \tanh^2 k_i(h+\gamma) \\ & - 2k_i \tanh k_i(h+\gamma)\} \\ & + \sum_i \frac{gk_i^4 a_i^4}{48\sigma_i'^2} \left\{ 28 + 54 \tanh k_i(h+\gamma) \right. \\ & + 16 \tanh^2 k_i(h+\gamma) - \frac{gk_i}{\sigma_i^2} (18 + 30 \tanh k_i(h+\gamma) \\ & \left. + 7 \tanh^2 k_i(h+\gamma)) \right\} + 0\{(k_i a_i)^6\} \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

上式で分るように、ある成分波の分散関係にはその水面に存在する全ての成分波が2次の order で関係してくる。なお、式(12)、式(13)は k (または σ) と γ に関し連立式となっているが、 γ が高次の量であるので逐次近似を用いると収束は容易である。

5. 応 用 例

(1) 一基本波による自己干渉

基本波として、速度ポテンシャル

$$\phi_1 \frac{\cosh k_1(z+h)}{\cosh k_1 h} \sin \theta_1 \quad (\theta_1 = k_1 x - \sigma_1 t)$$

をもつ波を考えると、共鳴条件を満たす波としては3次までとると、 $\theta_2 (=2\theta_1)$ 、 $\theta_3 (=3\theta_1)$ の2つの位相をもつ波を考えればよい。基本波として $\sin$ 波を考えているので式(11)より分るように $\cos$ 波すなわち ϕ は現れないから、位相 θ_2 、 θ_3 をもつ波の速度ポテンシャルは次式となる。

$$\begin{aligned} \phi_2 \frac{\cosh 2k_1(z+h)}{\cosh k_1 h} \sin \theta_2 \quad (\theta_2 = 2\theta_1) \\ \phi_3 \frac{\cosh 3k_1(z+h)}{\cosh 3k_1 h} \sin \theta_3 \quad (\theta_3 = 3\theta_1) \end{aligned}$$

また、不完全共鳴によって生じる波として、 $\theta_4 = \theta_2 + \Delta\theta_1 = k_4 x - \sigma_4 t$ 、 $\theta_5 = \theta_3 + \Delta\theta_2 = k_5 x - \sigma_5 t$ の位相をもつ波を考えると、これらの波の速度ポテンシャルは

$$\phi_4 \frac{\cosh k_4(z+h)}{\cosh k_4 h} \cos \theta_4, \quad \phi_5 \frac{\cosh k_5(z+h)}{\cosh k_5 h} \cos \theta_5$$

ただし、振幅 ϕ をもつ $\sin$ 波は初期条件または境界条件で定形波を与えると考慮しなくてもよいので省く。

これらの5コの波についてのモード結合方程式は次の様である。

$$\begin{aligned} \phi_{1,tt} + 2U\phi_{1,xt} + U^2\phi_{1,xx} \\ - (\sigma_1'^2 - gk_1 \tanh k_1 h') \phi_1 \\ = (Q_{111}^{(1)} - Q_{111}^{(2)}) \phi_1 \phi_2 + (Q_{111}^{(3)} + 3Q_{111}^{(4)}) \phi_1^3 \\ - (Q_{111}^{(5)} + Q_{111}^{(6)}) \phi_1 \phi_4 \sin \Delta\theta_1 \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{2,tt} + 2U\phi_{2,xt} + U^2\phi_{2,xx} \\ - (\sigma_2'^2 - gk_2 \tanh k_2 h') \phi_2 = Q_{112}^{(3)} \phi_1^2 \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{3,tt} + 2U\phi_{3,xt} + U^2\phi_{3,xx} \\ - (\sigma_3'^2 - gk_3 \tanh k_3 h') \phi_3 \\ = (Q_{113}^{(1)} + Q_{113}^{(2)}) \phi_1 \phi_2 + (Q_{113}^{(3)} - Q_{113}^{(4)}) \phi_1^3 \\ - (Q_{113}^{(5)} + Q_{113}^{(6)}) \phi_1 \phi_4 \sin \Delta\theta_1 \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{4,tt} + 2U\phi_{4,xt} + U^2\phi_{4,xx} \\ - (\sigma_4'^2 - gk_4 \tanh k_4 h') \phi_4 \\ = -Q_{114}^{(1)} \phi_1^2 \sin(\Delta\theta_1) \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{5,tt} + 2U\phi_{5,xt} + U^2\phi_{5,xx} \\ - (\sigma_5'^2 - gk_5 \tanh k_5 h') \phi_5 \\ = -(Q_{115}^{(2)} - Q_{115}^{(3)}) \phi_1^3 \sin(\Delta\theta_2) \\ - (Q_{115}^{(4)} + Q_{115}^{(5)}) \phi_1 \phi_2 \sin(\Delta\theta_2) \\ + (Q_{115}^{(6)} + Q_{115}^{(7)}) \phi_1 \phi_4 \cos(\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2) \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

ここで、 $h' = h + \gamma$

以上の各成分波で、 ϕ_1 で示される基本波は自由波、 ϕ_2, ϕ_3 で示される波はそれらの σ および k が基本波のその2倍および3倍の拘束波である。

ϕ_4, ϕ_5 で示される波は自由波と考えるのが自然である。従って、例えば ϕ_4 で示される波は式(17)の左辺の ϕ_4 の係数を0と置いた分散関係式をもち、その振幅 ϕ_4 は $\sin(\Delta\theta_1)$ で振動することが分る。

ϕ_1 に関する式(14)はパラメトリック励振を表す非線形振動方程式に書き直せる。ここではこれについて詳しく論ずる余裕はないが、式(14)右辺の最後の項の ϕ_4 に式(17)の解を入れるとこの項は $\sin^2 \Delta\theta_1$ 、すなわち $\cos 2\Delta\theta_1$ が掛る。従って、式(14)が1/2調波の不安定領域の条件を満足すると ϕ_1 は $\Delta\theta_1$ の位相で振動する解をもつ。

ところで、図—1は初期条件および境界条件に正弦波 ($h/L_0=0.02$, $H_0/L_0=0.004$, L_0 : 沖波波長, H_0 : 沖波波高) を与えた時の水位変動の時間変化を有限要素法¹⁾により計算し示したものである。ソリトンが発生している場合の例であるが、同図右下部分の初期条件に規定される領域(初期値問題領域)では現象は homogenous で、一方境界条件に規定される領域(境界値問題領域)では現象は stationary である事が分る。式(14)~式(18)は $\phi_2 = (k/\sigma)\phi_1$ 等の関係を使うと容易に初期値問題あるいは境界値問題に対応する式が得られる。この時、 $\Delta\theta_1$ は初期値問題では $\Delta\sigma_1 t$ 、境界値問題では $\Delta k_1 x$ となる。

図—1に示した計算例のように2 soliton 発生の場合は式(18)の ϕ_5 で示される波が無視できて現象は初期値問題では $2\pi/\Delta\sigma_1$ 時間ごとにくり返す(再帰時間)。ここで $\Delta\sigma_1$ は、 $k_4 (=2k_1)$ 、 $\sigma_4 (=2\sigma_1 + \Delta\sigma_1)$ が分散関係式を満足する事を利用して求まる。線形の分散関係式を用いると $\Delta\sigma_1 = \sigma_4 - 2\sigma_1 = \sqrt{2gk_1 \tanh 2k_1 h} - 2\sigma_1$ 。同様に境界値問題では $2\pi/\Delta k_1$ ($\Delta k_1 = k_4 - 2k_1$, $\sigma_4 = 2\sigma_1$ で $\sigma_4^2 = gk_4 \times \tanh k_4 h$) 再帰距離が求まる。なお、 ϕ_1, ϕ_4 は上記の再帰距離(または時間)内に2度 $\sin \Delta\theta_1$ の振動項が0となるので、図—1に示すような現象を soliton の追いつき追越しとして解釈する場合は再帰距離(または時間)を上記の値の1/2で定義することが多い。図—1の場合については $2\pi/|\Delta\sigma_1| = 9.05T$ (T は周期), $2\pi/\Delta k_1 = 7.26L$ (L は波長)である。図中では有限振幅性の影響でやや長

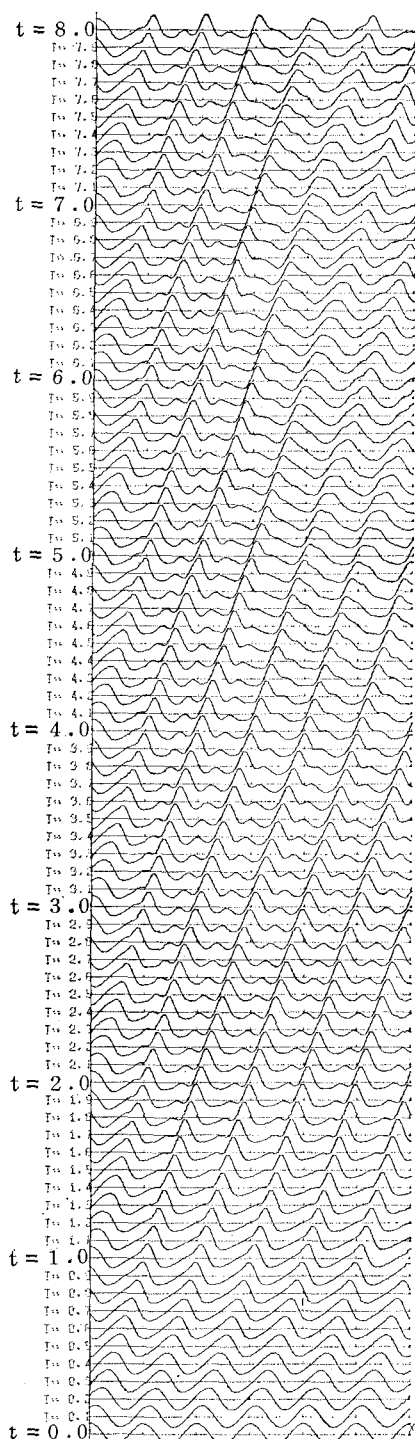


図-1 有限要素法による水面変動の数値計算例
($h/L_0=0.02$, $H_0/L_0=0.004$, H_0 と L_0
は微小振幅波理論による沖波波高と沖波
波長)

くはなるがほぼ計算値の 1/2 の所で初期波または境界で与えた正弦波に近い波形が現われている。

定形波の場合は ϕ の微分項および ϕ_4, ϕ_5 を無視でき

て式 (14)～式 (16) は次のように簡単になる。

$$\{\sigma_1'^2 - gk_1 \tanh k_1 h' + (Q_{111}^{(1)} - Q_{111}^{(2)})\phi_2 + (Q_{111}^{(2)} + 3Q_{111}^{(3)})\phi_1^2\}\phi_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$(\sigma_2'^2 - gk_2 \tanh k_2 h')\phi_2 = -Q_{112}^{(1)}\phi_1^2 \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$(\sigma_3'^2 - gk_3 \tanh k_3 h')\phi_3 = -(Q_{213}^{(1)} + Q_{123}^{(1)})\phi_1\phi_2 - (Q_{111}^{(2)} - Q_{111}^{(3)})\phi_1^3 \quad \dots\dots\dots(21)$$

式 (19) が分散関係を与え、式 (20)、式 (21) が 2 次と 3 次の拘束波を与える。上式を解いて分散関係式および ϕ_2, ϕ_3 は

$$\sigma'^2 = gk \left\{ \tanh kh' + \frac{(ka)^2}{8 \tanh^3 kh'} (6 - 7 \tanh^2 kh' + 18 \tanh^4 kh' - 9 \tanh^6 kh') \right\} \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$\phi_2 = \frac{gka^2}{\sigma\alpha^2} \frac{1}{8 \tanh^3 kh'} (2 \tanh^3 kh' - 3)(1 + \tanh^2 kh') \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$\phi_3 = \frac{gk^2 a^3}{\sigma\alpha^3} \frac{1}{192 \tanh^6 kh'} (9 + 3 \tanh kh + 15 \tanh^2 kh + 6 \tanh^3 kh - 35 \tanh^4 kh - 11 \tanh^5 kh - \tanh^6 kh - 8 \tanh^7 kh - 12 \tanh^8 kh + 3 \tanh^9 kh) \quad \dots\dots\dots(24)$$

全体の速度ポテンシャルは

$$\Phi = \phi_1 \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin \theta + \phi_2 \frac{\cosh 2k(z+h)}{\cosh 2kh} \sin 2\theta + \phi_3 \frac{\cosh 3k(z+h)}{\cosh 3kh} \sin 3\theta \quad \dots\dots\dots(25)$$

$$\text{ここに } \phi_1 = \frac{g}{\sigma\alpha} a, \quad \theta = kx - \sigma t$$

水位変動 ζ は Φ を式 (9) に代入して

$$\begin{aligned} \zeta = & \left\{ -a - \frac{k^2 a^3}{16 \tanh^2 kh'} \right. \\ & \times \frac{(9 + 11 \tanh^2 kh' - 6 \tanh^4 kh' - 2 \tanh^6 kh')}{(1 + \tanh^2 kh')} \left. \right\} \\ & \times \cos(kx - \sigma t) \\ & + \frac{1}{4} \frac{ka^2}{\tanh^3 kh'} (3 - \tanh^2 kh' + \tanh^3 kh' \\ & + 3 \tanh^4 kh' - 2 \tanh^6 kh') \cos 2(kx - \sigma t) \\ & + \frac{1}{64} \frac{k^2 a^3}{\tanh^6 kh'} (-9 - 3 \tanh kh' + 9 \tanh^2 kh' \\ & - 6 \tanh^3 kh' - 89 \tanh^4 kh' + 11 \tanh^5 kh' \\ & + 89 \tanh^6 kh' + 8 \tanh^7 kh' + 60 \tanh^8 kh' \\ & - 3 \tanh^9 kh') \cos 3(kx - \sigma t) \quad \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

また γ は式 (13) より

$$\gamma = \frac{gk^2 a^2}{4\sigma'^2} \{1 + \tanh^2 kh' - 2k \tanh kh'\} \quad \dots\dots\dots(27)$$

以上の各式においては $(ka)^3$ のオーダーまで求めたが、 h' については次数を考えれば h とおくべきところをもそのまま表記した。

なお、上記の定形波の各式は Stokes の 3 次近似解に対応するものである。

(2) その他の応用例

互いに独立な複数の基本波を考え、これらと干渉する(共鳴条件を満足する)他の波を検討しモード結合方程式を解く事により多成分波の干渉についても議論可能であるが、これについては別の機会にゆずり、ここでは、モード結合方程式を導く時の考え方をういて長い波に乗った短い波の、特に分散関係式を調べてみる。

長い波の速度ポテンシャルを Φ_0 , 水位変動を η_0 とし短い波の速度ポテンシャルを

$$\Phi_s = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \phi \sin \theta \quad (\theta = kx + s\omega t)$$

とおくと全体の速度ポテンシャルは $\Phi = \Phi_0 + \Phi_s - g\eta t$ と表わせる。これを用いて、先のモード結合方程式を導いたのと同様の手続きを行なえば、 ϕ の変化、または分散関係式を規定する式として式 (28) を得る。ただし長い波は短い波の影響を受けず、また平均操作も受けないとした。

$$\begin{aligned} \phi_{tt} + 2U\phi_{xt} + U^2\phi_{xx} + 2s\phi_t + \{2U_t + 2UU_x \\ + WU_x + Wk \tanh k(h+\gamma+\eta_0)\} \phi_x \\ - \{(s\sigma + kU)^2 - (g + W_t + UW_x)k \tanh k(h+\gamma + \eta_0)\} \phi = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

ここに U, W は長い波の水平および鉛直方向の流速の水面における値で、 U_x 等はその添字による偏微分を表わす。短い波の分散関係は式 (28) の ϕ の係数を 0 とおいて次式で示される。

$$(s\sigma + kU)^2 = (g + W_t + UW_x)k \tanh k(h+\gamma+\eta_0) \quad (29)$$

すなわち、短い波が非常に周波数の離れた(短い波の波長に比べ非常に波長の長い)波にのっているときは、一様流にのっているときと同様の周波数変動と長い波の鉛直加速度による重力の加速度の補正および水深 h の水位変動 η_0 による補正をうける。図-2 は、短い

波の wave number が、長い波の位相によってどう変化するかを、長い波の影響をうけない時の wave number との比で示したものである。長い波の $\sigma^2 h/g$ の値を 0.2, 同じく短い波のそれを $0.2 + \pi$ とし、長い波の波高水深比 H/h を変化させている。また波の進行方向は同じである。同図より、 H/h が大きい長い波には短い波は存在し得えない事が分る。なお長い波は簡単のため微小振幅波動解を用いて計算した。

6. あとがき

幅広い周波数帯を対象とする干渉問題は、本報告で用いた非回転運動の仮定に基づく基礎式から出発するのが妥当であろう。これらの基礎式は、高次近似解の Stokes 波が波高水深比の大きい極浅海波で破綻しているにもかかわらず、なおかつこのような波に対して有効であることはこれらの基礎式による有限要素法を用いた数値解¹⁾が妥当であることから証明される。ところでこれらの基礎式で速度ポテンシャルの型を決めるのに用いられるラプラスの式と水底条件式(水深一定の場合)は線形であるので任意の速度ポテンシャルの線形重ね合わせが(有限振幅波をとりあつかうにもかかわらず)許される。そしてその成分波間で独立でないものがあるとすれば、それらの関係が水面条件式によって決定される。ここではこのような考えに立って、 Φ や η を常に同じ order で議論する正統的な振動法は形式上取らず、非線形の水面条件式を平均法によりモード結合方程式に書き直した。

これの応用については詳細な説明はできなかったが、例えば Stokes の 3 次近似解に相当する解が簡単に求まる等、この方法の有用性の一端は示し得たと考える。なお本稿では解の次数を $(ka)^3$ で統一したが、この次数の考え方にはさらに柔軟な対応が可能で、例えば定形波動解(式 (22)~式 (27))で分散関係式や γ (水面波の性質を決める水深は実際的水深 h ではなく $h' = h + \gamma$ である)はより高次まで矛盾なく求めることができ、これによって解の発散はある程度おさえられる(速度ポテンシャルに $(ka)^4$ の項 $\phi_4 \sin 4\theta_1$ を考えたとき、これが分散関係式や γ に影響するのは $(ka)^8$ のオーダーである)。

表題の浅海波の非線形干渉については、一部のしかも概説を述べるにとどまったが、より詳細については別の機会に発表する予定である。

参考文献

- 1) 滝川 清・田淵幹修: 有限要素法による波動解析について(第1報), 第25回海工講演会論文集, pp. 28~32, 1978.

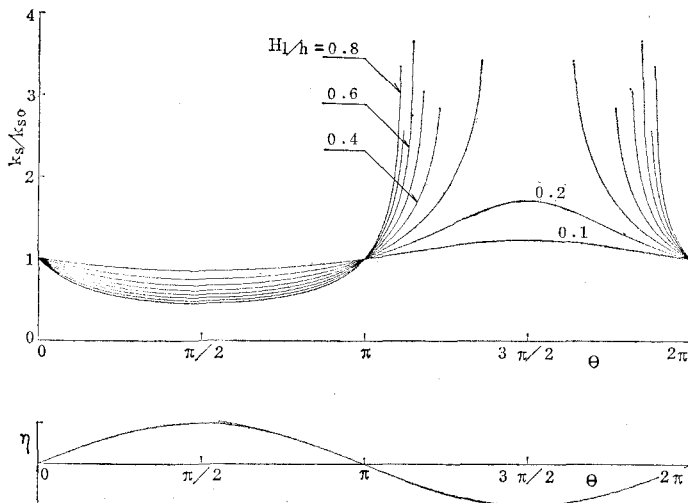


図-2 長い波にのった短い波の波数変化