

円柱に作用する不規則波の波力の確率特性

木村 晃*・瀬山 明**・上野 晃***

1. はじめに

海中構造物の設計・施工に際して、主要な外力である不規則波力の統計学的な特性を知ることが構造物の安全を期す上で非常に重要である。この問題に関しては、1960年代に相次いで発表された Borgman¹⁾、Bretschneider²⁾らの研究があるが、当時は不規則波の周期の確率特性に関する知見が十分でなかったため、彼らは対象とする不規則波が narrow band spectrum であると仮定して周期を一定にし、波高の確率特性だけを考慮して不規則波力の確率密度関数を導いた。しかし最近になって、不規則波の周期の確率特性³⁾あるいはさらに波高・周期の結合分布に関する研究^{4),5),6)}が行われ、十分とはいえないまでも、現状では水位変動のスペクトルから、これらの確率特性をほぼ推定することができるようになった。またこれと並行して、ゼロアップクロス法で定義した不規則波の個々の波の内部機構について実験的な研究^{7),8)}が行われ、若干の補正の必要な場合もあるが、規則波の理論がほぼ適用できることが示されている。本研究はこれら最近になって新たに得られた知見を導入し、単円柱に作用する波力の確率特性について検討したものである。ただし、ここで云う波力とはゼロアップクロス波の一周期の間の最大値である。

2. 波力の確率密度関数

円柱に作用する波力の算定に際しては次の2つの仮定を設けた。① 波力の算定はモリソン式が適用できる。② ゼロアップクロス法で定義した不規則波の内部機構は微小振幅波理論に補正係数をかけあわせたもので近似できる。

これらの仮定のもとで、単位長さの円柱に作用する波力 $F'(t)$ は次式で与えられる。

$$F'(t) = C_a \frac{w}{2g} D u |u| + C_m \frac{w}{2g} \frac{\pi}{4} D^2 \ddot{u} \quad \cdots \cdots (1)$$

ただし、 C_a : 抗力係数、 C_m : 慣性力係数、 D : 円柱の直

径、 w/g : 単位体積あたりの流体の質量である。いま u , $\ddot{u}$ に対して補正係数 C を掛けた微小振幅波理論を適用し、式 (1) を積分して円柱全体に作用する全波力 $F(t)$ を求めると、

$$F(t) = \frac{C_a C^2 w D \pi^2 H^2 (2kh + \sinh 2kh)}{8g T^2 k \sinh^2 kh} \times |\cos(kx - \sigma t)| \cos(kx - \sigma t) + \frac{C_m C w D^2 \pi^3 H}{2g k T^2} \sin(kx - \sigma t) \quad \cdots \cdots (2)$$

となる。ここに H は波高、 T は周期、 h は水深、 k , σ はそれぞれ波数、角周波数である。さらに、式 (2) より、波の一周期の間の最大波力 f' は

$$f' = \frac{C_a C^2 w \pi^2 D (2kh + \sinh 2kh)}{8g T^2 k \sinh^2 kh} H^2 + \frac{C_m w \pi^4 D^3 \sinh^2 kh}{2C_a g T^2 k (2kh + \sinh 2kh)} \quad \cdots \cdots (3)$$

と与えられる。ただし、式 (3) の適用範囲は

$$\frac{C_a C (2kh + \sinh 2kh) H}{4C_m \pi D \sinh^2 kh} > 0.5 \quad \cdots \cdots (4)$$

であり、それ以外の

$$0 \leq \frac{C_a C (2kh + \sinh 2kh) H}{4C_m \pi D \sinh^2 kh} \leq 0.5 \quad \cdots \cdots (5)$$

の領域では慣性力が卓越するので、最大波力 f' は

$$f' = \frac{C_m C w \pi^3 D^2 H}{2g k T^2} \quad \cdots \cdots (6)$$

で与えられる。式 (3), (6) を一般的な表現にするため、 $\zeta = H/D$, $\xi = kh$, $f = f'/wD^3$ とおき、次式の関係

$$\alpha = \frac{2C_a (2\xi + \sinh 2\xi)}{C_m^2 \pi^2 \sinh^2 \xi \tanh \xi}, \quad \beta = \frac{C_a C (2\xi + \sinh 2\xi)}{4C_m \pi \sinh^2 \xi} \quad \cdots \cdots (7)$$

を用いて書きかえると、抗力と慣性力の両方を考慮した式 (3) は

$$\alpha f = (\beta \zeta)^2 + 0.25 \quad \beta \zeta > 0.5 \quad \cdots \cdots (8)$$

となり、慣性力の卓越する式 (6) は

$$\alpha f = \beta \zeta \quad 0 \leq \beta \zeta \leq 0.5 \quad \cdots \cdots (9)$$

のように簡単になる。

図-1 は水粒子速度、加速度の補正係数 C を 1.0、 C_a を 1.0、 C_m を 2.0 と一定にした場合の f の分布を示したものである。図中の実線は f の値の等しい点を結

* 正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部海洋土木工学科

** 正会員 工博 鳥取大学教授 工学部海洋土木工学科

*** 正会員 下関市港湾局

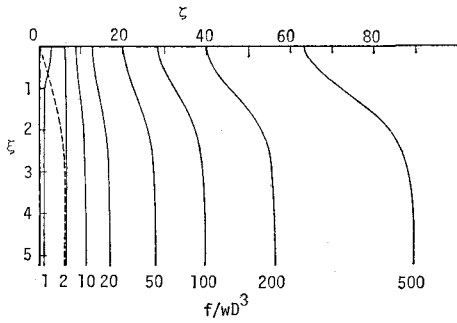


図-1 等波力線図

んだものであり、点線は式(8)、(9)の適用限界 $\beta\zeta=0.5$ の線である。点線より右側が式(8)、左側が式(9)の適用範囲である。

ζ, ξ がわかれば、この図から f の値は簡単に求めることができる。

式(1)からもわかるように、波の内部機構から波力への変換式は zero-memory 型であり、前後の波の影響は受けない。したがって波力の確率密度関数は波高・周期の結合分布を ζ, ξ の結合分布に変換し、図-1 と重ね合わせることで算定できる。最初にも述べたように、波高・周期の結合分布としてはいくつかのものが提案されているが、ここでは著者⁹⁾による次式の2次元 Weibull 分布を用いる。

$$P(h, t)dhdt = \frac{mn}{4A} h^{m-1} t^{n-1} \exp \left[-\frac{1}{2A} (\phi_2 h^m + \phi_1 t^n) \right] I_0 \left(\frac{h^{m/2} t^{n/2} \rho}{A} \right) dhdt \quad (10)$$

ここに、 h, t はそれぞれ平均波高、平均周期で正規化した値であり、 m, n は波高および周期の周辺分布の形状母数である。また、 I_0 は第1種変形ベッセル関数であり、 A, ϕ_1, ϕ_2 はそれぞれ次のように与えられる。

$$A = \phi_1 \phi_2 - \rho^2, \quad \phi_1 = \frac{1}{2} \left[\Gamma \left(\frac{m+1}{m} \right) \right]^{-m}, \\ \phi_2 = \frac{1}{2} \left[\Gamma \left(\frac{n+1}{n} \right) \right]^{-n}$$

ただし Γ はガンマ関数であり、 ρ は相関パラメーターである。 $m=2$ のとき h の周辺分布は Rayleigh 分布となり、例えば $n=4$ とすれば t の周辺分布はいわゆる T^2 -Rayleigh 分布となる。

いま、式(10)に対して、

$$h = H/\bar{H} = \zeta/\bar{\zeta}, \quad t = T/\bar{T} = (\bar{\xi} \tanh \bar{\xi} / \xi \tanh \xi)^{1/2}$$

なる変数変換をほどこすと、 ζ, ξ の結合分布が得られる。

$$P(\zeta, \xi) d\zeta d\xi = \frac{mn}{4A} \left(\frac{\bar{\xi}}{2\bar{\zeta}} + \frac{\bar{\xi}}{\sinh 2\bar{\zeta}} \right) \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^{m-1} \left(\frac{\bar{\xi} \tanh \bar{\xi}}{\xi \tanh \xi} \right)^{n/2} \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2A} \left[\phi_2 \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^m + \phi_1 \left(\frac{\bar{\xi} \tanh \bar{\xi}}{\xi \tanh \xi} \right)^{n/2} \right] \right\}$$

$$\times I_0 \left\{ \frac{\rho}{A} \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^{m/2} \left(\frac{\bar{\xi} \tanh \bar{\xi}}{\xi \tanh \xi} \right)^{n/4} \right\} \frac{d\zeta}{\bar{\zeta}} \frac{d\xi}{\bar{\xi}} \quad (11)$$

いま 図-1 の任意の等波力線 f と $f+df$ ではさまれる領域を S とすれば波力の確率密度関数 $P(f)$ および分布関数 $Q(f)$ は

$$P(f)df = \iint_S P(\zeta, \xi) d\zeta d\xi \quad (12)$$

$$Q(f) = \int_0^f P(f') df' \quad (12)'$$

で与えられる。式(12)を解析的に表現するのは困難であったので、ここでは数値計算によった。ただ、図-1 からわかるように、 ξ が十分小さい部分とある程度大きな領域では等波力線が ξ 軸に平行になり、これらの領域では波力は ζ だけの関数として表わすことができる。したがってこれらの領域では以下のように $P(f), Q(f)$ を解析的に求めることが可能である。

すべての波が深海波と見なし得る領域では $\xi \rightarrow \infty$ となり、式(7)の α, β はそれぞれ次式ようになる。

$$\alpha = 4C_d/C_m^2 \pi^2, \quad \beta = C_d C / 2C_m \pi$$

この関係を式(8)、(9)に代入し ζ が Rayleigh 分布をすることを考えると、深海域での波力の確率密度関数および分布関数は、抗力と慣性力とが共存する場合： $(\alpha f > 0.5)$

$$P(f)df = \frac{\pi}{4} \exp \left\{ -\frac{\pi}{4} \left(\frac{f}{\bar{f}} - \frac{0.25}{\alpha \bar{f}} \right) \right\} \frac{df}{\bar{f}} \quad (13)$$

$$Q(f) = 1 - \exp \left\{ -\frac{\pi}{4} \left(\frac{f}{\bar{f}} - \frac{0.25}{\alpha \bar{f}} \right) \right\} \quad (13)'$$

慣性力が卓越する場合： $(0 \leq \alpha f \leq 0.5)$

$$P(f)df = \frac{\pi}{2} (\alpha \bar{f}) \left(\frac{f}{\bar{f}} \right) \exp \left\{ -\frac{\pi}{4} (\alpha \bar{f}) \left(\frac{f}{\bar{f}} \right)^2 \right\} \frac{df}{\bar{f}} \quad (14)$$

$$Q(f) = 1 - \exp \left\{ -\frac{\pi}{4} (\alpha \bar{f}) \left(\frac{f}{\bar{f}} \right)^2 \right\} \quad (14)'$$

で与えられる。ここに $\bar{f} = (\beta \bar{\zeta})^2 / \alpha$ であり、式(8)からわかるように、対象とする領域(式(13)、(14)では深海域)での平均波の最大波力を生ずる位相での抗力を wD^3 で割ったものである。

一方、すべての波が長波を見なし得る領域では $\xi \rightarrow 0$ であり、図-1 の点線からわかるように、慣性力の卓越する領域はなくなる。この場合の $P(f), Q(f)$ は

$$P(f)df = \frac{\pi}{4} \exp \left\{ -\frac{\pi}{4} \frac{f}{\bar{f}} \right\} \frac{df}{\bar{f}} \quad (15)$$

$$Q(f) = 1 - \exp \left\{ -\frac{\pi}{4} \frac{f}{\bar{f}} \right\} \quad (15)'$$

となる。 $\bar{f}$ は長波域での平均波の抗力の最大値を wD^3 で割ったものである。

深海域および長波域の2領域では $P(f), Q(f)$ を確定することができた。しかし、浅海域においてはさらに式

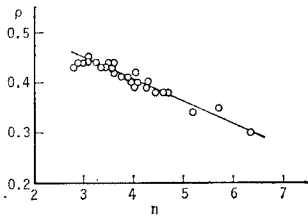
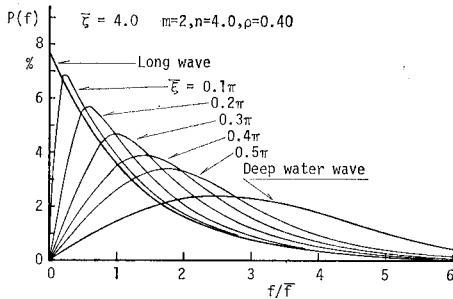


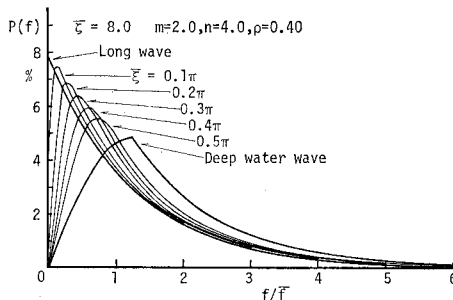
図-2 ρ と n の関係

(11) の m, n, ρ の値を知る必要がある。波高の周辺分布は一般に Rayleigh 分布で近似されることが多いので m は 2 とおけばよい。一方、 n の値はスペクトル幅パラメーター ε と密接な関係を持つのでスペクトル形状がわかれば決めることができる。図-2 はさらに不規則波のシミュレーション実験の結果⁹⁾をもとに n と ρ の関係を検討したもので、図からわかるように、両者の間には明確な右下りの関係が存在する。したがってスペクトル形状がわかればこれらのパラメーターが決まる。ここでは例として、十分発達した風波のスペクトルである Pierson 型のスペクトルにほぼ対応する $m=2, n=4, \rho=0.40$ (ケース 1) と風波の発達初期に見られるかなりシャープなスペクトルに対応する $m=2, n=6, \rho=0.32$ (ケース 2) の 2 つの場合について浅海域での $P(f)$ を計算した。

図-3 および 4 はそれぞれケース 1 および 2 の結果のうち、 $\xi=4, 8$ の 2 つの場合の $P(f)$ を示したものである。各図とも図中には式 (13)~(15) の結果もあわせて

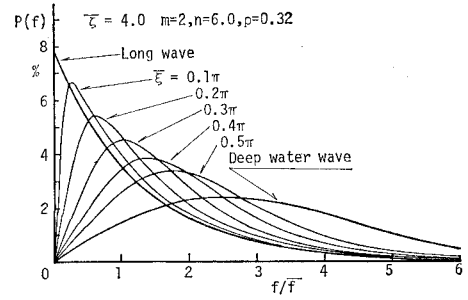


(a) $\xi=4$

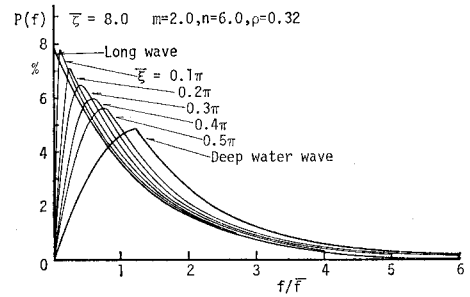


(b) $\xi=8$

図-3 波力の確率密度関数 (ケース 1)



(a) $\xi=4$



(b) $\xi=8$

図-4 波力の確率密度関数 (ケース 2)

示した。図からわかるように、 ξ の減少とともに深海域の式 (13), (14) から徐々に式 (15) の指数分布に近づいてゆく。さらに図-5 に式 (13), (14) の ξ による変

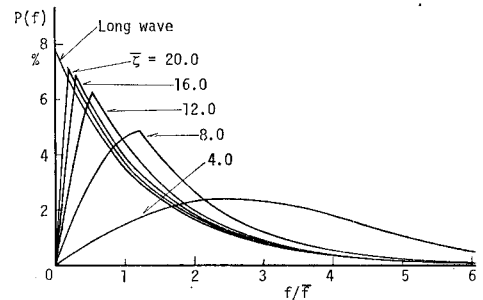


図-5 波力の確率密度関数 (深海域)

化の様子を示したが、この場合には ξ の増加とともにやはり指数分布に近づいてゆく。図-3 と 4 の同じ条件の $P(f)$ を比較すると、 n の大きい方が mode の位置が若干左に移動するものの、分布形状に大きな差異は見られない。通常観測される不規則波においては n の値は 3.5~4.0 付近のものが多く、発達初期の非常にシャープなスペクトル形状を持つ風波においても $n=6$ 程度であることを考えると、スペクトル形状による $P(f)$ の変化は比較的小さい。

3. 最大波力の確率密度関数

2. で示した $P(f)$ に従う波力 f の集合において、任意の f がある値 f_0 を越えない確率は式 (12)'~(15)' よ

り $Q(f_0)$ で与えられる。ここでその最大値を推定しようとする波力の集合が N 個のデータより成り立っており、各データが相互に独立であると仮定すれば、すべてのデータがある値 f_0 を超えない確率は $\{Q(f_0)\}^N$ となる。したがって少なくとも1つ以上のデータが f_0 を越える確率は、現象として $\{Q(f_0)\}^N$ の余事象であることから、 $1 - \{Q(f_0)\}^N$ となる。したがって、 N 個のデータのうち最大の値が f_0 と $f_0 + df$ の間に存在する確率は、少なくとも1つのデータが f_0 を越える確率から少なくとも1つのデータが $f_0 + df$ を越える確率を差し引けばよい。いまそれらを

$$\left. \begin{aligned} R(f_0) &= 1 - \{Q(f_0)\}^N \\ R(f_0 + df) &= 1 - \{Q(f_0 + df)\}^N \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

とし、2番目の式を Taylor 展開しその第2項までとれば、

$$R(f_0) - R(f_0 + df) \simeq -N Q(f_0)^{N-1} \frac{dQ(f_0)}{df} df \dots (17)$$

となり、深海域および長波域における最大波力の確率密度関数 $P_{\max}(f)$ は次のようになる。

深海域:

$$\begin{aligned} P_{\max}(f)df &= \frac{\pi N}{4} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{f}{\bar{f}} - \frac{0.25}{\alpha \bar{f}} \right) \right] \right\}^{N-1} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{\pi}{4} \left(\frac{f}{\bar{f}} - \frac{0.25}{\alpha \bar{f}} \right) \right\} \frac{df}{\bar{f}} \quad (\alpha f > 0.5) \\ P_{\max}(f)df &= \frac{\pi N}{2} (\alpha \bar{f}) \left(\frac{f}{\bar{f}} \right) \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\pi}{4} (\alpha \bar{f}) \left(\frac{f}{\bar{f}} \right)^2 \right] \right\}^{N-1} \\ &\quad \times \left(\frac{f}{\bar{f}} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{\pi}{4} (\alpha \bar{f}) \left(\frac{f}{\bar{f}} \right)^2 \right\} \frac{df}{\bar{f}} \quad (0 \leq \alpha f \leq 0.5) \end{aligned} \dots (18)$$

長波域:

$$\begin{aligned} P_{\max}(f)df &= \frac{\pi N}{4} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{\pi}{4} \frac{f}{\bar{f}} \right) \right\}^{N-1} \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{\pi}{4} \frac{f}{\bar{f}} \right) \frac{df}{\bar{f}} \dots (19) \end{aligned}$$

浅海域の場合には 図-3, 4 に示した $P(f)$ を数値積分して $Q(f)$ を求め、式 (17) に代入すれば $P_{\max}(f)$ が求められる。

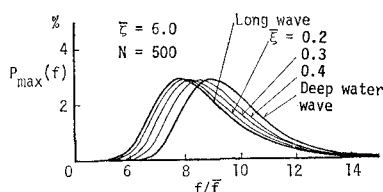


図-6 最大波力の確率密度関数 (ケース 1, $\zeta=6$, $N=500$)

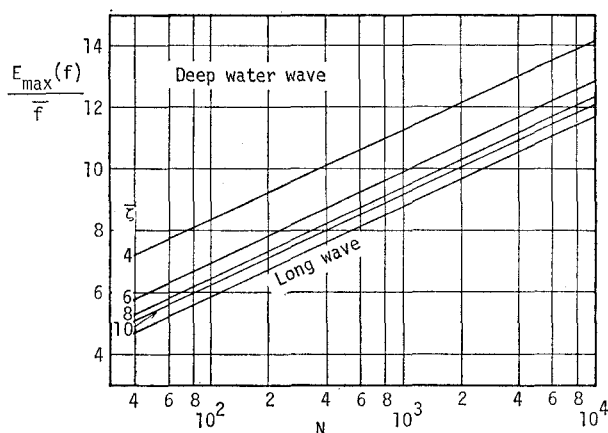


図-7 最大波力の期待値

図-6 はケース 1 の $\zeta=6.0$ の場合で、 N を 500 とした時の $P_{\max}(f)$ を示したものである。図からわかるように、浅海域における分布は 図-3, 4 と同様深海域と長波域の中間にあり、 ζ の減少とともに長波域のものに近づいてゆく。したがって、種々の統計学的な特性値も両方の極限の分布から得られる値の中間の値を持つ。

深海域および長波域における最大波力の期待値は式 (18), (19) より、深海域では

$$\frac{\pi}{16\alpha\bar{f}} \geq \ln N \text{ の時: } E_{\max}[f]/\bar{f} \simeq \frac{2}{\sqrt{\alpha\bar{f}\pi}} (\ln N)^{1/2} \dots (20)$$

$$\frac{\pi}{16\alpha\bar{f}} < \ln N \text{ の時: } E_{\max}[f]/\bar{f} \simeq \frac{4}{\pi} \ln N + \frac{1}{4\alpha\bar{f}} \dots (21)$$

となり、長波域では

$$E_{\max}[f]/\bar{f} \simeq \frac{4}{\pi} \ln N \dots (22)$$

となる。ただし、(20)~(22) 式の誘導に際しては $(\ln N)^{-1/2}$ 以下の項を無視した。図-7 に式 (20)~(22) の関係を示した。図-6 からわかるように、浅海域における最大波力の期待値は ζ の同じ深海域のものと、長波域の期待値との中間に存在し、 ζ の減少とともに長波域の値に近づいてゆく。

4. おわりに

すでに柱状構造物の設計に際しては、設計波は最高波の波高と有義波の周期を用いることがある程度一般化しているようであるが、波から力への変換のプロセスが非線型であり、周期もある程度の分布幅を持つため、設計波の出現頻度と、設計波力の作用頻度とはおのずから異なる。したがって、ここに示したように、波力の確率特性から直接設計波力を決定する方がより合理的であると考える。

最後に、本研究の遂行にあたり助言をいただいた野田

英明教授に感謝するとともに、本研究は文部省科学研究費（代表 土屋義人教授）による研究の一部であることを付記して感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) Borgman, L. E.: Wave forces on piling for narrow band spectra, Proc. ASCE, Vol. 91, WW 3, pp. 65~90, 1965.
- 2) Bretschneider, C. L.: Probability distribution of wave force, Proc. ASCE, Vol. 93, WW 3, pp. 5~26, 1967.
- 3) 岩垣雄一・木村 晃: 不規則波浪の周期の確率特性に関する研究, 第22回海岸工学講演会論文集, pp. 295~300, 1975.
- 4) Longuet-Higgins, M. S.: On the joint distribution of the periods and amplitudes of sea waves, J. Geophys. Res., Vol. 80, No. 18, pp. 2688~2693, 1975.
- 5) Arhan, C. M. and R. Ezraty: A statistical relationship between individual heights and periods of storm waves, Proc. BOSS'76, Vol. II, pp. 354~360, 1976.
- 6) 木村 晃: 不規則波の波高・周期の結合確率特性について, 土木学会論文報告集, 第 286 号, 53~63, 1979.
- 7) Nath, J. H. and K. Kobune: Periodic theory of velocity prediction in random wave, Proc. 16th Coastal Engg. Conf., pp. 340~359, 1978.
- 8) 瀬山 明・木村 晃・国友慶記: 浅海域の風波の水粒子速度に関する研究, 第 26 回海岸工学講演会論文集, pp. 11~15, 1979.
- 9) Kimura, A. and Y. Iwagaki: Random wave simulation in a laboratory wave tank, Proc. 15th Coastal Engg. Conf., pp. 368~387, 1976.