

FEM による浅水域における三次元流動解析法

富 所 五 郎*

1. 序 論

現在の湖や海などの三次元流動解析法としては、① エクスマンタイプモデルを用いる方法^{1),2)}、② 多層モデルを用いる方法、③ 三次元メッシュを組む方法、などが挙げられる。ここで、①は運動方程式においてコリオリ項と圧力項および鉛直方向の運動量拡散項のみを考慮するもので、Rossby 数が大きい時は適用できない。また②は、成層状態が明確でない場合には層の決定や各層間のせん断応力の評価が難しい。さらに③は、未知量数が多いため計算機の容量や計算時間の点で問題があり、また、浅水域に適用する場合には水平寸法と鉛直寸法の極端に異なるいびつなメッシュとなり数値安定性上問題となる。本研究は上に挙げたいくつかの問題点を解決するため、近似関数として鉛直方向の連続関数と水平方向に従来用いられている区分的多項式の積である変数分離型の関数を用いて基礎方程式を空間方向に離散化する Galerkin 有限要素法を提案するものである。この方法は、従来の方法で最も一般的方法である③に比し、水面と湖底の境界条件が入れ易く、必要データ数も少なく、また数値安定性もよいなどの特徴をもつ。

2. 基礎方程式

流れを支配する基礎方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_V \frac{\partial u}{\partial z} \right) - f v \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_V \frac{\partial v}{\partial z} \right) + f u \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) - g \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

ここに、 u, v, w は x, y, z 軸方向の流速成分、 x, y 軸は静水面内で東、北を正方向とする。 z 軸は静水面を零とし、鉛直上方を正方向とする。また p は圧力、 ρ は水の密度、 A_H, A_V はそれぞれ鉛直、水平方向の渦動粘性係数、 g は重力加速度、 f はコリオリ係数である。また、水面と水底の境界条件は、

$$\text{水面 } z = \zeta \text{ で } A_V \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_x, \quad A_V \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y \quad (5)$$

$$\text{水底 } z = -h \text{ で } u = v = w = 0 \quad (6)$$

である。ここに、 τ_x, τ_y は水面に作用する風によるせん断応力を水の密度で除したものである。

上の式 (1)~(6) を無次元化するため、 ρ を一定とし

$$\left. \begin{aligned} x_* &= \frac{x}{L}, \quad y_* = \frac{y}{L}, \quad z_* = \frac{z}{D}, \quad \zeta_* = \frac{\zeta}{D} \\ h_* &= \frac{h}{D}, \quad u_* = \frac{u}{U}, \quad v_* = \frac{v}{U} \\ w_* &= \frac{w}{U} \cdot \frac{L}{D}, \quad p_* = \frac{p}{\rho g D}, \quad t_* = f t \\ \tau_{x*} &= \frac{D}{U A_V} \tau_x, \quad \tau_{y*} = \frac{D}{U A_V} \tau_y \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

の変数を採用する。ここに U, L, D は、それぞれ流速、水平寸法、水深の代表量である。これにより式 (1)~(6) はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + R_0 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ = -\frac{R_0}{F_r^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(E_H \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(E_H \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(E_V \frac{\partial u}{\partial z} \right) - v \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + R_0 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ = -\frac{R_0}{F_r^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(E_H \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(E_H \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

* 正会員 工修 信州大学講師 工学部土木工学科

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(E_V\frac{\partial v}{\partial z}\right)+u \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}+R_0\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ =-Q\left(\frac{\partial p}{\partial z}+1\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(E_H\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ +\frac{\partial}{\partial y}\left(E_H\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(E_V\frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$z=\zeta \text{ で } \frac{\partial u}{\partial z}=\tau_x, \quad \frac{\partial v}{\partial z}=\tau_y \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$z=-h \text{ で } u=v=w=0 \quad \dots\dots\dots(13)$$

ここに、添字*は簡単のため省略しており、 $R_0=U/fL$ はRossby数、 $F_r=U/\sqrt{gD}$ はFroude数、 $E_H=A_H/fL^2$ は水平Ekman数、 $E_V=A_V/fD^2$ は鉛直Ekman数、 $Q=g/fU \cdot L/D$ である。ここで、 U, D, L などに対象とする水域の適当な値を代入し、式の各項の比較を行い、式を簡単にできる。通常浅水域では Q は非常に大きく、式(10)は右辺第1項のみを考えればよい。また、対象の水域の水平寸法に比し水深が極端に浅く($D/L \ll 1$)、流れが緩やかな時には $R_0 \ll 1$ となり、式(8)、(9)の左辺第2項は他の項に比し小さいとして無視できる。このとき A_V, A_H が変数に無関係であるならば方程式は線形となる。さらに、 E_H の掛かっている項、つまり運動量の水平拡散項を小さいとして無視するとエクマンタイプモデルの基礎式が得られる。しかし、ここでは $R_0 \ll 1$ の条件のない場合について解析を進める。式(10)の右辺第1項のみを考え、これを z 方向に積分し、大気圧を零とすると $p=-z+\zeta$ となる。つまり、圧力 p は静水圧分布となる。これを式(8)、(9)に代入した式、および式(11)~(13)が浅水域流れを支配する基礎方程式となる。

3. 基礎方程式の離散化

上の基礎方程式を空間方向に離散化するため u, v, ζ に対して、図-1の要素内でつぎの近似関数を考える。

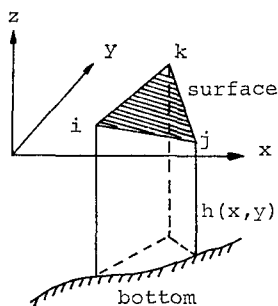


図-1 有限要素

$$\left. \begin{aligned} u &= (1+z/h)^p N_i \cdot u_{pi}, \\ v &= (1+z/h)^p N_i \cdot v_{pi}, \\ \zeta &= N_i \cdot \zeta_i \end{aligned} \right\} p=1, 2, \dots, m \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= (\cos A_p \cdot z) N_i \cdot u_{pi}, \\ v &= (\cos A_p \cdot z) N_i \cdot v_{pi}, \\ \zeta &= N_i \cdot \zeta_i \end{aligned} \right\} A_p = \frac{2p-1}{2h} \pi, \quad p=1, 2, \dots, m \quad \dots\dots\dots(15)$$

ここに、 m は流速の自由度、 N_i は水平方向の形状関数で、ここでは三角形一次要素のものを用いる。式(14)の z 方向の形状関数 $(1+z/h)$ 、 $(1+z/h)^2$ は流れを x, z の二次元とした時得られる関数形で、流れが二次元に近い時少ない項数で最も良く鉛直流速分布を近似できるものとしてこの関数形を用いた。これに対し式(15)の $\cos(A_p \cdot z)$ は、自由度 m を大きくすることにより任意の流速分布を近似できるものである。上に示した近似関数は水底の境界条件、 $z=-h$ で $u=v=w=0$ を満足している。

つぎに、運動方程式には $(1+z/h)^p N_i$ や $(\cos A_p z) N_i$ を、連続式には N_i を重み関数としてかけ、これらを要素内で積分して基礎式の離散化を行う。ここで、運動方程式の w は、式(11)を z 方向に $-h \sim z$ の区間で積分して

$$\begin{aligned} \int_{-h}^z \frac{\partial w}{\partial z} \cdot dz = w_{z=z} - w_{z=-h} = w(z) \\ = - \int_{-h}^z \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dz - \int_{-h}^z \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dz \quad \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

これより w を求め、消去する。さらに(11)式の w は、重み関数が N_i であるので、

$$\begin{aligned} \int_V N_i \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \cdot dV &= \int_s \int_{-h}^{\zeta} N_i \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \cdot dz \cdot ds \\ &= \int_s N_i (w_{z=\zeta} - w_{z=-h}) \cdot ds \\ &= \int_s N_i \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + v_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right\} \cdot ds \quad \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

となり、これにより消去する。ここに、 s は図-1の三角形 ijk の面積で、通常右辺第2、3項は他の項に比し小さいとして無視される。また、2階の微分項はGreen-Gaussの定理を用い1階に階数を下げる。以上により基礎式の離散化式は、一つの要素について

$$\begin{aligned} M_{pq,ij} \cdot \dot{u}_{qj} + R_{pqr,ijk} \cdot u_{qj} \cdot u_{rk} + Q_{pqr,ijk} \cdot v_{qj} \cdot u_{rk} \\ = E_{1p,ij} \cdot \zeta_j + K_{pq,ij} \cdot u_{qj} + C_{pq,ij} \cdot v_{qj} + f_{1p,j} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$\begin{aligned} M_{pq,ij} \cdot \dot{v}_{qj} + R_{pqr,ijk} \cdot u_{qj} \cdot v_{rk} + Q_{pqr,ijk} \cdot v_{qj} \cdot u_{rk} \\ = E_{2p,ij} \cdot \zeta_j + K_{pq,ij} \cdot v_{qj} - C_{pq,ij} \cdot u_{qj} + f_{2p,j} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$M_{ij} \cdot \dot{\zeta}_j + K_{1q,ij} \cdot u_{qj} + K_{2q,ij} \cdot v_{qj} = 0 \quad \dots\dots\dots(20)$$

となる。ここに、 u, v, ζ の上つきの $\cdot$ は $\partial/\partial t$ を意味

する。また、 $p(q, r)=1, 2, \dots, m$ で、 $i(j, k)=i, j, k$ であり、各係数は対応する重み関数と形状関数の積を要素内で積分して求められるが、ここでは紙面の都合上省略する。ただし、この計算において E_H , E_V を要素内において一定とした。式(18)から式(20)を全要素について求め、これを重ね合わせると、全節点に対する空間方向に離散化した方程式が得られる。

つぎに、時間方向の離散化法としては two-step Lax-Wendroff 法を用いる³⁾。ただし $Ro \ll 1$ 、つまり非線形項が無視できる場合には、時間方向に対しても Galerkin 有限要素法⁴⁾を用いる。

4. 数値解析例

(1) エクマンタイプモデルによる解との比較

近似関数として式(14)、(15)を用いる方法の近似度を検討するため、諏訪湖を対象として、文献2)のエクマンタイプモデルによる方法の結果と比較を行う。式(14)、(15)において $m=2$ とし、要素数 231 を、節点数 141 のメッシュを組んだ。解析条件は、風速 3 m/s の SW の風が湖面全体に連続して吹く定常流れとし、河川

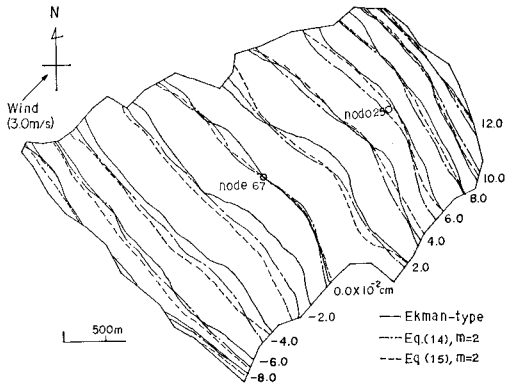


図-2 水面水位

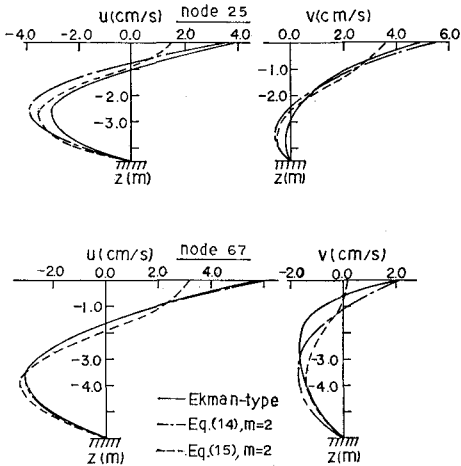


図-3 鉛直流速分布

などの湖への流入は全て無視した。また、 $A_H=0.0$ とし、 A_V, τ_x, τ_y は文献2)に従って求めると $A_V=2.3 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$, $\tau_x=\tau_y=9.2 \times 10^{-8} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{sec}^2$ で、 A_V は湖全体で一定値とした。このときの結果を図-2、図-3に示す。これらによると、式(14)による解の方がエクマンタイプモデルによる解に近く近似度がよいと言える。部分的にはかなりの誤差があるが、これらによる未知量数は三次元的にメッシュを組む場合に鉛直方向に二節点をとると同じ数であり、むしろ近似度はよいと言える。

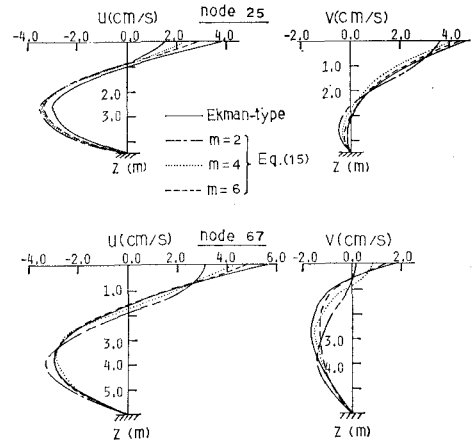


図-4 鉛直流速分布

つぎに、近似度を上げるよう m を大きくした。図-4は、式(15)を用いた場合の鉛直方向の流速分布の変化を示す。これによると m を大きくしていくと近似度は徐々に高くなる。しかし、その高まりの程度は徐々に小さくなる。一方、式(14)を用いた場合には、逆に近似度は低下し $n=5$ で解が得られなくなった。これは、 $(1+z/h)$, $(1+z/h)^2, \dots$ は z 方向に関して完備関数でなく、また局所基底でもないため、方程式の係数行列に零以外の要素の多い「性質の悪い」行列になるためである。これに対し $\cos A_p \cdot z$ は完備な直交関数であり、 m を大きくしても比較的零要素の多い「性質の良い」行列になっているためである⁵⁾。

(2) 非定常解析例

解析条件は、風がなく静止状態にある湖に急に風速 3 m/s の SW の風が湖面全体に一樣に連続して吹く場合で、他の条件は(1)と同様である。ここで近似関数は式(15)で、 $m=2$ である。時間ステップは、初めの5ステップは 100 秒としたが、その後は計算時間短縮のため、解の変化をみながら 200 秒、400 秒と段階的に増大させた。図-5に、風が吹き始めてから各経過時間後の鉛直流速分布を示す。この図は比較する資料がない。しかし図は、風の吹き始めはまず水面近くの風下側への流れが生じ、これがしだいに発達し、その後風下側の水面上昇によって起る湖底近くの風向と逆の流れが発達し、

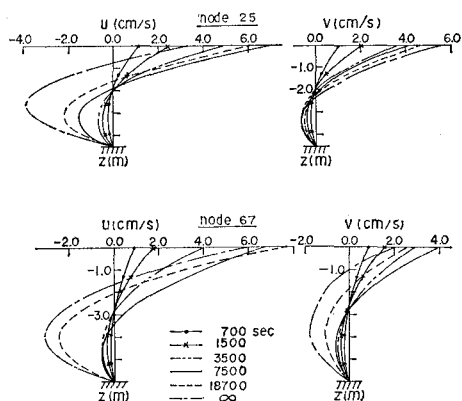


図-5 鉛直流速分布

しだいに定常流れに近づくことを示しており、物理的にみてほぼ妥当な結果をえていると思える。

つぎに非線形項を含む非定常計算例を示す。解析条件は図-5の場合と全く同じである。この例は $R_0 \approx 0.1^2$ と非線形性は強くないので、計算時間短縮のため図-5の定常状態より、非線形項を含め two-step Lax-Wendroff 法により計算を開始した。ここでの時間ステップは、解の急激な変化を避けるため 20 秒とした。定常状態に達

した時の解を図-6に示す。一方、この問題を定常状態として Newton-Laphson 法⁹⁾を用いて求めた解を図-7に示す。両者に多少の相違がみられる。これは、定常計算による解は、流れの非線形性が強くないため比較的収束が早かったのに対し、非定常計算では定常に達するまでに多くの計算ステップを要し、計算誤差が累積したためと考えられる。

(3) 河口流

非線形性の強い例として河口流を取り挙げる。解析例は、幅 20 m、水深 2 m、壁の流速が零で中央の鉛直流速分布が $(\cos A_p \cdot z) \text{ m/s}$ の河川が、半無限水域に、その真直ぐな岸に直角に流れ込む場合である。この水域の水深は、岸で 2 m、岸より 40 m まで直線的に 5 m に増し、それより先は 5 m の一定値である。解析領域は、河の出口より岸方向に $\pm 180 \text{ m}$ 、それに直角に岸より 400 m の矩形領域で、ここに節点数 171、要素数 303 のメッシュを組んだ。境界条件は、岸に直角な流速を零、岸を除く解析領域の周辺で水面位を零の一定値とした。流れを定常とし、計算は Newton-Laphson 法と Incremental Method⁹⁾の併用によった。ここで A_H, A_V の値としては、流速の対数則の式、乱流のせん断応力と流速こう配の関係式および $n=0.01$ とおいたマニングの平均流速公式の3式より渦動粘性係数を求め、これに平均流速を与え、 z 方向に平均した値を基準値とし、河川の出口付近ではこの 10 倍、周辺部ではこの値の 0.1 倍ほどの値を用いた。図-8に結果を示す。これは、河川の出口付

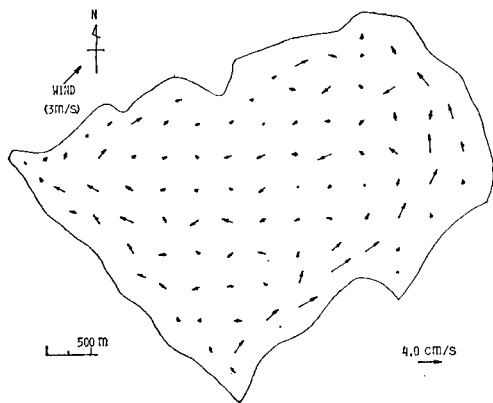


図-6 非定常計算による流速分布

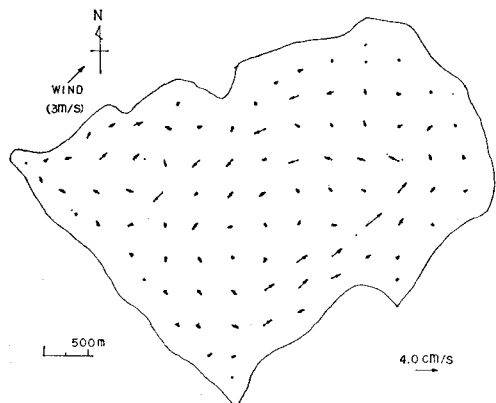


図-7 定常計算による流速分布

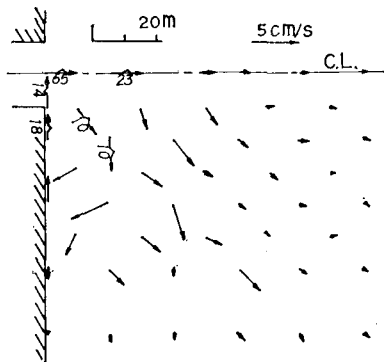


図-8 流速分布

近に渦が見られるなど物理的にみてある程度妥当な結果を与えているが、一部不合理な点もみられる。これは、境界条件の設定や渦動粘性係数の与え方などによるものと思えるが、今後の研究課題としたい。

5. 結 論

本研究は、近似関数として式 (14), (15) を用いる Galerkin 有限要素法による浅水域の三次元流動法解析法を提案したものであり、非線形性の強い流れに対する検

討は十分でないが、本法は条件によっては浅水域の流動解析に十分利用できるものである。なお、上の解析においては密度を一定としたが、密度が変化する場合も同じ考えを拡散方程式に適用し⁷⁾、これを流れの基礎式と連立で解くことにより解析できる。

最後に、本計算には信州大学データステーションを経由して東京大学大型計算機 8800/8700 を利用した。

参 考 文 献

- 1) Liggett, J. A. and C. Hadjithéodouou: Circulation in Shallow Homogeneous Lakes, Proc. ASCE, HY 2, 1969.
 - 2) 余越正一郎・富所五郎: 風による諏訪湖の流動特性, 土木学会論文報告集, 第 276 号, 1978.
 - 3) 川原陸人・竹内則雄・首藤伸夫: 2 段階ラックス・ウエントロフ有限要素法による潮流解析, 第 23 回海岸工学講演会論文集, 1976.
 - 4) Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method, Third Edition, Mc-Graw Hill, pp. 569~581, 1977.
 - 5) 三好哲彦・藤井宏 訳: 有限要素法の理論, 培風館, pp. 26~30, 1976.
 - 6) 前出 4), pp. 450~460.
 - 7) 富所五郎・宮崎雅弘: 浅水域の三次元拡散解析への一提案, 土木学会中部支部研究発表会, 1980.
-