

特性曲線法による非線形長波の変形特性について

石 田 啓*・中 島 光 浩**

1. 緒 言

浅海域における海岸構造物に作用する波力あるいは底質の移動などを検討する場合、水面波形およびその内部機構を知ることは極めて重要である。最近、安田ら^{1),2)}は、一様斜面上の K-dV 方程式の数値解を求め、水面波形および水粒子速度の時間波形の特性を明らかにしている。しかし、現地海浜が、一様勾配斜面で表される簡単な地形でないことを考えると、種々の底面地形に対する波の変形特性を考究することが必要となる。従来、Madsen ら³⁾は Mei ら⁴⁾の誘導した長波の方程式を用い、斜面以外の底面地形上の孤立波の変形を計算しているが、これは、ごく限られた条件における波の変形を取り扱っているにすぎない。

したがって、本研究では、Mei らの提示した方法と、メッシュ幅を一定とする長方形格子法を用いた特性曲線法⁵⁾を組み合わせ、非線形性、分散性および底面勾配効果を考慮した時の種々の底面地形上を進行する波の変形を考察する。この際、初期波には正弦波、クノイド波および孤立波を用いる。さらに、Mei らの理論から、水粒子速度の算定式を誘導し、斜面上の水粒子速度についても検討する。また、この計算方法により、流れの場における斜面上の孤立波の変形についての計算を試みることとする。

2. 基礎方程式および計算方法

詳細は Mei ら⁴⁾の論文に示されているため、ここでは、概略のみを述べる。座標系を図-1 のようにとり、基準となる水深を h_0 、

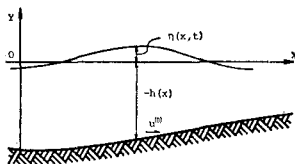


図-1 座標系

そこにおける波長を L_0 、重力加速度を g で示し、 $L_0\sqrt{gh_0}$ で割って無次元化した速度ポテンシャル ϕ を、

$$\phi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (y+h)^n \phi^{(n)}(x, t) \dots\dots\dots (1)$$

のように $(y+h)$ のべきで展開し、これをラプラスの式および底面における境界条件式に代入すれば、 $\phi^{(n)}$ に関する漸化式が得られ、すべての $\phi^{(n)}$ が $\phi^{(0)}$ を用いて表される。ここに、 x および y ならびに h は、 L_0 で割って無次元化した水平および鉛直方向座標ならびに水深であり、 t は $L_0/\sqrt{gh_0}$ で割って無次元化した時間である。

次に、波の非線形性および分散性が同程度と仮定すると、水面における運動学的および力学的条件式は、

$$\begin{aligned} \eta_t + u^{(0)}\eta_x + (h+\eta)u_x^{(0)} - (h^3/6)u_{xxx}^{(0)} \\ = Au^{(0)} + Bu_x^{(0)} + (3h^2h'/2)u_{xx}^{(0)} + O(\varepsilon^4) \dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_t^{(0)} + u^{(0)}u_x^{(0)} + \eta_x/\varepsilon - (h^2/2)u_{xt}^{(0)} \\ = (h'^2 + hh'')u_t^{(0)} + 2hh'u_{xt}^{(0)} + O(\varepsilon^5) \dots\dots (3) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $u^{(0)} = \phi_x^{(0)}$ であり、

$$\begin{aligned} A = -h' + h'^3 + 3hh'h'' + h^2h'''/2, \\ B = 3hh'h'^2 + 3h^2h''/2 \end{aligned}$$

である。また、 $\varepsilon = h_0/L_0$ であり、 h' 、 h'' および h''' は、それぞれ、 x に関する 1 階、2 階および 3 階の導関数、 η は L_0 で割って無次元化した水面の高まりである。これらを特性曲線表示すれば、 $dx/dt=0$ に沿って、 $d\eta/dt = a$ ($\equiv \eta_t$) および $da/dt = \Omega$ ($\equiv a_t$) が成立し、

$$dx/dt \equiv \zeta = \pm \sqrt{\frac{3(h-hh'^2-h^2h'')}{\varepsilon(1-hh'/2)}} \dots\dots\dots (4)$$

に沿って、

$$\begin{aligned} \left(\frac{h\zeta}{6} + \frac{hu^{(0)}}{2} \right) \frac{d\eta}{dt} + \frac{5h'h^2}{12} \frac{da}{dt} \\ + \left(1 - \frac{hh''}{2} \right) \frac{\varepsilon h\zeta^2}{6} \frac{du^{(0)}}{dt} + \frac{\varepsilon h^2\zeta}{12} \frac{d\Omega}{dt} \\ = \left[\frac{h\zeta}{2} \left(\frac{h'\eta}{h} - h' + h'^3 + \frac{h^2h'''}{3} + 2hh'h'' \right) \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon h'\zeta^2}{6} u^{(0)} \right] u^{(0)} + \frac{hh'}{6} \left(\frac{5h}{2} - \varepsilon\zeta^2 \right) \Omega \\ + \left[\frac{\eta\zeta}{2} - \frac{h\zeta}{3} + \left(\frac{h}{2} + \frac{\varepsilon\zeta^2}{6} \right) u^{(0)} \right] a \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

が成立する。

計算に際し、本研究では、メッシュ幅を一定とする長方形格子法を用い、補間には 2 次曲線を用いたが、差分形式は、最も簡単な陽解法を採用した。なお、初期波は一様水深部で与えたが、正弦波およびクノイド波については、2 波長分を本来の波形とし、その前後端は静水面

* 正 会 員 金沢大学助教授 工学部土木工学科

** 学生会員 金沢大学大学院 土木工学科

に滑らかに接続するように修正した波を用いた。

水平方向および鉛直方向の水粒子速度 u および w を $\sqrt{gh_0}$ で割って無次元化した速度を U および W と書くが、これらは、以上の計算から求まった $u^{(0)}$ を用いて、

$$U = u/\sqrt{gh_0} = (1-h'^2)u^{(0)} - 2h'(y+h)u_x^{(0)} - (y+h)^2u_{xx}^{(0)}/2 \dots\dots\dots(6)$$

$$W = w/\sqrt{gh_0} = -h'(1-h'^2)u^{(0)} - 2(y+h)(1-2h'^2)u_x^{(0)} + 3h'(y+h)^2u_{xx}^{(0)}/2 + (y+h)^3u_{xxx}^{(0)}/6 \dots\dots\dots(7)$$

と表わすことができる。

3. 計算結果および考察

(1) 一様水深場における正弦波の変形

図-2 は正弦波の分裂を示す一例である。分裂した波峰がそれぞれの波速で進行し、副峰が主峰に追い抜かれる地点では、波形は、再びほぼ元に戻る。この場合、波は2つの波峰に分裂しているが、水深波長比 h/L がさらに小さくなれば、分裂する波峰の数は増加する。

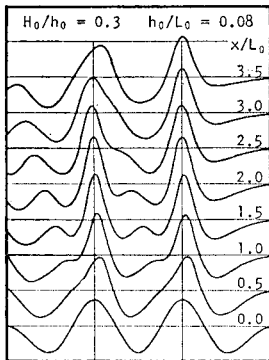


図-2 一様水深場の正弦波の変形

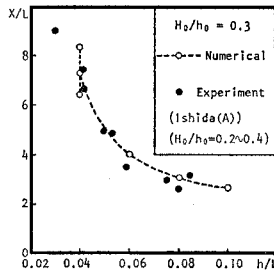


図-3 正弦波の再現間隔

図-3 には、正弦波の再現間隔の計算値と実験値との比較を示す。再現間隔とは、変形した波が、再び元の波形に戻るまでに進行する距離のことであるが、図中、白丸は、初期波高・水深比が $H_0/h_0=0.3$ の場合の計算値であり、黒丸は、石田(昭)ら⁹⁾による $H_0/h_0=0.2\sim0.4$ の範囲内の実験値である。図より、両者は良く一致していることがわかる。なお、水深・波長比が $h/L=0.04$ の場合の計算では、波が3つの波峰に分裂したため、2波長分の正弦波を用いた波形から再現間隔を求めることは困難であった。したがって、この場合の再現間隔のみ、波速から推定した。すなわち、主峰の波速 c_1 、第2の波峰の波速 c_2 および第3の波峰の波速 c_3 を用いて、 $c_1/(c_2-c_3)$ 、 $2c_1/(c_1-c_3)$ および $c_1/(c_1-c_2)$ の3通りの方法により再現間隔を求め、これらを図中に示した。

図-4 には、分裂した各々の波峰の波速 c_1 、 c_2 および c_3 を示すが、図中、黒丸は初期正弦波の微小振幅波理論による波速である。図より、 h/L の増加に伴い、 c_1 および c_2 は共に減少するが、 h/L が 0.08 以上になると、 c_1 は微小振幅波理論の値よりも小さくなり、また、 c_2 は急激に減少することがわかる。

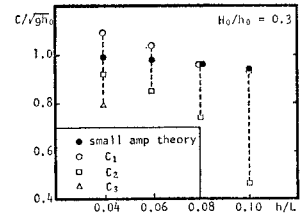


図-4 分裂波の波速

(2) 斜面上のクノイド波の変形

図-5 は、クノイド波を初期波とした時の勾配 $S=1/20$ の斜面上の波形の計算値を、岩垣ら⁷⁾による実験値と比較したものである。計算値は非周期波であるにもかかわらず、水深・初期水深比 h/h_0 が 0.51 および 0.34 において、周期波である実験値とよく一致している。このことは、計算に用いた非周期波を周期波とみなしてきつかえないことを意味すると共に、本計算方法の妥当性を示していると言える。図-6 は、 $S=1/20$ の斜面上での波の水平方向水粒子速度の鉛直分布を、岩垣らの実験値⁷⁾と比較したものである。初期波の沖波波形勾配は $H^*/L^*=0.017$ であり、斜面上の位置は、水深・沖波波長比が $h/L^*=0.038$ 、すなわち、水深・初期水深比が $h/h_0=0.55$ である。計算値では、点線で示した峰における水平方向水粒子速度 u_0 と、実線で示した水平方向水粒子速度の最大値 u_{max} とは一致しない。両者の差異は、砕波点近傍以外の地点では、さほど大きくはないが、この差異が生じる原因については、今後検討しなければならない。しかし、これらの計算値は、クノイド波理論を用いた解析解に比べ、実験値と良く一致する。したがって、斜面上の水平方向水粒子速度は、本計算法により、式(6)を用いて、ほぼ妥当な値が得られると思われる。図-7 は、斜面上の波の波速の計算値を、

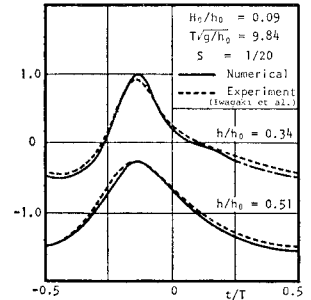


図-5 水面波形の実験値との比較

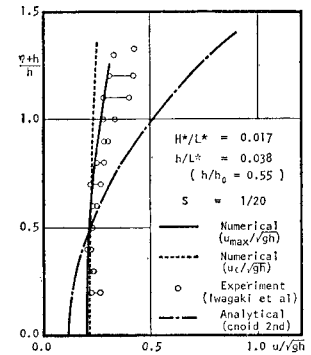


図-6 水粒子速度の実験値との比較

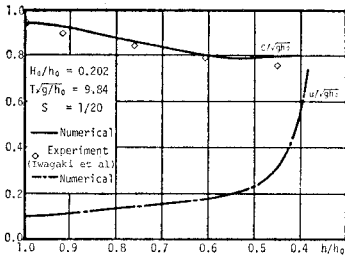


図-7 斜面上の波速

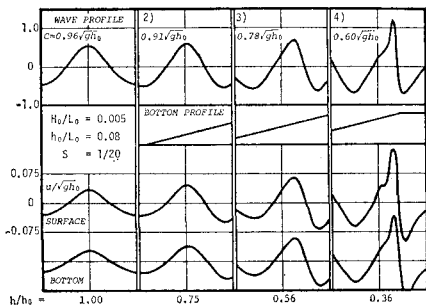
岩垣ら⁷⁾の実験値と比較したものである。波速の計算値は、求まった空間波形から、ある時間に峰が進行した距離をその時間で割って求めたが、実線で示した計算値と、◇で示した実験値とはほぼ一致していると言える。図中、一点鎖線は、水面における水平最大水粒子速度 $u_{\max}$ の計算値を示すが、この値は、水深減少に伴い、波速の値に接近していく様子がわかる。

図-8 (a) から (d) は、初期波として与えたクノイド波が、 h/h_0 で示した斜面上の各点を中心として、どのように変化するかを表わしたものであるが、各図ごとに水面波形と共に水面および底面における水平水粒子速度の空間波形を示す。(a) および (b) は初期波形勾配が $H_0/L_0=0.005$ であり、斜面勾配 S はそれぞれ $1/20$ および $1/40$ である。(c) および (d) は、 $H_0/L_0=0.02$ であり、 S はそれぞれ $1/20$ および $1/40$ である。いずれの場合も、水深減少に伴い、波高は増加し、波長および

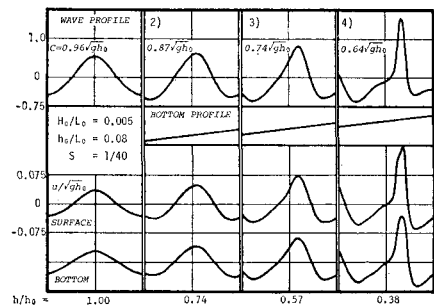
波速は減少する。水面波形の変形状態は、 H_0/L_0 および S に依存するが、波高増加は、同一水深で比べると、 H_0/L_0 が大きいほど著しい。また、斜面勾配の波高増加に与える影響は、 S が小さいほど著しい。この理由として、斜面勾配が小さい場合は、大きい場合に比べ、同じ水深・初期水深比 h/h_0 までは進行する距離が長くなり、波が十分に變形する余裕があるためと考えられる。水粒子速度については、(a) および (b) は水面波形とよく対応した形状となり、 u_0 と $u_{\max}$ のズレは生じていないが、(c) および (d) では、それぞれ、 $h/h_0=0.62$ および $h/h_0=0.65$ を中心とする波において、水粒子速度の峰が2つ生じるという不合理な結果となる。これは、波高・水深比 H/h がそれぞれ、 0.83 および 0.87 であり、すでに、碎波限界 $H_0/h_0=0.78$ に達しているために生じたものと考えられる。

(3) 種々の底面地形上の孤立波の変形

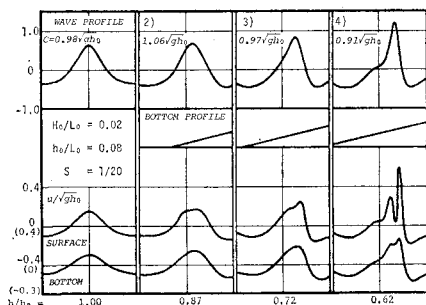
次に、種々の底面地形上を進行する孤立波の変形を取り扱う。計算に際し、水平方向の代表長 L_0 を選定する必要がある、通常、波長を用いて良いが、孤立波の場合には、波長は無限大となる。したがって、ここでは、一様水深場において、安定して進む孤立波が得られるように L_0 を決定した。その結果、初期波高・水深比が $H_0/h_0=0.1\sim 0.2$ の範囲では、水面の高まりと波高の比 η/H_0 が 0.02 となる間の距離を L_0 と考えれば良いことがわかった。図-9 には、この L_0 を用いて計算した一様水



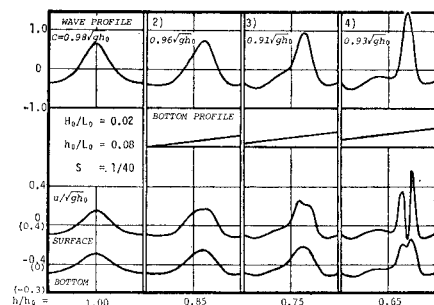
(a)



(b)



(c)



(d)

図-8 斜面上のクノイド波の変形

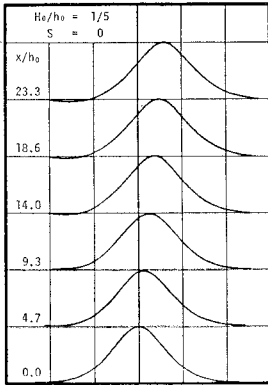


図-9 安定した孤立波

深場の孤立波を、 $\sqrt{gh_0}$ で追跡して示したが、波はほぼ初期の波形を保存していることがわかる。また、この時の波速の計算値と理論値との比は1.01であり、両者は良く一致している。

図-10 (a) および (b) は、浅瀬へ進行する孤立波を、(c) および (d) は、浅瀬を乗り越える孤立波を示す。(a) では、浅瀬水深 h_1 と初期水深 h_0 の比が $h_1/h_0=3/4$ と大きいので、孤立波の分裂現象は顕著ではないが、(b) では、 $h_1/h_0=1/2$ と小さいので、浅瀬へ進入した孤立波は、2つのソリトンに分裂し、それらが互いに離れて行くことがわかる。(c) は、浅瀬頂部の水深 h_1 と初期水深 h_0 の比が $h_1/h_0=3/4$ と大きいので、孤立波はほとんど変形しないが、(d) では、 $h_1/h_0=1/2$ と小さいので、浅瀬を越えた直後、後方に分裂波が顕著に現われることがわかる。

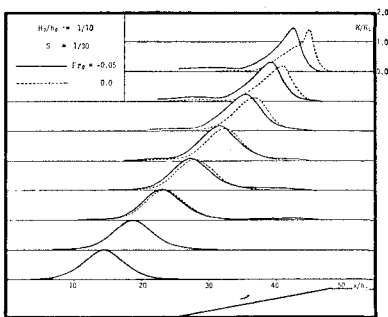
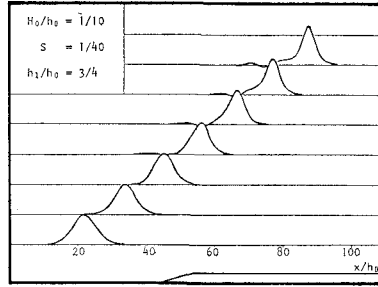
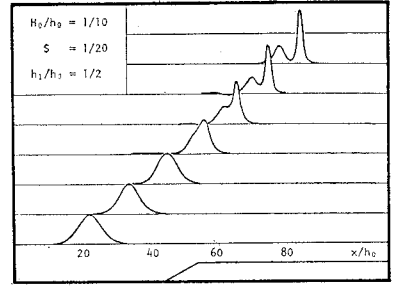


図-11 流れによる斜面上の孤立波の変形

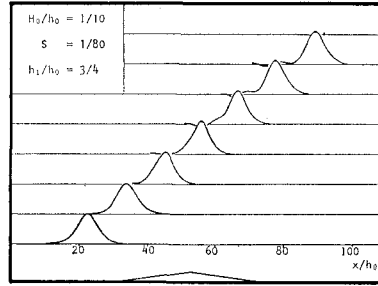
図-11 は、流れの場合における斜面上の孤立波の変形を示すものである。図中、実線で示すが、点線は流れのない場合の変形を示す。流速 u の向きは沖向きであり、その値は、一様水深 h_0 の位置でのフルード数が、 $F_{F0}=u/\sqrt{gh_0}=0.05$ となるように与えた。流れがある場合、



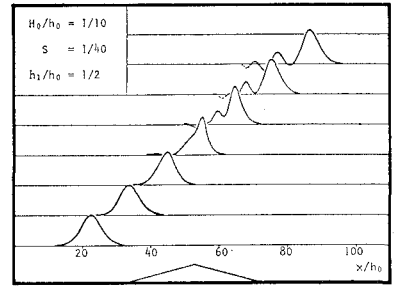
(a)



(b)



(c)



(d)

図-10 孤立波の変形

孤立波の波速は流れの流速を重ね合わせたものになることが土屋⁹⁾により示されているが、ここでは、水粒子速度も流れの流速と重ね合わせたものになると仮定して、計算を行った。図より、流れのある場合の方が、波高は大きくなるが、その波形から推察すると、ソリトン分裂は生じにくいように思われる。ただし、この計算方法については若干の改良の余地があるため今後さらに検討する予定である。

4. 結 論

本研究で得られた結果を要約すると、(1) 一様水深場を進行する正弦波の再現間隔の計算値は、従来の実験値と良く一致する。(2) 式 (6) を用い、種々の地形上の波の水粒子速度を求めることができる。(3) 斜面上の波の水面波形、水平方向水粒子速度および波速の計算値は、従来の実験値と良く一致する。(4) 斜面上の波の波高増加率は、初期波形勾配が大きいほど、また斜面勾配が小さいほど大きくなる。(5) 浅瀬へ進入する孤立波および浅瀬を乗り越える孤立波は、浅瀬水深が小さいほど、分裂現象が顕著となる。(6) 流れの場合における孤立波は、流れがない場合に比べ、波形および位相に相違が生じるが、この計算方法については、今後さらに検討が必要である。

参 考 文 献

- 1) 安田孝志・山下隆男・後藤真太郎・土屋義人: K-dV 方程式による斜面上の波の変形, 第26回海講論文集, pp. 21~

- 25, 1979.
- 2) 安田孝志・後藤真太郎・土屋義人: K-dV 方程式による斜面上の波の水粒子速度, 第 27 回海講論文集, pp. 11~15, 1980.
 - 3) Madsen, O. S. and C. C. Mei: The transformation of a solitary wave over an uneven bottom, Jour. Fluid Mech., Vol. 39, pp. 781~791, 1969.
 - 4) Mei, C. C. and B. Le Méhauté: Note on the equation of long waves over an uneven bottom, Jour. Geophy. Res., Vol. 71, No. 2, pp. 393~400, 1966.
 - 5) 石田 啓・中島光浩: 特性曲線法による孤立波の変形に関する数値計算, 金沢大学工学部紀要, 第 13 巻, 第 2 号, pp. 49~58, 1980.
 - 6) 石田 昭・石田和生: 浅水領域における波形の分裂現象——二次波峯現象と soliton について——, 第 20 回海講論文集, pp. 403~409, 1973.
 - 7) 岩垣雄一・酒井哲郎: クノイド波に関する研究 (第 7 報)——shoaling に関する実験——, 京都大学防災研究所年報, 第 12 号 B, pp. 569~583, 1969.
 - 8) 岩垣雄一・酒井哲郎・川島 毅: 斜面上の波の水粒子速度の鉛直分布について, 第 18 回海講論文集, pp. 93~96, 1971.
 - 9) 土屋義人・安田孝志: 一様流を伴う有限振幅波の理論, 第 22 回海講論文集, pp. 29~34, 1975.
-