

相互干渉を無視した場合のソリトンスpekトルの理論

土屋 義人*・安田 孝志**・武山 保徳***

1. 緒 言

従来の不規則波浪の取扱い法としては、スペクトル解析および波別解析法が知られている。前者は線形理論にその基礎を置いたため、非線形性が卓越してくる浅海域の波浪への適用においてその限界が現れ、特に砕波現象を問題にする場合にその限界は明瞭となる。また、後者に関しては、スペクトル解析のような適用上の制約はないが、zero-up cross 法などによって分割された個々の波の力学的根拠が明瞭ではなく、水粒子速度などの内部特性を問題とする場合に、力学的基礎を持たないが故の矛盾が生じてくる。このように、いずれの手法も問題点を抱えており、こうした問題点は、非線形性が卓越した波浪の場の内部特性の究明を必須とする nearshore dynamics の確立において特に大きな障害となろう。

そこで著者らは、ソリトンが非線形波であるにもかかわらず、ソリトン間の相互干渉によってその固有値は変化せず、しかもソリトンの特性が波高に相当する唯一の固有値のみによって決定される点に着目し、ソリトンを極浅海域における波のエネルギーの基本単位とするスペクトル理論、すなわちソリトンスpekトルの理論を試み、浅海における従来の不規則波の取扱い法の問題点の解消を図ることとする。ソリトンを基本成分とすることによって、砕波などの波の非線形性に起因する現象の取扱いが可能となり、しかも、相互干渉の影響はソリトンの衝突時にのみ現れて、一定時間後には元の独立なソリトンの集合にもどるため、非線形波をスペクトル成分とした場合に一般に生じる相互干渉によるスペクトルの変形の問題も解消されることになろう。

ここでは、このようなソリトンスpekトルの理論をソリトン間の相互干渉が十分弱い場合について展開し、その現地波浪への適用を試み、その可能性について述べる。

2. クノイド波のソリトン表示

ここでは、浅海域における波浪のソリトン表示をクノ

イド波の場合について試みる。戸田¹⁾によって示された Jacobi の dn 関数と双曲線関数 sech との関係

$$\operatorname{dn}^2 \chi = (\pi/2K')^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \{(\pi K/K')(\chi/2K - l)\} - \kappa/2KK' + E/K \quad \cdots \cdots (1)$$

を用いれば、Jacobi の cn 関数によって表される波高 H のクノイド波の波形

$$\eta = A[\operatorname{cn}^2 \{(\sqrt{3A}/2k)\vartheta\} - (E/K + k^2 - 1)/k^2] \cdots (2)$$

は、次式のように sech を用いて表示される。

$$\eta = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A(\pi/2kK')^2 [\operatorname{sech}^2(\pi K/K')\{(\sqrt{3A}/4kK)\vartheta - l\} - \pi/2k^2KK'] \quad \cdots \cdots (3)$$

ここに、 $\vartheta = (x/h - ct/h)$ および $A = H/h$ であり、 x ; 波の進行方向を正とした水平座標、 t ; 時間、 h ; 水深、 c ; 波速、 k ; 楕円積分の母数、 K および E ; 第1種および第2種完全楕円積分、および K' ; 補母数 k' に対する第1種完全楕円積分である。式(3)は、次式に示される第1次近似の波動方程式である Korteweg-de Vries (KdV) 方程式²⁾を当然満足する。

$$\eta_\tau + (3/2\varepsilon)\eta\eta_\xi + \eta\xi\xi/6 = 0 \quad \cdots \cdots (4)$$

ここに、 $\xi = \varepsilon^{1/2}(x/h - t\sqrt{g/h})$, $\tau = \varepsilon^{3/2}t\sqrt{g/h}$, $\varepsilon = (h/L)^2$, g ; 重力の加速度、および L ; 波長である。このように式(3)を書き換えると、振幅 A のクノイド波は次式のように振幅 a のソリトンの級数和で表されることになる。

$$\eta = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a \operatorname{sech}^2 \{(\sqrt{3a}/2)\vartheta - l\pi K/K'\} - (4aK'^2/3\pi^2)\{3(E/K) + 2k^2 - 2\} \quad \cdots \cdots (5)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \varepsilon^{-1/2}(\xi - c^*\tau) = (x/h - ct/h), \\ c &= 1 - (2aK'^2/\pi^2)\{3(E/K) + k^2 - 2\}, \\ a &= A(\pi/2kK')^2, \quad \varepsilon = (h/L)^2 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (6)$$

ここで、 $k=1$ とすれば、 $a=A$ となり、式(5)は式(2)から導かれる孤立波の波形の表示式

$$\eta = A \operatorname{sech}^2 \{(\sqrt{3A}/2)\vartheta\} \quad \cdots \cdots (7)$$

に一致することは当然である。このように、式(5)から、クノイド波は一定波高のソリトンが一定間隔で連なったものであると考えることができ、ソリトンを極浅海

* 正 会 員 工博 京都大学教授 防災研究所

** 正 会 員 工博 岐阜大学助教授 工学部土木工学科

*** 学生会員 岐阜大学大学院工学研究科

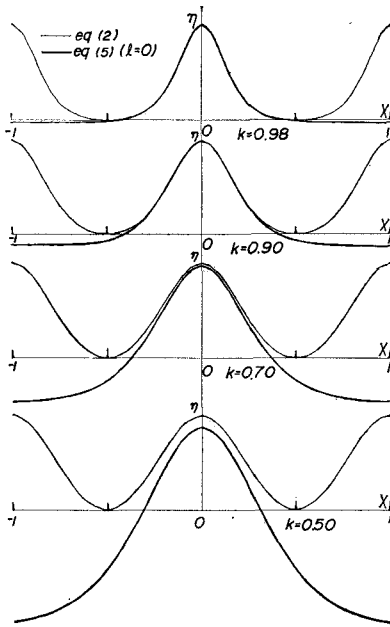


図-1 クノイド波の波形に関する式(2)と $l=0$ としたときの式(5)との比較

域における波浪の基本単位とすることの可能性が示唆される。

図-1 は、隣接したソリトンの影響を明らかにするため、 $l=0$ の場合について母数 $k=0.5$ から 0.98 までの波に対して式(2)および(5)の比較を示したものである。これから、母数 k が 0.98 になると、隣接したソリトンの影響は消え、1 個のソリトンがクノイド波の 1 波と完全に対応するようになり、個々のソリトンの独立性が明らかとなっていることがわかる。このときのソリトンは、岩垣³⁾によって提案された hyperbolic 波に対応するものと考えられる。図-2 は、母数 $k=0.5$ の場合に

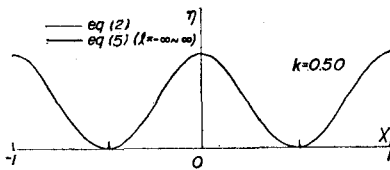


図-2 クノイド波の波形に関する式(2)と式(5)との比較

について $l=0$ の値を十分に大きくして、隣接波の影響を評価したときの式(2)および(5)による波形の比較を示したものであり、当然ながら両者は完全に一致している。

以上から、式(5)によって任意のクノイド波の表示が十分可能であるが、個々のソリトンを独立した粒子のように扱えるようになるには、母数 k が 0.98 程度となる非線形性の卓越した波であることが必須となってくる

ことがわかる。また、このような $k \geq 0.98$ となる波では、隣接波の影響が無視されるから、隣接波の波高を任意に変化させてやれば、不規則なソリトンの連なりとなる。この場合には、各ソリトンの伝播速度が異なるために波峰間隔が変化し、相互干渉の影響が現れるが、一定時間後には独立なソリトン波列にもどることは言うまでもない。

3. 相互干渉を無視した場合のソリトンスペクトル

(1) 基本仮定とその考え方

対象とする波がソリトンによって合成されているとすれば、成分波である個々のソリトンの特性から、元の波浪の力学的構造を究明することは可能であろう。したがって、ソリトンを基本成分としたときの不規則波のスペクトル構造は、含まれるソリトンの固有値の頻度分布によって決定されることになる。ソリトンの固有値自体は相互干渉に対して独立であるが、波形に相互干渉の影響が現れるため、対象とする波をソリトンに厳密に分解するためには、式(4)を初期値問題として解き、独立なソリトン群となる $t \rightarrow \infty$ における解から、含まれるソリトンを決定する必要がある。しかしながら、この計算を任意の初期波に対して行うことは必ずしも容易ではない。単なる固有値の計算であれば、 $t=0$ での波形 η をポテンシャルとする Schrödinger 方程式の固有値問題を解くことによって、固有値は決定されよう。しかしながら、この手法では、時系列としての波形の再現が不可能となる。

そこで、理論的には若干の矛盾はあるが、ソリトンスペクトルの帯域幅が狭帯域であり、各波の峯が重なり合っていない場合の不規則波を対象とし、相互干渉の波形に及ぼす影響は無視されるものとする。この場合、対象とする波の波形は、次式のように N 個のソリトンの連なりとして表せよう。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \sum_{i=1}^N \eta_i \\ \eta_i &= A_i \operatorname{sech}^2 \{ (\sqrt{3}A_i/2)(\vartheta - \vartheta_i) \} = A_i \phi_i(\vartheta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、波の計測期間を 0 から ϑ_T としたとき、 $0 \leq \vartheta_i \leq \vartheta_T$ であり、 ϑ_i は各ソリトンの波峰位置の原点からのズレを示す。すなわち、各 ϑ_i の点に固有値 A_i のソリトンの峯が位置するものと仮定し、各 ϑ_i に対する A_i を求めることになる。したがって、 ϑ_i は線形波スペクトルの周波数 f_i に相当するものといえよう。

式(8)によって表される波形が力学的に可能であるには、式(8)が前述の K-dV 方程式を満足しなければならないが、式(8)の K-dV 方程式に対する誤差の平均値 I は、次式のようになる。

$$I = \frac{3\sqrt{3}}{2\theta_T} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l \neq i}^{\infty} A_i^{3/2} A_l \times \int_0^{\theta_T} \tanh \theta_i \operatorname{sech}^2 \theta_i \operatorname{sech}^2 \theta_l d\theta \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\theta_i = (\sqrt{3}A_i/2)(\theta - \theta_i)$ である。ここで、 i と l の値が大きく相違すれば、 sech^2 の特性から両者の内積はゼロとなり、前述の η に対する仮定を考慮すれば、誤差は次式の程度となる。

$$I \approx \frac{3\sqrt{3}}{2\theta_T} \sum_{i=1}^N A_i^{3/2} \times \left\{ A_{i+1} \int_0^{\theta_T} \tanh \theta_i \operatorname{sech}^2 \theta_i \operatorname{sech}^2 \theta_{i+1} d\theta \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

いま、式 (9) の誤差 I は無視される程度であり、かつ式 (8) によって対象とする不規則波の波形が十分な精度で表されるものとすれば、その不規則波はソリトンの連なりであると考えることができる。したがって、式 (8) の関係を満足する固有値 A_i が決定できれば、ここで述べたソリトンスペクトルの考え方は実用上の意義を持つであろう。

(2) 直交化法によるソリトンスペクトルの計算法

Schmidt の方法を式 (8) に適用すれば、次式のように正規直交系 ϕ_i の 1 次結合列に書き換えられる。

$$\eta = \sum_{i=1}^N A_i \phi_i(\theta) = \sum_{i=1}^N A_i \sum_{l=1}^i c_{il} \phi_l(\theta) \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \phi_1 / \|\phi_1\| \\ \phi_l &= \left\{ \phi_l - \sum_{j=1}^{l-1} (\phi_l, \phi_j) \phi_j \right\} / \left\| \phi_l - \sum_{j=1}^{l-1} (\phi_l, \phi_j) \phi_j \right\|, \quad (l \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

であり、 (ϕ_l, ϕ_j) は $\int_0^{\theta_T} \phi_l \phi_j d\theta$ で定義される内積である。なお、数値計算に都合の良い行列式による ϕ_i の表示は、次式のようになる。

$$\phi_l = |F| \cdot G(\phi_1, \dots, \phi_{l-1})^{-1/2} \cdot G(\phi_1, \dots, \phi_l)^{-1/2}, \quad (l \geq 2) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} [F] &= \begin{bmatrix} (\phi_1, \phi_1) & \dots & (\phi_1, \phi_l) \\ \vdots & & \vdots \\ (\phi_{l-1}, \phi_1) & \dots & (\phi_{l-1}, \phi_l) \\ \phi_1 & \dots & \phi_l \end{bmatrix} \\ G(\phi_1, \dots, \phi_l) &= \begin{bmatrix} (\phi_1, \phi_1) & \dots & (\phi_1, \phi_l) \\ \vdots & & \vdots \\ (\phi_l, \phi_1) & \dots & (\phi_l, \phi_l) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

であり、 (ϕ_i, ϕ_i) は前述同様の内積を示す。また、 c_{il} は次式によって与えられる。

$$c_{il} = D_{il}(d_{11} \cdot d_{22} \dots \cdot d_{NN}) \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 D_{il} は次式に示される行列 $[D]$

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ d_{N1} & \dots & d_{NN} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (16)$$

の d_{il} 要素の余因子であり、要素 d_{il} は次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} d_{il} &= \left\{ \phi_l - \sum_{j=1}^{l-1} d_{ji}(\phi_l, \phi_j) \right\} / \|\phi_l - \sum_{j=1}^{l-1} d_{ji}(\phi_l, \phi_j)\|, \quad (l > i \geq 1) \\ d_{il} &= 1 / \left\| \phi_l - \sum_{j=1}^{l-1} d_{ji}(\phi_l, \phi_j) \right\| \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

なお、 d_{il} に対しても数値計算に都合の良い行列式による表示を与えれば、それは次式となる。

$$d_{il} = (-1)^{l+i} F_{il} \cdot G(\phi_1, \dots, \phi_{l-1})^{-1/2} G(\phi_1, \dots, \phi_l)^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 F_{il} は式 (14) に示した行列 $[F_{il}]$ の (l, i) 要素の余因子である。

ϕ_i は正規直交系であることから、式 (11) に ϕ_i を掛け、波の計測期間 θ_T で積分すれば、次式のようになる。

$$\int_0^{\theta_T} \eta \phi_i d\theta = \sum_{l=1}^N A_l c_{il}, \quad l=1, \dots, N \quad \dots\dots\dots (19)$$

したがって、これを A_i に関して解けば、次式となる。

$$\left\{ \begin{matrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} d_{11} \dots d_{N1} \\ \vdots \\ 0 \dots d_{NN} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} (\eta, \phi_1) \\ \vdots \\ (\eta, \phi_N) \end{matrix} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

実際に式 (20) を解いて $\{A\}$ を求める計算は、Newton 法を改良した Broyden 法を用いて行なうことができる。したがって、 $\{A\}$ は近似解であるが、これによる式 (20) の誤差はたかだか 10^{-5} 程度であり、精度的な問題はなないと言える。

なお、このような直交化法によらず、実測波形 η に対して、次のように直接 A_i を決定することもできる。いま、実測波形を η_m 、式 (8) によって与えられる波形を η_0 と書けば、両者の平均誤差 E は、次式で表される。

$$E = \frac{1}{\theta_T} \int_0^{\theta_T} (\eta_m - \eta_0)^2 d\theta \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 E を最小とするように A_i を決定するのであれば、 A_i は次式の解として導かれる。

$$\partial E / \partial A_i = 0, \quad i=1, \dots, N \quad \dots\dots\dots (22)$$

この手法は、理論的には前述の直交化法よりも精度において劣るが、計算法自体は直接的で簡単という利点がある。

4. 現地波浪へのソリトンスペクトルの適用

ここでは、前述した手法をうねり性の現地波浪に適用し、ソリトンスペクトルの分解を試みる。

このため、新潟県大潟海岸における帝国石油(株)の長大栈橋に沿った 2 点で測定されたうねり性の現地波浪を

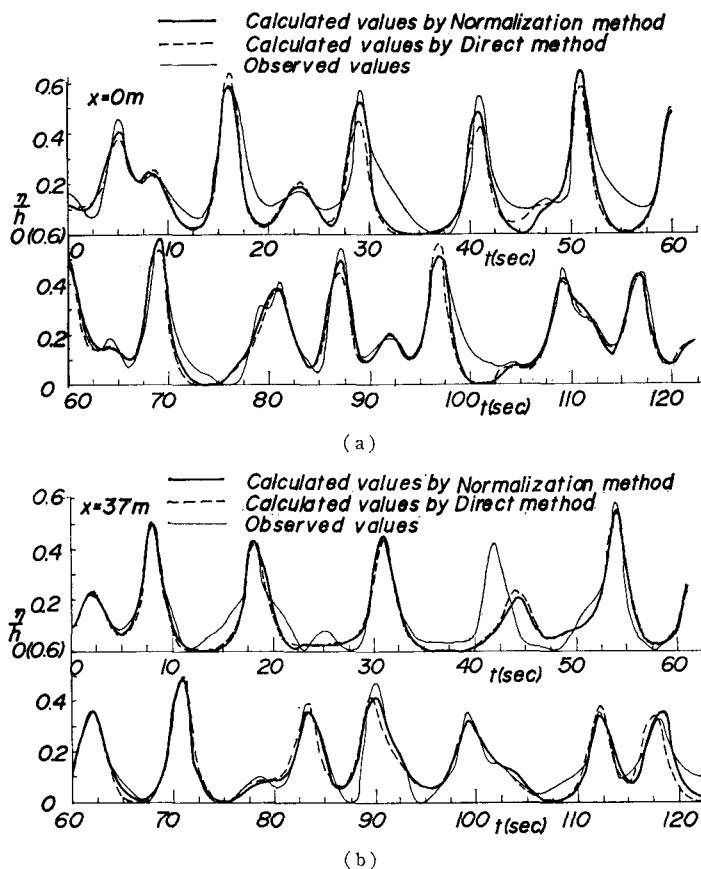


図-3 ソリトン合成波と実測波との波形に関する比較

取扱うことにする。このときの平均風速は 5 m/sec 程度であり、2 点間の水深変化は数 cm 程度であることから、このときの波浪に及ぼす風や水深変化の影響は十分に無視できるものと判断される。したがって、スペクトル成分がこのときの波浪の力学的な基本成分に一致していれば、海底摩擦などの影響が無視できる限り、各測点でのスペクトル形は保存されることになる。この点を明らかにするため、このときの波形に対して式 (8) の関係を仮定し、そのソリトン分解を行い、各測点におけるソリトンスペクトルを求める。なお、固有値 A_i を求める計算においては、1 つの峯に 1 ケのソリトンが対応するものと仮定しているの、波峯位置に対応する ϑ_i のみを残し、方程式の次元を下げて計算の簡略化を図ることとした。

図-3 は、前述の現地波浪の波形を直交化法および直接法によってソリトン分解して固有値 A_i を決定し、その固有値を用いてソリトン合成した波形を元の実測波形と比較したものである。これから、破線で示される直接法による合成波に比べて、実線で示される直交化法による合成波の方が細かい実線で示される実測波と良く対応しており、直交化法の精度が良好であることがわかる。ま

た、直交化法による式 (9) の誤差は、ただだか 10^{-5} の程度であり、図に示される波形が単に実測波形と良く対応しているというだけでなく、力学的にも十分根拠を持ったものであることがわかる。したがって、図中の細かい実線で示されるようなうねり性の現地波浪に関しては、そのソリトン分解および合成が十分に可能であり、ソリトンを波浪の力学的な基本成分として扱うことは可能であると言えよう。

なお、図-4 には計算されたソリトンの固有値の分布

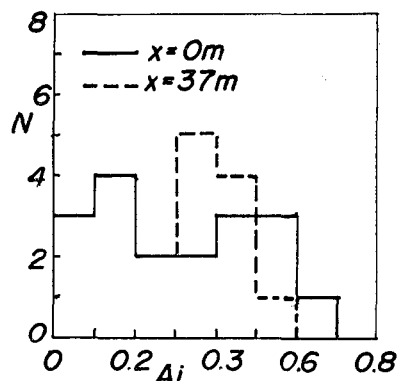


図-4 ソリトンスペクトル、とくに固有値の分布

を示す。対象とした波浪の計測時間は、この場合約 2 min であるが、波浪の統計的特性からいえば、10 min~20 min を対象とすべきである。もし、このように計測時間を長くすれば、1つのソリトンスペクトルの分布が求められるであろう。

5. 結 語

以上、ソリトンが極浅海域における波のエネルギーの基本単位とするソリトンスペクトルの理論を試み、クノイド波やうねり性の現地波浪がソリトンの連なりとして表されることを示した。そして、ソリトンを基本成分とした1つのコヒーレントな力学的秩序が極浅海域の波浪に存在することの可能性を明らかにした。

今後は、この力学的秩序をより明確にするため、相互

干渉の影響を評価すると同時に、長時間計測された波浪記録を取扱い、ソリトンスペクトルの分布形の一般化を行っていきたい。

なお、本研究は文部省特定研究（代表者土屋義人）による研究成果の一部であることを付記する。

参 考 文 献

- 1) Toda, M.: Waves in nonlinear lattice, Supplement of Progress Theo. Physics, No. 45, pp. 174~200, 1970.
- 2) Tsuchiya, Y. and T. Yasuda: A cnoidal wave theory and its verification, Supplement to 3rd Australian Conf. on Coastal and Ocean Engg., p. 7, 1977.
- 3) 岩垣雄一: クノイド波に関する研究 (第4報)——hyperbolic waves について (1)——, 京大防災研年報第 10 号 B, pp. 283~294, 1967.