

河川津波の遡上計算

後藤 智明*・首藤 伸夫**

1. 序

河川を遡る津波は、河川固有流量を有していることおよび比較的浅い水域を伝播することにより、段波状の波頭になりやすい。また、蛇行彎曲部をもつ河口付近での段波状津波の数値計算には、非常な困難が伴うものと考えられる。

河川内の段波に関する従来の数値計算は、河道を一次元水路とみなし、特性曲線法あるいは Lax-Wendroff 型の差分法を用いているものが多く、河川の彎曲部における段波の挙動といった、河道の二次元性を考慮したものは少ない。しかし、河川彎曲部においては、流線が曲げられること、河岸からの反射の効果等のため、定常流の場合に比べ一層大きな水面傾斜が発生することが水理実験により確かめられており¹⁾、河川を遡る津波による越流とそれにもとづく被害を推定するうえで見逃すことのできない重要な問題のひとつである。

本研究では、河川内の段波の伝播を取り扱うのに最適な数値計算法について検討する。まず、ダム決壊による段波の発生の問題を例として、水理実験と比較することにより、各種数値計算法の比較検討を行う。次に、河川彎曲部の段波の伝播を精度良く取り扱い得る方法として、直交曲線座標系の方程式を用いた計算法を提案し、水理実験および従来の計算法と詳細に比較している。さらに、実際の河川を対象として計算を行うことにより、本研究で提案した手法の実用上の問題点についても検討している。

2. 段波の数値計算法の検討

(1) 水理実験

ダム決壊による段波の伝播に関する数値計算の精度を知る目的で、図-1 に示す鋼製矩形水路を用いて水理実験を行った。水路の上流には貯水槽を設け、段波の発生はゲートの急開による。水位の測定にはサーボ式水位計およびソーテードライブカメラを用いた。

図-2 に貯水槽水位 19.0 cm、下流静水深 9.5 cm の

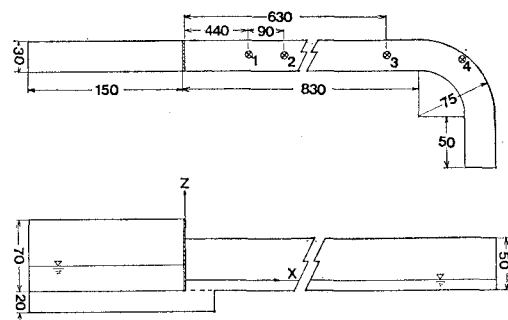


図-1 実験水路 (単位 cm)

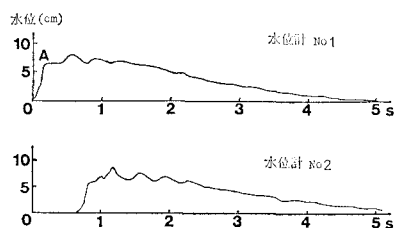


図-2 水位記録

水位記録を示す。この実験結果を各種数値計算法の比較のための例題波とする。

(2) 各種数値計算法の比較

現在まで提案されている代表的な計算法としては、特性曲線法、差分法、有限要素法およびセル撰点法がある。本研究では代表的な 2 種の差分法 (two-step Lax-Wendroff 法と leap-frog 法) と有限要素法を取り上げる。特性曲線法は Stoker²⁾ によって解析的に取り扱われ、このダム決壊問題に関する解が得られている。また、セル撰点法はこの問題のような発展方程式系の計算に使用された例はなく今後の問題である。

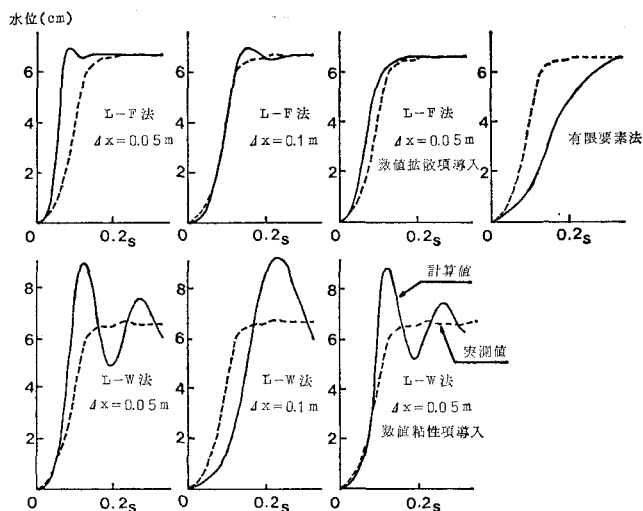
本研究では数値計算の支配方程式として鉛直方向に積分した浅水理論を用いる。摩擦は Manning の n で表現し、 $n=0.013$ を採用している。

差分法の計算は簡単のため一次元伝播とし、格子長 Δx は 5 cm および 10 cm の 2 種類実施した。また、L-W 法では数値粘性項³⁾、L-F 法では数値拡散項⁴⁾を導入した計算も行っている。

有限要素法は時間積分を two-step Lax-Wendroff 型⁵⁾

* 正会員 工修 東北大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科



図—3 水理実験と数値計算との比較

で計算し、簡単のため一次式の形状関数を用いた。有限要素は短辺 10 cm の直角二等辺三角形を用い、有限要素法の特性から二次元伝播として取り扱った。

段波の不連続面に関して水理実験と数値計算結果との比較を 図—3 に示す。比較のため波先は一致させている。図—3 の数値計算結果には水理実験に比べ解がなまったりオーバーシュート気味になるものがある。数値計算の誤差をこのなまりとオーバーシュートで表わすと表—1 となる。表中なまり度とは段波前面における波形

表—1 水理実験と数値計算との比較

Run	方 法	格子長要素	な り 度	オーバースhoot度	備 考
1	水 理 実 験	—	0.353	0.0	
2	理 論 解	—	0.0	0.0	
3	leap-frog 法	0.05 m	0.706	0.046	
4		0.10	0.353	0.046	
5		0.05	0.392	0.0	数値拡散項導入
6	2-step Lax-Wendroff 法	0.05	0.505	0.631	
7		0.1	0.252	0.677	
8		0.05	0.602	0.592	数値粘性項導入
9	有限要素法	0.1	0.221	0.0	

勾配、オーバーシュート度とは段波波高に対するオーバーシュート高の比で定義したものである。理論解はどちらも零となる。

以上の結果をまとめると次のことがいえる。

- ① 差分法による数値計算結果は水理実験結果に比べ多少オーバーシュート気味の解となる。特に、L-W 法は比較的大きなものとなり、数値粘性項の導入によっても除去困難である。
- ② 差分法の解のなまりは水理実験に比べ、さほど大

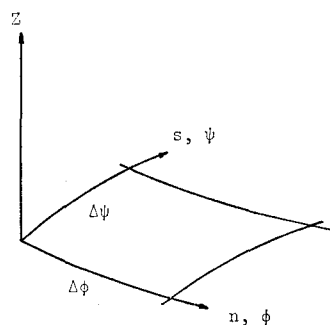
きいものではない。しかし、 Δx 格子長が長い程、解のなまりが大きくなる。

- ③ 一方、有限要素法は解のオーバーシュートはまったくみられないが、大きな解のなまりを呈する。
- ④ 以上の結果から、L-F 法および有限要素法が段波の伝播に関し比較的良好な結果を与えることがわかるが有限要素法は大きな解のなまりを呈し、また複雑な演算を必要となることを考えると現況では L-F 法が最適であると結論できる。

3. 曲線座標系による長波の方程式

(1) 曲線座標

蛇行河川を遡上する段波状津波を考えると、河川彎曲部の形状や流線の曲りによる遠心力の効果を直接評価するためには曲線座標を採用する方がよい。本研究では、水平方向に直交曲線座標、鉛直方向には直線座標を用いた Kalkwijk 等⁹⁾の座標系について検討する。



図—4 直交曲線座標

図—4 のように、水面上に (ϕ, ϕ) なる直交曲線座標、鉛直方向には直線座標 z 軸を採用する。いま、微小円弧区間 $\Delta\phi, \Delta\phi$ に対応する長さを $\Delta s, \Delta n$ とおくと両者の関係は

$$\Delta s = l_s \Delta\phi, \quad \Delta n = l_n \Delta\phi \quad \dots\dots\dots (1)$$

となる。ここで、 l_s, l_n は測度係数と呼ばれるもので、直線座標であれば定数となるが、曲線座標系においては (ϕ, ϕ) の関数となる。また、

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{l_s} \frac{\partial}{\partial\phi}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{l_n} \frac{\partial}{\partial\phi} \quad \dots\dots\dots (2)$$

なる関係もある。したがって、この曲線座標系は (ϕ, ϕ, z) 系と (s, n, z) 系のどちらの系を採用してもよい。また、この曲線座標系の局所的な曲率は、 ϕ 軸、 ϕ 軸に関するものをそれぞれ κ_s, κ_n とおくと

$$\kappa_s = \frac{1}{l_s l_n} \frac{\partial l_n}{\partial\phi}, \quad \kappa_n = \frac{1}{l_s l_n} \frac{\partial l_s}{\partial\phi} \quad \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる。したがって、この座標系はその局所的な

曲率を用い (s, n, z) 系で取り扱った方が一般的に楽である。

(2) 浅水理論

(s, n, z) 系の曲線座標系において長波の二次元伝播運動を考える。基本方程式群を Johnson 風の展開を施すと次式で表わされる浅水理論式が導かれる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial Q_n}{\partial n} + \kappa_s Q_n + \kappa_n Q_s = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial Q_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{Q_s^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{Q_s Q_n}{D} \right) + 2 \frac{\kappa_s}{D} Q_s Q_n + \frac{\kappa_n}{D} (Q_s^2 - Q_n^2) + gD \frac{\partial \eta}{\partial s} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{Q_s Q_n}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{Q_n^2}{D} \right) + 2 \frac{\kappa_n}{D} Q_s Q_n + \frac{\kappa_s}{D} (Q_n^2 - Q_s^2) + gD \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

ここで, Q_s, Q_n : s 軸, 軸 n 方向の流量フラックス,

η : 水位,

D : 全水深,

g : 重力加速度,

である。

次に, 曲線座標のひとつの軸が直線であるような場合を考える。いま, ϕ 軸 (n 軸) が直線軸であるものとする。この場合は (ϕ, ϕ, z) 系で取り扱った方が便利であり, 浅水理論式は次式で表わされる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial Q_s}{\partial \phi} + \frac{\partial Q_n}{\partial \phi} - \frac{\kappa_s}{J} Q_n = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial Q_s}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{Q_s^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{Q_s Q_n}{D} \right) - 2 \frac{\kappa_s}{JD} Q_s Q_n + \frac{gD}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial Q_n}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{Q_s Q_n}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{Q_n^2}{D} \right) + \frac{\kappa_s}{JD} (Q_s^2 - Q_n^2) + gD \frac{\partial \eta}{\partial \phi} = 0 \quad (9)$$

ここで, $J=1-\kappa_s \phi$ である。

4. 曲線水路中の段波の数値計算

(1) 水理実験

水理実験は 図-1 に示す曲率半径 75 cm, 彎曲角 90° の曲線水路で行った。実験方法は 2. と同一である。

図-5 に実験結果の一例を示す。水位の経時記録である。水位計 No. 4 の記録中, A 点は曲線水路外壁における段波波頭の増幅を示す。B 点は水路末端からの反射波である。この実験結果を数値計算のための例題波とする。

(2) 数値計算

ここでは, 図-5 に示した段波の記録を題材として, 従来の直線座標系による計算と 3. で説明した直交曲線

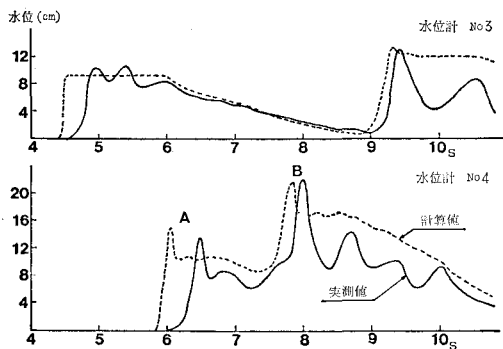


図-5 水位記録 (貯水槽水位 21 cm)

座標系を用いた計算を比較する。ここで問題とする水路は同一曲率の水路であり, 曲線座標系の方程式としては (ϕ, ϕ, z) 系の式 (7)~(9) が適している。数値計算法は 2. で検討したとおり L-F 法を用いた。計算の格子長は 0.05 m と 0.03 m を採用した。

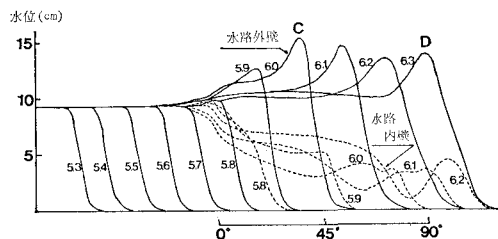
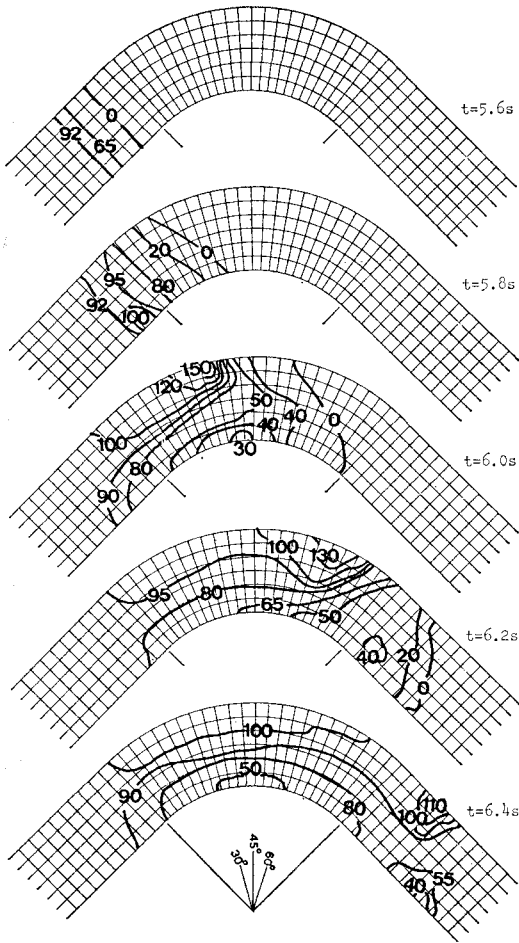


図-6 曲線座標による計算結果 (空間水位)

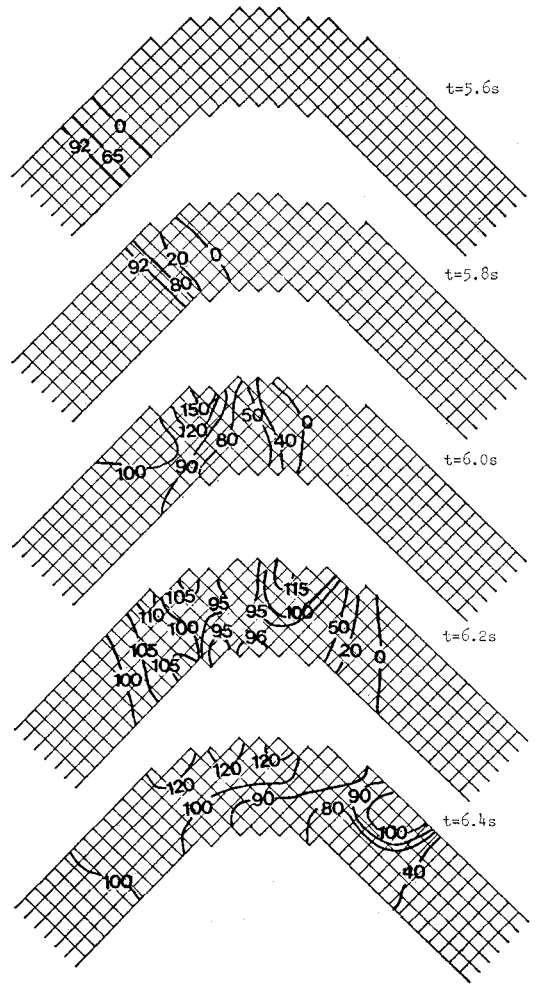
図-6 および 図-7 に曲線座標を用いた計算結果の一例を示す。図-6 は水路外壁および内壁に沿った 0.1 s ごとの空間水位である。図中の数字はゲート急開時刻からの経過時間である。図-7 は 0.2 s ごとの曲線水路付近の空間水位分布である。両図共に, 水路の曲線部外壁において段波波頭が直線部より増幅し, 内壁側で低くなり, 曲線部において水路横断方向に大きな水路傾斜が発生することがわかる。また, この水面傾斜に起因した横振動もみられる。

一方, 従来の直線座標を用いた計算の 0.2 s 毎の空間水位分布を 図-8 に示す。直線座標では計算の格子を若盤の目のように組むため, 水路の側壁は階差的な近似となる。

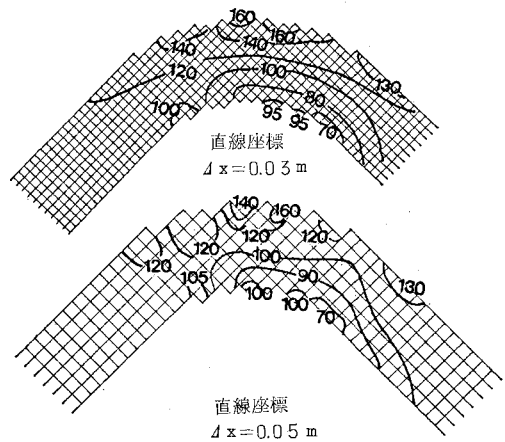
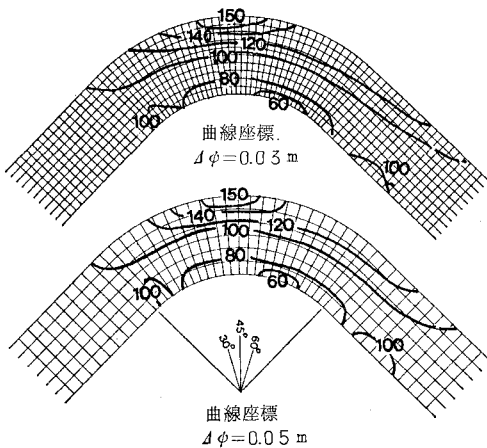
最大水位分布に関して両者の計算結果を比較したものが 図-9 である。曲線座標の計算結果は格子長の違いによる差はほとんど見られず, 最大水位分布は, 水路曲部の内壁から外壁方向に連続的に高くなる。一方, 直線座標の計算結果は格子長の違いにより大きな差を呈する。格子長の大きい方は水路曲線壁の近似が粗く階差的になるため, その複雑な反射によりところどころに水面の離散的な高まりが生ずる。格子長が小さい方は, この水位の離散的な高まりが比較的小さなものとなり, 曲線座標



図—7 曲線座標による計算結果 (空間水位分布・単位 m)



図—8 直線座標による計算結果 (空間水位分布・単位 m)



図—9 最大水位分布に関する比較 (単位 mm)

の計算結果に近い結果を与える。

以上の結果をまとめると次のことがいえる。

- ① 直交曲線座標による浅水理論式は L-F 法により安定な数値計算が可能である。

- ② 直交曲線座標を採用することにより、従来の直線座標では困難であった曲線水路の側壁の境界を正確に表現可能である。また、図—5 に示すように最大水位に関しては水理実験結果と非常に良い一致を示

す。

- ③ 従来の直線座標の計算では、格子長が大きい程曲線水路の側壁境界の近似度が悪くなるため不自然な計算結果となる。したがって、直線座標を用いるときは相当細かな格子長を選ぶ必要がある。
- ④ 現況では、曲線水路内の段波の伝播に関する数値計算法には直交曲線座標系の L-F 法が最適である。

5. 実河川への応用

ここでは本研究で提案した曲線座標を用いた数値計算の実河川への応用とそれに伴う問題点を論議する。対象とした河川は河口付近で大きく彎曲しており、本研究の試行には適したものと考えられた。ただし、計算に用いた形状は現況ではなく、計画断面である。

計算に用いた方程式は、この川の曲率が複雑な分布をするため (s, n, z) 系の式 (4)~(6) を用いた。段波は波

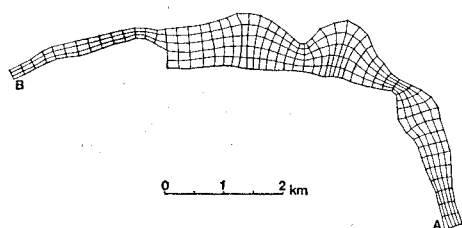


図-10 格子分格

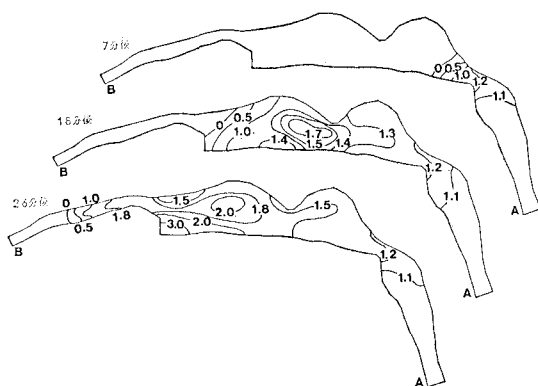


図-11 空間水位分布 (単位 m)

高 1 m の $\tanh$ 形で与えた。図-10 に格子分割図を示す。

計算結果の例を 図-11 に示す。図は各時刻の空間水位分布を表す。格子を比較的大きくとしたため、解のなまりは大きい。河幅の変化による水位分布もみられ望ましい結果となった。このような計算は安定に行なわれ、曲線座標を用いた計算法は従来の直交座標の計算に比べ多少複雑な予備的な作業を必要とするが、河岸の近似等優れているところが数多くあると思われる。

6. 結 言

本研究では、河川内の段波性津波の伝播に関して各種数値計算法を検討したが、現況では直交曲線座標を用いた leap-frog 法が最適であることを明らかにした。また、この方法は河川だけではなく複雑な形の湾等の計算にも威力を発揮すると思われる将来性ある手法であるといえよう。

謝辞： この研究を行うにあたり、文部省から科学研究費（研究代表者 東京大学堀川清司教授）による補助を受けた。また、計算・整理にあたり当時東北大学学部生であった馬上洋一君、大学院学生 諸君の熱心な助力を得た。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 後藤智明・首藤伸夫：湾曲水路における急変不定流に関する実験，第 34 回年講，pp. 757~758, 1979.
- 2) Stoker, J. J.: Water Waves, Interscience Publishers, Inc., New York, pp. 330~341, 1957.
- 3) Von Neumann, J. and R. D. Richtmyer: A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, J. of Applied Physics, Vol. 21, No. 3, pp. 232~238, 1950.
- 4) 後藤智明・首藤伸夫：各種津波上計算法と波先端条件の比較，第 27 回海講，pp. 80~84, 1981.
- 5) 川原睦人・竹内則雄・首藤伸夫：2 段階ラックス・ウエンドロフ有限要素法による潮流解析，第 23 回海講，pp. 498~501, 1976.
- 6) Kalkwijk, J. P. Th. and H. J. de Vriend: Computation of the flow in shallow river bends, J. of Hydraulic Research, Vol. 18, No. 4, pp. 327~342, 1980.