

ゴムを敷いた混成堤直立部の振動特性

新妻 幸雄*・高 隆 二**・多賀 富朗***・遠藤 史朗****

1. ま え が き

通常摩擦係数1前後を有するゴムに滑動抵抗を期待して混成堤直立部底面に用いる際、在来の捨石より弾性に富むため直立部の変位や慣性力に好ましくない状況を招くと懸念されるので、重複波・碎波及び地震に対する振動特性に関し検討を加えた。

2. 解 析

(1) 堤体の振動

堤体（高さ Z 、幅 B 、質量 m 、慣性モーメント I ）を法線方向に連続するゴム直方体（高さ D 、幅 b 、Young 率 E ）一対上に置く。波（波力 P 、波力モーメント M ）により水平変位 x と傾斜角 θ を生じる（図-1）。普通

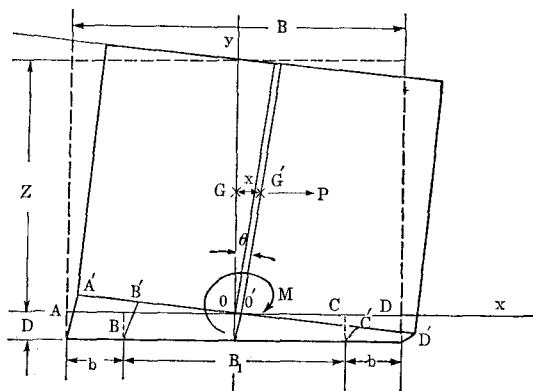


図-1 堤体の変位

準静的に測られる履歴曲線を利用するため変位速度に比例する粘性型減衰に代り速度に無関係な非粘性型減衰係数¹⁾ c を用いた重心の運動方程式を導く (k : バネ定数)。

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= P - (k_\theta + ic_\theta)\frac{2\theta}{Z} - (k_x + ic_x)\left(x - \frac{Z}{2}\theta\right) \\ I\ddot{\theta} &= M - (k_\theta + ic_\theta)\theta + (k_x + ic_x)\left(x - \frac{Z}{2}\theta\right)\frac{Z}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

添字 x, θ は水平・回転との関連を示す。堤体の数 % とされる水の付加質量と付加慣性モーメント²⁾ は省略する。

(2) 捨石の性質

奥行 L の堤体でバネ定数は

$$k_x = k'_x BL, \quad k_\theta = k'_\theta \frac{B^3 L}{12} \dots\dots\dots (2)$$

と表わされ、圧力・変位その他に影響される地盤定数 k' は $\sqrt{BL}$ に反比例し、底面積 $100 \sim 300 \text{ m}^2$ のケーソンに対し普通地盤で $k'_x = 0.2 \text{ kgf/cm}^3$ 程度とされ、一般に $k'_x : k'_y : k'_\theta \approx 1 : 2 : 4$ (y : 鉛直方向) が成立つ³⁾。実測によるとケーソン上部の振動は下部より大きいので、捨石の付加質量を加えて堤体の仮想質量 $2m$ と見積られてもいる³⁾。林の推定値 $k'_\theta = 2 \sim 20 \text{ kgf/cm}^3$ ⁴⁾ を厚さ $D = 2 \text{ m}$ のマウンドに適用すると、 $E = k'_y D = 400 \sim 4000 \text{ kgf/cm}^2$ (bar) と換算される。

〔例 1〕 $B = Z = 10 \text{ m}$, $m = 200 \text{ t/m}$, $I = 8.3 \times 10^3 \text{ t} \cdot \text{m}^2/\text{m}$ の堤体では、水平・回転固有振動周期は

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_x}} = 0.63 \text{ sec}$$

$$T_\theta = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k_\theta}} = 0.71 \text{ sec}$$

とほぼ等しい。

動的応力-歪曲線において単位体積一周期当りエネルギー損失（原点を中心とする楕円の面積） $\Delta W = \pi \varepsilon_1^2 E_2$

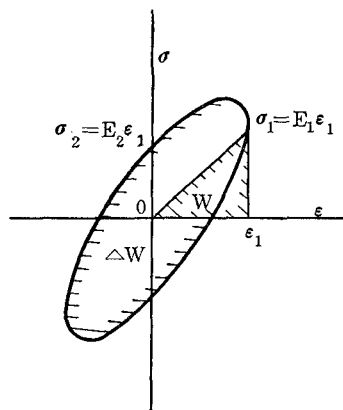


図-2 動的応力-歪曲線

* 正会員 (株) 港湾環境エンジニアリング社長

** 正会員 (財) 国際臨海開発研究センター 主任研究員

*** 正会員 (株) 港湾環境エンジニアリング技術部

**** (〃)

(ϵ_1 : 最大歪, E_2 : 損失弾性率) と弾性力のなす仕事 $W = E_1 \epsilon_1^2 / 2$ で定義される損失係数 (φ : 損失角)

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} = \frac{E_2}{E_1} = \tan \varphi \quad \dots\dots\dots (3)$$

は応力・繰返し回数の増加, 歪の減少に伴ない低下し変動著しいが, 5~40% の値を示すとされる⁵⁾ (図-2).

(3) ゴムの性質

非線形な応力-歪曲線を通常の使用範囲 $\epsilon = 0.2$ 以内でなした仕事を等価とし線形化する (E_0 : 初期 Young 率).

$$\begin{aligned} W &= D \int_0^{0.2} \sigma d\epsilon \\ &= -\frac{DE_0}{3} \int_0^{0.2} \left\{ 1 - \epsilon - \frac{1}{(1-\epsilon)^2} \right\} d\epsilon \\ &= D \int_0^{0.2} E_1 \epsilon d\epsilon \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

より換算 Young 率 $E_1 = 1.17 E_0$ を得る. 載荷条件・ゴムの性質により増減する損失係数は直方体の一例では 25% を示す⁶⁾. ケーソン底面前後縁に幅 b で敷くと, 単位奥行当りバネ定数は

$$\left. \begin{aligned} k_x &= \frac{B}{D} (1 - \beta) G \\ k_\theta &= \frac{E_0 B^3}{12 D} (1 + 2\epsilon_0 + 4\epsilon_0^2 + \dots)(1 - \beta^3) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (5)$$

である⁶⁾ ($\beta = B_1/B$, ϵ_0 : 堤体自重による歪). 剛性率 G は歪の小さい範囲でほぼ一定, JIS-K 6301 加硫ゴム物理試験による硬度 H_s (A 型) とは

$$G = \frac{8(H_s + 6.8)}{100 - H} \quad \dots\dots\dots (6)$$

の近似式で結ばれる⁷⁾ (G : 単位 $\text{kgf/cm}^2 \doteq \text{bar}$). Young 率は振動数 200 Hz 以内, 温度 $0 \sim 50^\circ\text{C}$ では不変と見られ, 応力-歪履歴曲線も線型ないし準線型 (軸方向の異なる楕円) を示す⁷⁾.

(4) 重複波

振動の規模を概算するため Sainflou の基本周期のみを取る. 通常の記法に従う

$$\left. \begin{aligned} P(t) &= P_1 e^{i\omega t}, \quad M(t) = M_1 e^{i\omega t} \\ P_1 &= \frac{w}{2} H h \left\{ 1 + \frac{1}{\cosh kh} \left(1 + \frac{\delta_0}{h} \right) \right\} \\ M_1 &= \frac{w}{6} H h^2 \left(1 + \frac{\delta_0}{h} \right) \left(2 + \frac{1 + \delta_0/h}{\cosh kh} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (7)$$

を式 (1) に代入し, $\omega_x = \sqrt{k_x/m} \gg \omega$ として慣性力を無視する. 実測値を参照し

$$\frac{c_x}{k_x} = \frac{c_\theta}{k_\theta} = \tan \varphi \doteq \frac{1}{4} \quad \dots\dots\dots (8)$$

により $x = x_1 e^{i(\omega t - \varphi)}$, $\theta = \theta_1 e^{i(\omega t - \varphi)}$, $k e^{i\varphi} = k_x + i c_x$, $k_\theta = \alpha k_x Z^2$ (α : 定数). 式 (7) より $M_1 \doteq 2h P_1 / 3$ とし

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4\alpha} \right) - \frac{2h}{3Z} \left(1 - \frac{1}{4\alpha} \right) \right\} \frac{P_1}{k} \\ \theta_1 &= \left(1 + \frac{4h}{3Z} \right) \frac{P_1}{4\alpha k Z} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (9)$$

を得る. せん断・回転変形に対する抵抗から成る摩擦力は波力と静的に釣合う. $h/Z = 3/4$ でせん断変形は消失して純粋な回転変形を生じる ($\theta_1 = P_1 / 2\alpha k Z$).

[例 2] $B = Z = 10 \text{ m}$, $h = 7.5 \text{ m}$, $H = 3 \text{ m}$ とする.

① 捨石 $k_x' = 1 \text{ kgf/cm}^2$ とし $\theta_{1m} = w H h / 2\alpha (\sqrt{17} k_x / 4) Z = 0.125^\circ$

② ゴム $D = 0.1 \text{ m}$, $G = 14 \text{ kgf/cm}^2$, $\beta = 2/3$, $\epsilon_0 = 0.15$ とし $\theta_{1r} = 8w H h^2 D / 3 G B^3 (1 + 2\epsilon_0 + 4\epsilon_0^2 + \dots)(1 - \beta^3) = 0.012^\circ$ に捨石の傾斜 $\theta_{1m} = 0.125^\circ \sqrt{B/2\sqrt{b}} = 0.153^\circ$ を加え $\theta_1 = 0.165^\circ$ となる.

ゴムを敷いたとき, 変位増大は主に捨石との接触面積減少によるバネ定数低下 (地盤定数は増加) に起因し, ゴムの変形は僅少に保ち得る. 更に $\beta = 1/2$ とすれば θ_{1m} はゴムを用いないときと等しくなる.

(5) 砕波

最大波力 P_0 , 作用時間 2τ の三角形 $f(t)$ で波力を近似し, 合力の作用高さを水面下 $h/2$, 腰掛波力を無視する (図-3). Laplace 変換

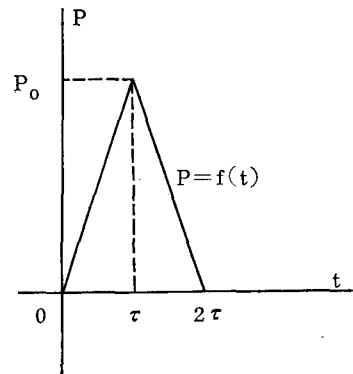


図-3 砕波の波力

$$\left. \begin{aligned} X(s) &= \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt \doteq x(t) \\ \Theta(s) &= \int_0^\infty \theta(t) e^{-st} dt \doteq \theta(t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

を用い, $\tau \ll T$ (T : 波の周期) であるから初期条件を $x(0) = \dot{x}(0) = \theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$

と見なす. 式 (1) は

$$\left. \begin{aligned} m s^2 X &= \frac{P_0}{\tau s^2} (1 - e^{-s\tau})^2 - 2\alpha k Z e^{i\varphi} \Theta \\ &\quad - k e^{i\varphi} \left(X - \frac{Z}{2} \Theta \right) \\ I s^2 \Theta &= \frac{h P_0}{2\tau s^2} (1 - e^{-s\tau})^2 - \alpha k Z^2 e^{i\varphi} \Theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{kZ}{2} e^{i\varphi} \left(X - \frac{Z}{2} \Theta \right) \right\} \\ & \text{と変換される}^3). \text{これから} \\ & X = \frac{I \left[s^2 + \left\{ \left(\alpha + \frac{1}{4} \right) - \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) \frac{h}{Z} \right\} \frac{kZ^2}{I} e^{i\varphi} \right]}{Im \left[s^4 + \left\{ \frac{1}{m} + \left(\alpha + \frac{1}{4} \right) \frac{Z^2}{I} \right\} k e^{i\varphi} s^2 + \frac{2\alpha k^2 Z^2}{Im} e^{2i\varphi} \right]} \\ & \cdot \frac{P_0}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s})^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Theta = \frac{\frac{hm}{2} \left\{ s^2 + \left(1 + \frac{Z}{h} \right) \frac{k}{m} e^{i\varphi} \right\}}{Im \left[s^4 + \left\{ \frac{1}{m} + \left(\alpha + \frac{1}{4} \right) \frac{Z^2}{I} \right\} k e^{i\varphi} s^2 + \frac{2\alpha k^2 Z^2}{Im} e^{2i\varphi} \right]} \cdot \frac{P_0}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s})^2 \quad \dots\dots\dots(13)$$

部分々数に分解し

$$\left. \begin{aligned} G_1(s) &= \frac{1}{m} \left(\frac{A_1}{s^2 + s_1^2 e^{i\varphi}} + \frac{A_2}{s^2 + s_2^2 e^{i\varphi}} \right) \subset g_1(t), \quad A_1 = \frac{b_1^2 - s_1^2}{s_2^2 - s_1^2}, \quad A_2 = \frac{s_2^2 - b_1^2}{s_2^2 - s_1^2} \\ G_2(s) &= \frac{h}{2I} \left(\frac{B_1}{s^2 + s_1^2 e^{i\varphi}} + \frac{B_2}{s^2 + s_2^2 e^{i\varphi}} \right) \subset g_2(t), \quad B_1 = \frac{b_2^2 - s_1^2}{s_2^2 - s_1^2}, \quad B_2 = \frac{s_2^2 - b_2^2}{s_2^2 - s_1^2} \\ s_{1,2} &= \sqrt{\frac{k}{2} \left[\frac{1}{m} + \left(\alpha + \frac{1}{4} \right) \frac{Z^2}{I} \right] \mp \sqrt{\left\{ \frac{1}{m} + \left(\alpha + \frac{1}{4} \right) \frac{Z^2}{I} \right\}^2 - \frac{8\alpha Z^2}{Im}}} \\ b_1^2 &= \left\{ \left(\alpha + \frac{1}{4} \right) - \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) \frac{h}{Z} \right\} \frac{kZ^2}{I}, \quad b_2^2 = \left(1 + \frac{Z}{h} \right) \frac{k}{m} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(14)$$

と書く。 $\varphi/2 \doteq 1/8 \ll \pi/2$, $s_1 t \approx \omega x \tau \ll \pi/2$ として

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2 + s_j^2 e^{i\varphi}} &\subset \frac{1}{s_j e^{i(\varphi/2)}} \sin(s_j e^{i(\varphi/2)} t) \\ &\doteq \frac{1-i}{s_j} \left(\sin s_j t \cosh \frac{s_j t}{8} + i \cos s_j t \sinh \frac{s_j t}{8} \right) \doteq t \end{aligned}$$

を参照し

$$G_1(s) \subset g_1(t) = \frac{t}{m}, \quad G_2(s) \subset g_2(t) = \frac{ht}{2I} \quad \dots\dots\dots(15)$$

となる。波力

$$\left. \begin{aligned} F(s) &= \frac{P_0}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s})^2 \subset f(t) \\ &= P_0 \frac{t}{\tau} \quad (0 < t < \tau) \\ &= P_0 \left(2 - \frac{t}{\tau} \right) \quad (\tau < t < 2\tau) \\ &= 0 \quad (2\tau < t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

を用いて合成定理³⁾により原空間に戻す。

$$\left. \begin{aligned} X(s) &= G_1(s) \cdot F(s) \subset x(t) \\ &= g_1(t) * f(t) \\ &= \int_0^t g_1(t-\xi) f(\xi) d\xi \\ &= \int_0^t \frac{1}{m} (t-\xi) P_0 \frac{\xi}{\tau} d\xi \\ &= \frac{P_0 t^3}{6m\tau} \quad (0 < t < \tau) \\ &= \frac{P_0 \tau^2}{6m} + \int_{\tau}^t \frac{1}{m} (t-\xi) P_0 \left(2 - \frac{\xi}{\tau} \right) d\xi \\ &= \frac{P_0}{6m} \left(5\tau^2 - 9\tau t + 6t^2 - \frac{t^3}{\tau} \right) \quad (\tau < t < 2\tau) \\ &= \frac{P_0 \tau^2}{2m} \quad (2\tau < t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(17)$$

同様に

$$\left. \begin{aligned} \Theta(s) &\subset G_2(s) \cdot F(s) \subset \theta(t) \\ &= \frac{P_0 h t^3}{12I\tau} \quad (0 < t < \tau) \\ &= \frac{P_0 h}{12I} \left(5\tau^2 - 9\tau t + 6t^2 - \frac{t^3}{\tau} \right) \quad (\tau < t < 2\tau) \\ &= -\frac{P_0 h \tau^2}{4I} \quad (2\tau < t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(18)$$

と同位相になる。ただし $t > 2\tau$ では近似は不正確なため、初期条件

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x(2\tau) = \frac{P_0 \tau^2}{2m}, \quad \dot{x}_0 = \frac{P_0 \tau}{2m} \\ \theta_0 &= \frac{P_0 h \tau^2}{4I}, \quad \dot{\theta}_0 = \frac{P_0 h \tau}{4I} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(19)$$

の下に式 (1) を Laplace 変換する。

$$\left. \begin{aligned} (ms^2 + k e^{i\varphi}) X + \left(2\alpha - \frac{1}{2} \right) k Z e^{i\varphi} \Theta \\ &= m(sx_0 + \dot{x}_0) \\ &- \frac{kZ}{2} e^{i\varphi} X + \left\{ I s^2 + \left(\alpha + \frac{1}{4} \right) k Z^2 e^{i\varphi} \right\} \Theta \\ &= I(s\theta_0 + \dot{\theta}_0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(20)$$

式 (19) を利用して解く。

$$\left. \begin{aligned} X &= x_0 \frac{s^3 + \frac{s^2}{\tau} + b_1^2 e^{i\varphi} s + \frac{b_1^2}{\tau} e^{i\varphi}}{(s^2 + s_1^2 e^{i\varphi})(s^2 + s_2^2 e^{i\varphi})} \\ \Theta &= \theta_0 \frac{s^3 + \frac{s^2}{\tau} + b_2^2 e^{i\varphi} s + \frac{b_2^2}{\tau} e^{i\varphi}}{(s^2 + s_1^2 e^{i\varphi})(s^2 + s_2^2 e^{i\varphi})} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(21)$$

を原空間に戻し実数部のみを取ると

$$x = x_0 \left\{ (A_1 \cos s_1 t + C_1 \sin s_1 t) \cosh \frac{s_1 t}{8} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{C_1}{8} \cos s_1 t \sinh \frac{s_1 t}{8} \\ & + (A_2 \cos s_2 t + C_2 \sin s_2 t) \cosh \frac{s_2 t}{8} \\ & + \frac{C_2}{8} \cos s_2 t \sinh \frac{s_2 t}{8} \} \\ \theta = \theta_0 & \left\{ (B_1 \cos s_1 t + D_1 \sin s_1 t) \cosh \frac{s_1 t}{8} \right. \\ & + \frac{D_1}{8} \cos s_1 t \sinh \frac{s_1 t}{8} \\ & + (B_2 \cos s_2 t + D_2 \sin s_2 t) \cosh \frac{s_2 t}{8} \\ & \left. + \frac{D_2}{8} \cos s_2 t \sinh \frac{s_2 t}{8} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

ここで

$$C_j = \frac{A_j}{s_j \tau}, \quad D_j = \frac{B_j}{s_j \tau} \quad (j=1, 2) \dots (23)$$

とする。\$s_j \tau \ll 1\$ であり \$x, \theta\$ の最大は \$s_j t \approx \pi/2\$ に生じるので

$$\left. \begin{aligned} x & \doteq x_0 (C_1 \sin s_1 t + C_2 \sin s_2 t) \\ \theta & \doteq \theta_0 (D_1 \sin s_1 t + D_2 \sin s_2 t) \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

となる。抵抗力

$$R = 2\alpha k Z \theta + k \left(x - \frac{Z}{2} \theta \right) = P - m \ddot{x} \dots (25)$$

は式 (16), (17) により砕波力の作用時間中は \$R = P - m \ddot{x} = 0\$ で殆んど働かず、砕波作用後には式 (23), (24) から

$$R = \frac{P_0 \tau}{2} (s_1 A_1 \sin s_1 t + s_2 A_2 \sin s_2 t) \dots (26)$$

であり、衝撃係数は

$$\beta = \frac{R}{P_0} = \frac{\tau}{2} (s_1 A_1 \sin s_1 t + s_2 A_2 \sin s_2 t) \dots (27)$$

と導かれる。

〔例 3〕 \$B=10\$ m, \$Z/B=1/2\$, \$h/Z=3/4\$, \$m=100\$ t/m, \$H=3\$ m, \$T=8\$ sec, \$\tau=10^{-2} T^{4/3}\$, \$P_0=15 w H^{2.83}\$ の条件で変位と衝撃係数を求め表一に示した。ゴムを用いると変形は約 5% 増加し、衝撃係数は 95% に低下する。

表一 砕波による堤体運動

ゴ ム		水 平 変 位		回 転 角		衝撃係数
		最 大	起 時	最 大	起 時	
無	捨 石	2.97 cm	0.262 sec	0.876°	0.202 sec	0.393
有	捨 石	3.12	0.268	0.922	0.204	0.374
	ゴ ム	0.85	0.213	0.229	0.170	—
	計	3.12	0.268	0.922	0.204	0.374

一般に砕波々力に対する底面せん断力の比は定数ではなく⁴⁾、この条件で 40% 程度に留まった。

(6) 地震

地震による地盤の水平変位を規則的な \$y = y_1 e^{i\omega t}\$ で表

わす。せん断変形を生じない時強制運動

$$m \ddot{x} = -m \ddot{y} - 4\alpha k e^{i\phi} x \dots (28)$$

に \$x = x_1 e^{i(\omega t - \delta)}\$ を代入すると

$$\left. \begin{aligned} x_1 & = \gamma y, \quad \delta = -(\pi + \phi) \\ \phi & = \tan^{-1} \frac{4\alpha \lambda \sin \phi}{1 - 4\alpha \lambda^2 \cos \phi} \\ \gamma & = [(1 - 4\alpha \lambda^2 \cos \phi)^2 + (4\alpha \lambda^2 \sin \phi)^2]^{-1/2} \\ \lambda & = \frac{\omega x}{\omega} \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

と定まる。

大地震時不規則な地動は周期 0.3~5.0 sec, 振幅数 cm~数 10 cm, 最大加速度 4~8 m/s² と推定される⁹⁾。

〔例 4〕 \$T_x=0.65\$ sec, 地震周期 \$T=1.3\$ sec に対し、

- ① 捨石 \$x_1 = -0.221 y_1 e^{-17.1^\circ i}\$
- ② ゴム ゴムと捨石の増幅率 \$\gamma_r = 0.0232\$, \$\gamma_m = 0.250\$ を加え \$x_1 = -0.273 y_1 e^{-17.5^\circ i}\$

地震振幅 0.1 m で水平変位は砕波時と同程度になり、ゴムを使用すると約 25% 増加するが、地震加速度と増幅率の積で与えられる最大加速度は \$g/15\$ 程度となる。

3. あとがき

変形に富むと予測されるゴムの硬度と厚さの比を或程度に保つと、バネ定数は容易に捨石を上廻りゴム自体の変形は捨石マウンドの 1 割前後に押えられる。ゴムを敷く時に生じる若干の変形増加は主に捨石との接触面積減少に伴う捨石のバネ定数低下に起因する。

捨石及びゴムの履歴効果を変形速度に左右されず変位のみと関連する非粘性型損失で表現し有意な結果を導いたと信じるが、物理的機構によってこの解法の適否を吟味すべきである。

波力・地震動と共に堤体運動の継続観測は現象解明上不可欠である。

本研究に御協力頂いた、運輸省第一港湾建設局・(株)明治ゴム化成・(株)明佑商工の各位に感謝の意を表したい。

参考文献

- 1) 石原研而：土質力学の基礎，鹿島出版会，1976。
- 2) 林 泰造・今井 孝：砕波の圧力と堤体の滑动，第 11 回海岸工学講演集，土木学会，1964。
- 3) 合田良夫：衝撃砕波圧を受ける混成防波堤の挙動に関する考察，港湾技術研究所報告，第 12 巻，第 3 号，1973。
- 4) 林 泰造・服部昌太郎：砕波の波圧について，第 10 回海岸工学講演集，土木学会，1963。
- 5) 市原松平・石原研而・小川正二・谷本喜一：土の動的性質，土木学会誌，第 57 巻臨時増刊号，1972。
- 6) (株)港湾環境エンジニアリング：摩擦抵抗増大用 RB 実験報告書，1980。
- 7) 日本鉄道車輛工業会：防振ゴム，現代工学社，1975。
- 8) 近藤次郎：演算子法，培風館，1956。
- 9) 土木学会編：土工学ハンドブック，上巻，技報堂，1974。