

三次元モデルによる流れと拡散の数値解法について (その 4)

—— MAC 法による土砂投入直後の拡散解析 ——

堀 口 孝 男*・曾我部隆久**・堀 江 毅***

1. は し が き

沿岸水域における浚渫や埋立などの土木工事により発生する土砂の濁りを予測することは、周辺水域環境に及ぼす影響の把握や濁りの拡散防止対策を講ずる上で極めて重要である。このため、現場試験を行って濁りの発生、拡散、沈降についての現象を把握すると共に、これらに関する水理模型実験手法や数値解析手法を開発する必要がある。

このような主旨から、筆者らは主として差分法による三次元流れと土砂拡散のモデルを開発し、その成果を過去3回にわたって報告してきた^{1),2),3)}。土砂拡散に関するこれらのモデルは、濁り発生点(格子)内では土砂の投入後瞬時のうちに一定均一濃度になり、鉛直、すなわち水深方向には一様または一定の濃度分布を仮定することにより以後の拡散過程を取扱うものであった。ところが、土運船からの土砂投下の例に示されるように、小時間スケールの局所的な現象を把握するには上述のような取扱いでは不都合である。また場合によっては土砂混入直後の流れや濃度分布をより現実に近い状態で再現することが以後の一定時間経過後の拡散予測の精度を上げるためにも必要となる。

本論文は、海面付近から投下された土砂が水中を落下し海底に着底後海底付近に沿って周囲に拡がる現象をMAC法(Marker and Cell 法)により解析する一手法とその適用例について記述するものである。

2. 数値モデル

(1) MAC 法の特徴

鉛直堰の開放直後の流出、密度の異なる二層境界面の混合破壊、水面への水滴の落下、砕波などのように、非圧縮流体の過渡的な非定常運動においては、自由表面や密度境界面の時々刻々の位置を把握しておく必要がある。このため、流体中に適当なマーカーと呼ばれる標識

子を配置し、流体の運動に伴って移動するマーカーの位置によってこれらの境界面を識別し解析するという手法をとるのがMAC法の基本である。マーカーには単に位置を示すトレーサ的な特性のみを与える境界(または位置)マーカーと、マーカーに密度、濃度その他の物理的な特性をも与えた物性マーカーとがある。

MAC法は、Harlow, F. H. (1965)らを中心に、自由表面をもつ非定常非圧縮流れの計算手法として開発されたもので、その後上述のような過渡的な現象の数値解析が行われている⁴⁾。

このようにMAC法は過渡的な現象の解析に有利であるばかりでなく、マーカーにより流れやその他の物理的な特性が可視化されるという点にも大きな長所があり、複雑な水理現象のモデル化に対して有効な手段になり得るものと思われる。

(2) 土砂の沈降拡散への応用

海上での埋立工事において土運船の船底から投下された土砂は、鉛直下方に落下し着底後は水平方向に向きを変えて周囲に拡がる。土砂の投下が静水中で行われても土砂投下により誘起された流れおよびその乱れによって移流分散される。底層付近に沿って放射状に走る土砂粒子の先端は環状をなし時間と共に外縁方向に拡散する。

一般には土砂投下地点周辺には流れがあるため、土砂の拡散はさらにこの流れの影響を受ける。

本研究では、このような現象のモデル化の第一段階として、土砂投下時において場の流れはなく、土砂の沈降拡散は投下点を通る鉛直軸に対して軸対称であると仮定できる場合を取扱う。このように仮定すると、流れや土砂粒子の位置・濃度は図-1に示されるような円筒座標系により表わすことができる。同図において、平均海面の一点を原点にとり鉛直上向きに z 軸を、 z 軸より半径方向外向きに距離 r をとるものとする。

(3) 基本式とその差分表示

図-1に示された円筒座標系内において、土砂の投下により誘起される流体の運動(u, w)——ここに u : 半径 r 方向の流速、 w : 鉛直 z 方向の流速——は、 r 方向の運動方程式:

* 正会員 工博 東京都立大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 運輸省第三港湾建設局神戸調査設計事務所(長)

*** 正会員 運輸省港湾技術研究所海洋水理部海水浄化研究室(長)

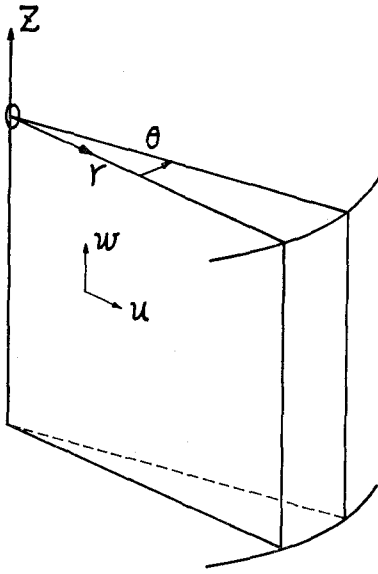


図-1 円筒座標系

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) + \mu_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \cdots (1)$$

および連続の式:

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) + r \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \cdots (2)$$

により表わされる。ここに、 ρ : 海水密度、 μ_r, μ_z : 流体の r, z 方向の粘性係数、 p : 圧力である。

なお、後述のように、土砂の濃度により海水密度 ρ は変化し、式 (1) において、右辺第 1 項の圧力項に反映されるが、式 (2) においては土砂濃度による体積変化は無視し得るものとして取扱われている。

次に図-2 に示されるような空間分割および変数の配置を定義することにより、基本式 (1), (2) の微分方程式はつぎのような差分式に変換される。

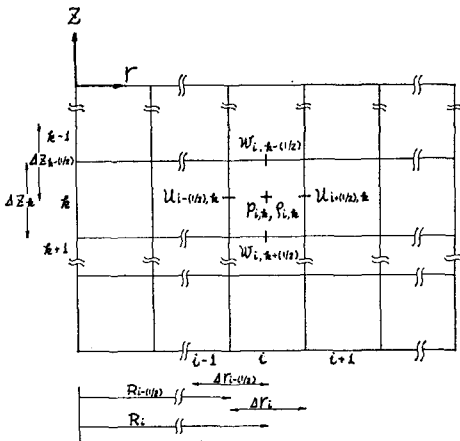


図-2 諸変数の配置

まず式 (1) に対し点 $(i-1/2, k)$ において、

$$\begin{aligned} & \rho_{i-1/2, k}^n \left(\frac{u_{i-1/2, k}^{n+1} - u_{i-1/2, k}^n}{\Delta t} \right. \\ & \quad + u_{i-1/2, k}^n \cdot \frac{u_{i+1/2, k}^n - u_{i-1/2, k}^n}{\Delta r_{i-1/2}} \\ & \quad \left. + w_{i-1/2, k}^n \cdot \frac{u_{i-1/2, k+1}^n - u_{i-1/2, k-1}^n}{\Delta z_{k+1/2} - \Delta z_{k-1/2}} \right) \\ & = - \frac{p_{i, k}^n - p_{i-1, k}^n}{\Delta r_{i-1/2}} + \mu_r \cdot \frac{1}{\Delta r_{i-1/2}} \\ & \quad \times \left(\frac{1}{R_i} \cdot \frac{R_{i+1/2} u_{i+1/2, k}^n - R_{i-1/2} u_{i-1/2, k}^n}{\Delta r_i} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{R_{i-1}} \cdot \frac{R_{i-1/2} u_{i-1/2, k}^n - R_{i-3/2} u_{i-3/2, k}^n}{\Delta r_{i-1}} \right) \\ & \quad + \mu_z \cdot \frac{1}{\Delta z_k} \left(\frac{u_{i-1/2, k-1}^n - u_{i-1/2, k+1}^n}{\Delta z_{k-1/2}} \right. \\ & \quad \left. - \frac{u_{i-1/2, k+1}^n - u_{i-1/2, k-1}^n}{\Delta z_{k+1/2}} \right) \quad \cdots (3) \end{aligned}$$

となり、式 (2) に対しては点 (i, k) において

$$\begin{aligned} & \frac{R_{i+1/2} u_{i+1/2, k}^{n+1} - R_{i-1/2} u_{i-1/2, k}^{n+1}}{\Delta r_i} \\ & + R_i \cdot \frac{w_{i, k-1/2}^{n+1} - w_{i, k+1/2}^{n+1}}{\Delta z_k} = 0 \quad \cdots (4) \end{aligned}$$

となる。ここに、 Δr : 水平空間分割幅、 Δz : 鉛直空間分割幅、 R : 中心軸からの水平距離である。式 (3), (4) 中の各変数の右脚の添字は空間座標値を、右肩の添字は時間レベルをそれぞれ示す。また式 (3) 中の海水密度 ρ および圧力 p は後述する方法によって与えられる。なお式 (3) の左辺の右脚に現われる添字の a, b は上流差分にするためのパラメーターで、 a については $u_{i-1/2, k}^n \geq 0$ に対して $a=1$, $u_{i-1/2, k}^n < 0$ に対して $a=0$ である。 b についても同様である。

(4) マーカー移動に伴う海水密度と圧力の計算

所定の空間に配置されたマーカーは、その場の流れおよび沈降速度により移動し、 $n \Delta t$ 時間レベルでの中心軸からの水平距離 l_r^n および海底からの高さ l_z^n は $(n-1) \Delta t$ 時間レベルの値 l_r^{n-1}, l_z^{n-1} を用いて次のように表わすことができる。

$$l_r^n = l_r^{n-1} + u^n \Delta t \quad \cdots (5)$$

$$l_z^n = l_z^{n-1} + w^n \Delta t \quad \cdots (6)$$

ここに、 (u^n, w^n) : 半径方向に前後、鉛直方向に上下の隣接する計 4 点の流速を用いマーカーの距離に応じて線型補間された流速 (u, w) を表わす。沈降速度 (w_0) を考慮する場合には式 (6) の w^n に w_0 が付加される。

式 (5), (6) により移動したマーカー (この場合質量をもたせた物性マーカー) により新たに決定される各メッシュの密度 $\rho_{i, k}^n$ は次式により計算される。

$$\rho_{i, k}^n = \rho_0 + \frac{N_{i, k}^n W_m}{R_{i+1/2} \Delta r_i \Delta z_k} \quad \cdots (7)$$

ここに、 ρ_0 : 海水密度、 $N_{i, k}^n$: 単位の中心角 (すなわち

$\theta=1$ ラジアン) をもつ (i, k) メッシュ内の時刻 $n\Delta t$ におけるマーカーの個数, W_m : マーカー 1 個当りの質量である。

このようにして求められた各メッシュの海水密度 $\rho_{i,k}^n$ から各メッシュの中心における圧力 $p_{i,k}^n$ が次のように計算される。

$$p_{i,1}^n = p_0 + \rho_{i,1}^n g \left(\frac{\Delta z_1}{2} + \zeta_i^n \right) \quad (k=1, \text{最上層}) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$p_{i,k}^n = p_{i,k-1}^n + \frac{g}{2} (\rho_{i,k-1}^n \Delta z_{k-1} + \rho_{i,k}^n \Delta z_k) \quad (k \geq 2) \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに ζ_i^n は平均水位からの水面の高さで次式により求められる。

$$\zeta_i^n = \zeta_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{R_{IE} \Delta r_i} \sum_{k=1}^K [\Delta z_k (r_{i+(1/2)} u_{i+(1/2),k}^n - r_{i-(1/2)} u_{i-(1/2),k}^n)] \quad \dots\dots\dots (10)$$

(5) 境界条件

中心軸上の水平流速 $u_{1/2,k}$ は 0 とする。一方計算領域最外縁 $i=IE$ の水平流速 $u_{IE,k}$ は $i=IE-1$ における水平流速 $u_{IE-1,k}$ との間で次の関係式を与える。

$$u_{IE,k} = \frac{R_{IE-1}}{R_{IE}} u_{IE-1,k} \quad \dots\dots\dots (11)$$

また最外縁の水位 ζ_{IE} は 0 に固定する。海底面における鉛直流速 $w_{i,K+(1/2)}$ も、海底面が水平であるため、常に 0 となる。

(6) 計算手順

マーカー投入に始る計算手順を示すと図-3 のようになる。

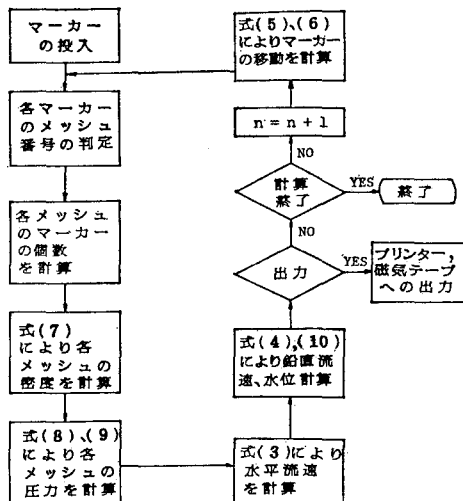


図-3 計算の流れ図

3. 適用例

2. に述べたモデルの試算として、水深 18m で海底面

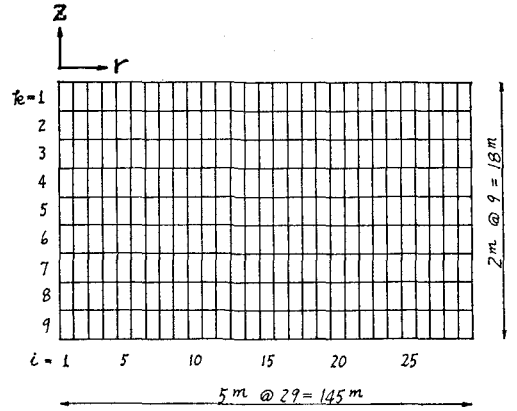


図-4 メッシュ分割

が水平とみなせる流れのない静水域を計算対象とした。空間のメッシュ分割は、図-4 に示すように、水平方向には $\Delta r=5$ m, 鉛直方向には $\Delta z=2$ m でそれぞれ一定とした。メッシュの番号は同図に示すように水平方向には中心軸に近い方から $I=1, 2, \dots, 29$ を、鉛直方向には上層から順次下層に $K=1, 2, \dots, 9$ とした。

マーカーは、質量をもった物性マーカー (以後質量マーカーという) と、位置のみを示し質量をもたない境界マーカーとを用いた。計算開始に当り、質量マーカーを、中心軸に最も近い (すなわち $I=1$) 表層および第二層 (すなわち $K=1, 2$) において、単位の中心角をもつ 1 メッシュ当り 50 個 (系全体では 200π 個) を $x \sim z$ 断面に対して均等に配置した。種々試算の結果、質量マーカー 1 個当りの質量 W_m は、本例の場合 20.833 kg とした。これは計算開始時においてマーカーを含むメッシュの海水密度が 1.08333 g/cm³ (1.08333×10^3 kg/m³) であることに相当している。同時に、これらの質量マーカーを取囲む海面、第 2 層と第 3 層間の境界面 $K=5/2$, および $I=3/2$ の境界面に単位の中心角をもつ 2 メッシュにつき 75 個 (系全体では 150π 個) の境界マーカーを配置した。

質量マーカーを含まない海水密度 ρ_0 (式 (7)) は 1.0 g/cm³ (1.0×10^3 kg/m³) とした。式 (3) の粘性係数は $\mu_r=10^5$ g/cm/s (10^4 kg/m/s) および $\mu_z=100$ g/cm/s (10 kg/m/s) とした。式 (3) の右辺最後の項:

$$-\mu_z \frac{1}{\Delta z_K} \cdot \frac{u_{i-(1/2),K}^n - u_{i-(1/2),K+1}^n}{\Delta z_{K+(1/2)}} \quad \dots\dots\dots (12)$$

は海底摩擦項として取扱ひ式 (12) をつぎのように置換えた。

$$-\gamma_b^n \cdot \frac{\rho_{i-(1/2),K}^n u_{i-(1/2),K}^n |u_{i-(1/2),K}^n|}{\Delta z_K} \quad \dots\dots\dots (13)$$

式 (13) において γ_b^n は 0.0026 を用いた。また質量マーカーの沈降速度は本例の場合考慮しなかった。

以上の条件により 図-3 に示した手順により時間ステ

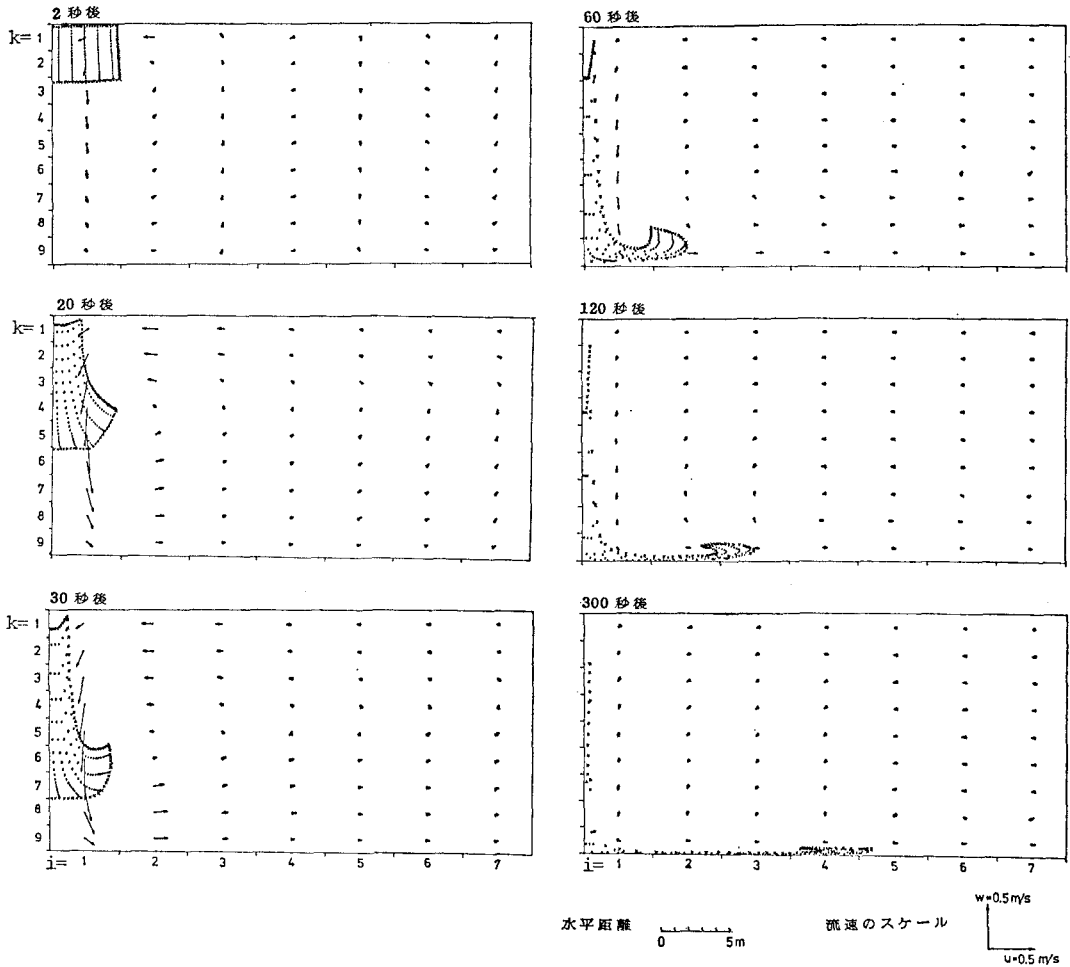


図-5 MAC 法による土砂の沈降拡散計算例

ステップ $\Delta t=0.2$ 秒で 600 秒間計算した。図-5 はこのようにして求めた計算開始後 2, 20, 30, 60, 120, 300 秒における中心軸近傍の流れのベクトルおよび質量マーカー (図中●印) および境界マーカー (図中×印) を示したものである。マーカーの落下により、計算開始初期の段階においては $I=1$ のメッシュでは下降流が、 $K=1$ の最上層ではこれを補うため中心軸に向う水平流が、最下層では離心方向の水平流がそれぞれ生ずる。これらの流れは 10~20 秒間で次第に発達し、中層および離心方向のメッシュに及んで、中心軸近傍で下降流、海底面付近で離心流、 $I=6\sim7$ 付近で上昇流、表層付近で向心流という鉛直循環流が形成される。計算開始後 30 秒付近でこれらの流れは最大に達し、鉛直流は $I=1$, $K=6$ のメッシュ付近で約 0.5 m/s 、水平流は $I=2$, $K=1$ および $K=9$ で約 0.2 m/s 、上昇流は $I=4$, $K=5$ で約 0.01 m/s となる。30 秒を過ぎるとこの鉛直循環流は徐々に衰え 300 秒を経過すると $I=1$ の点を除いて流速は 0.01 m/s 以下となる。

一方、中心軸をとり囲む表層および第2層に配置したマーカーはこれらの流れにより移送され中心軸に沿って落下しながら、上層側では向心流によって中心軸方向に圧縮され、逆に下層側では離心流によって落下土砂の先端部分は外縁側に引伸ばされる。50~60 秒経過するとマーカーは海底 ($K=9$) に到達し方向を外縁方向に転じ海底面に沿って拡がる。300 秒経過後では着底後海底に沿って拡散するマーカーの先端は中心軸より 20 m 以遠の点に到達するが、以後は海底面を沿う極めて緩やかな移動となり計算領域内の土砂濃度には寄与しなくなることがわかる。

本モデルによる試算は、上述の例の他、マーカーの投入に際してマーカーの個数・位置・質量を変えて行ったものや、連続的に投入したものがある。さらに、マーカーに沈降速度をもたせたもの、障壁を設けて行ったもの、水平方向の空間刻み Δr を場所的に変化させて行ったもの等がある。これらの詳細についての記述は省略する。

4. む す び

以上、土運船からの土砂投入にみられるような比較的局所的で小時間スケールの現象に対して MAC 法を用いた数値モデルを展開し、簡単な計算例によって現象再現の可能性を示した。本モデルにおいては、土砂投入時点における流れを考慮していないこと、土砂の沈降拡散は土砂投入点を通る鉛直軸に対して軸対称であること、土砂の海底到達時にはね返りを考慮していないことなど実現象と比較すれば現実的でない仮定がいくつか設定されている。これら個々の問題については現場試験や水理模型実験を行って細かい現象を把握しそれらのモデル化やパラメーターを決定してゆく必要がある。

本研究により得られた成果をとりまとめるとつぎのようである。

- 1) これまでの三次元モデルでは表現できない土砂投入直後の土砂の落下および底層に沿って周囲に拡散する現象が MAC 法による解法により再現できる。
- 2) 濁りの発生が時間的場所的に詳細に把握できるため、より現実に近い方法での拡散予測が可能にな

る。

- 3) 本モデルを一般の三次元流れの現象に拡張することにより、土砂の拡散のみならず、成層破壊や碎波などの遷移現象の数値的な取扱いの可能性が示される。

最後に、本研究を遂行するに当たり貴重な助言をいただいた京都大学工学部 岩垣雄一教授に謝意を表すると共に、本モデルの計算には日本アイビーエム社の協力を得ていることを付記する。

参 考 文 献

- 1) 堀口孝男・富田 勇・堀江 毅：三次元モデルによる流れと拡散の数値解法について、第 24 回海岸工学講演会論文集，pp. 447～451, 1977.
- 2) 堀口孝男・富田 勇・堀江 毅：三次元モデルによる流れと拡散の数値解法について（その 2），第 25 回海岸工学講演会論文集，pp. 508～512, 1979.
- 3) 堀口孝男・曾我部隆久・堀江 毅：三次元モデルによる流れと拡散の数値解法について（その 3），第 26 回海岸工学講演会論文集，pp. 600～604, 1979.
- 4) Daly, B. J. and William E. Pracht: Numerical study of density-current surges, The Physics of Fluids, Vol. 11, No. 1, pp. 15～30, Jan. 1968.