

水中を落下する固体粒子の散らばりに関する研究

河 野 二 夫*・藤 田 智 康**

1. 緒 言

流体と固体粒子との相互作用の機構を解明する目的で静水あるいは進行波の水面より固体粒子群を自由落下させた場合の水中および水底における粒子の散らばりに関する実験を行ない、その結果に対する若干の考察を行なった。このような研究は単に学問的に興味があるのみならず、たとえば海洋における土砂や捨石あるいは人工魚礁や海洋廃棄物の自由投下に関する諸問題の中で究明すべき基礎的内容を含んでいると考えられる。箇内¹⁾は静水中を落下する砂や礫の水底での散らばりが二項分布に従うことを示し、小川・竹内²⁾は静水中を落下する土砂の水底での分散度は砂塊の着地速度が支配的要素になることを示している。Tawatchai³⁾は静水中で粒子を個別および連続落下した時の散らばりを比較している。Alger⁴⁾は任意形状の物体を球体に換算してその抗力係数を実験的に整理している。吉川ら⁵⁾も Tawatchai と同様の実験を行ない、粒子の運動を確率過程として扱っている。以上のように多くの研究がなされているが、そのほとんどは静水中の実験である。著者は以前に進行波の中を自由落下する単一の固体粒子の運動を調べたが⁶⁾多数の粒子が流体中を運動するときの流体と粒子あるいはお互いの粒子の相互作用効果について興味を持っていたので基礎的な実験を行なったものである。

2. 実験装置と実験方法

波動に対する実験装置は水路長 7m, 水路高 0.65m, 水路幅 0.3m の造波水路の天端に 図-1 に示す固体粒子投入容器をそのスリット先端が進行波の峯の位置付近にくる様に固定した。容器内の粒子は進行波の峯の位置で瞬間自由落下できるようになっている。落下状況は片面ガラス張りの水路側壁前方に固定したモータードライブ付きカメラで波の周期の 1/2 か 1/4 ごとに撮影し分析した。なお、補助光が水路側壁のガラス板で反射するのを防止するためにカメラには偏光フィルターを取りつけ

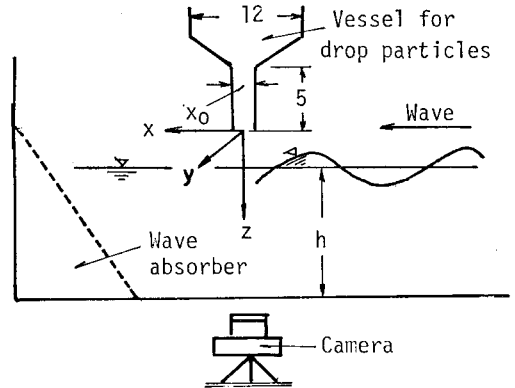


図-1 固体粒子の落下装置 (単位: cm)

た。写真解析のため水路側面には 2cm 間隔のメッシュをつけた。また水路底には粒子の散らばりを調べる目的で波への影響がないように製作した 2.9cm 間隔の格子を取りつけた。静水中の落下実験に使用した水槽は高さ 1.2m, 断面 0.39m×0.46m のもので側壁片面は透明になっている。実験方法は波動の場合と同様である。撮影したネガフィルムはキャビネサイズまで拡大し、任意の位置で粒子の個数を読み取った。

3. 拡散方程式とその解⁷⁾

静水中で固体粒子群を瞬間自由落下した場合を考えてみる。このような場合、粒子と流体の相互作用および粒子相互間の干渉効果などが影響して落下運動は非常に複雑になる。このような複雑(不規則)な運動の本質は確率論的にしか把握されない。図-2 に示すように水平面に x, y 軸を取り鉛直下向きに z 軸を取った場合沈降速度 $\bar{w}_0$ を有する粒子群の濃度 c の分布を与える基礎方程式は次式になる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{w}_0 \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (1)$$

上式で t は時間, D_x, D_y, D_z は拡散係数である。拡散係数を各座標方向について一定とし, $z = z_1 + \bar{w}_0 \cdot t$ に よって式 (1) を変換すると次式が得られる。

* 正 会 員 工 博 琉球大学教授 工学部土木工学科
** 学生会員 香川大学大学院農学研究科

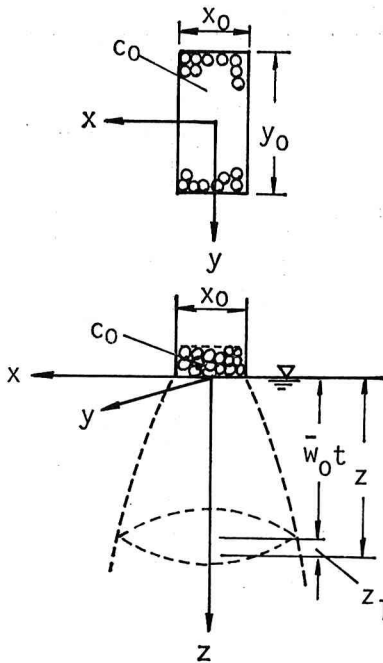


図-2 slit 部の略図

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

パラメータ ξ, ζ, η および α, β, γ を含む上式の解は次式になる。

$$c = \frac{1}{\pi^3} \iiint_0^\infty \exp \{ -(\alpha^2 D_x + \beta^2 D_y + \gamma^2 D_z) t \} \\ \cdot d\alpha \cdot d\beta \cdot d\gamma \times \iiint_{-\infty}^\infty F(\xi, \zeta, \eta) \\ \cdot \cos \alpha(x - \xi) \cdot \cos \beta(y - \zeta) \cdot \cos \gamma(z_1 - \eta) \\ \cdot d\xi d\zeta d\eta \quad \dots\dots\dots (3)$$

上式で $F(\xi, \zeta, \eta)$ は初期値を与える未定定数である。パラメータに関し積分順序が交換できるなら次式が得られる。

$$c = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^3 \sqrt{D_x \cdot D_y \cdot D_z}} \iiint_{-\infty}^\infty F(\xi, \zeta, \eta) \\ \cdot \exp \left[-\frac{1}{4t} \left\{ \frac{(x - \xi)^2}{D_x} + \frac{(y - \zeta)^2}{D_y} + \frac{(z_1 - \eta)^2}{D_z} \right\} \right] d\xi \cdot d\zeta \cdot d\eta \quad \dots\dots\dots (4)$$

(1) 点源瞬間放出の場合

座標原点に微小な体積を仮想し、その中の濃度を c_0 とし、デルタ関数 (delta function) の考え方をすると、式 (4) は次式になる。

$$c(x, y, z_1, t) = \frac{c_0 \times (\text{微小体積})}{(2\sqrt{\pi t})^3 \sqrt{D_x \cdot D_y \cdot D_z}} \\ \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{4t} \left(\frac{x^2}{D_x} + \frac{y^2}{D_y} + \frac{z_1^2}{D_z} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

(2) スリットからの瞬間放出の場合

x_0, y_0 をスリット幅として次式の初期条件を考える。

$$c = c_0 : (t=0, -1 < z_1 < 0, |x| < x_0/2, |y| < y_0/2) \\ c = 0 : (t=0, z_1 > 0, |x| > x_0/2, |y| > y_0/2) \quad \dots\dots\dots (6)$$

式 (6) を満足する式 (4) の解は次式になる。

$$c(x, y, z_1, t) \\ = \frac{c_0}{8} \left[\left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{x_0 - 2x}{4\sqrt{D_x \cdot t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x_0 + 2x}{4\sqrt{D_x \cdot t}} \right) \right\} \right. \\ \times \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{y_0 - 2y}{4\sqrt{D_y \cdot t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{y_0 + 2y}{2\sqrt{D_y \cdot t}} \right) \right\} \\ \times \left. \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{1 + z_1}{2\sqrt{D_z \cdot t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{z_1}{2\sqrt{D_z \cdot t}} \right) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (7)$$

上式で erf は誤差関数を示す。

4. 実験結果と考察

(1) 濃度の定義

本実験では写真撮影により沈降する粒子個数を二次元的に同一の観測者が読み取った。また、水底着底後の分布については水路底に設けた格子内の粒子の数を読み取った。このようなことから撮影濃度 (q) と底面濃度 (c) という表現を用いて次のように定義する。撮影濃度とは沈降する粒子数 m を撮影で読み取り、その単位面積当りの個数とする。底面濃度とは水路底の格子内に着底した粒子数 M を直接数えて格子の底面積で除した値とする。

(2) 粒子群の沈降速度 (静水実験)

粒子沈降の状況を写真-1 に示した。 t は放出後の経過時間である。これらの写真により粒子群の中心位置の平均落下速度 ($\bar{w}_0$) と単一粒子の沈降速度 (w_0) の比率が粒子群の面積によりどのように変化するかを示したのが図-3 である。図の中で d は球の直径を示す。図に

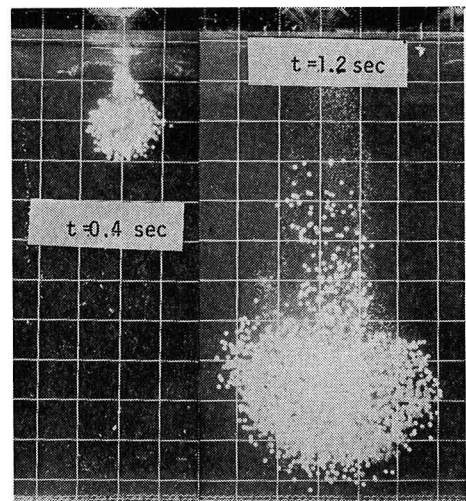


写真-1 粒子の沈降状況

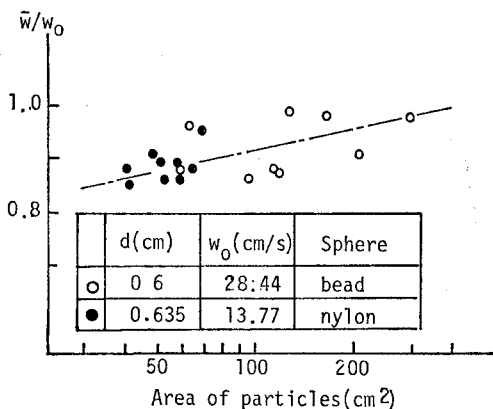


図-3 沈降速度

よると全体的には拡散によって粒子群の沈降速度は単一粒子の速度に接近することがわかる⁹⁾。

(3) 粒子の濃度分布

a) 撮影濃度の水平方向の分布

図-4 は粒子の水平方向の濃度分布が粒子群の沈降に

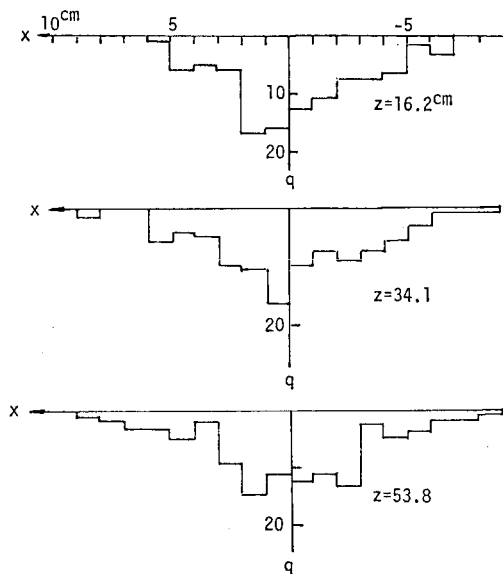


図-4 水平方向の分布 (bead)

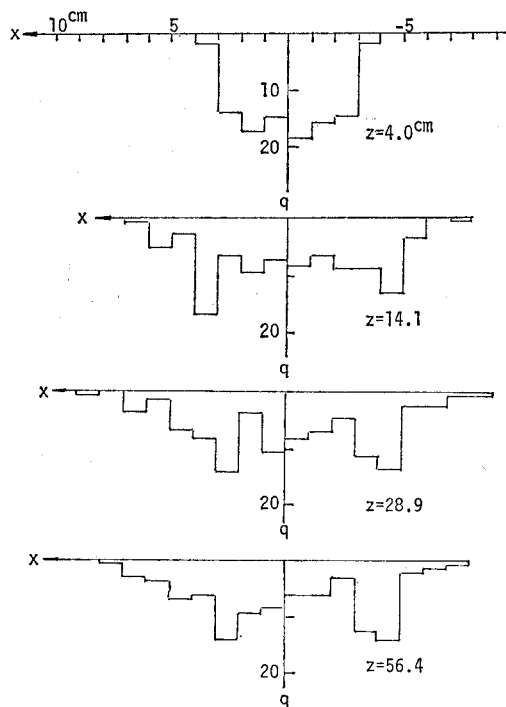


図-5 水平方向の分布 (polystyrene)

伴ってどうなるかを示した。縦軸の \$q\$ は \$x\$ 方向の 1 cm 間隔ごとに読み取った鉛直方向の総個数、\$z\$ は slit 先端より粒子群の平均落下距離を示す。また、図-4~5 は静水、図-6 は波動による結果である。落下総個数は 120~130 個であり slit 幅は \$x_0=0.7\$ cm の場合である。なお波動(進行波)は周期、波高、波形勾配がおのおの 0.8 秒、0.08 m、0.08 である。図によると polystyrene の散らばりは大きく、波動では粒子群は前後に揺れて沈降する。

b) 撮影濃度の鉛直分布

式(7)で粒子群の中心位置 (\$t=z/\bar{w}_0\$) の濃度 \$c\$ は \$x=0\$、\$z=z_m\$ 点を \$c_m\$ とし、\$y=0\$ 面内の濃度に注目すると次式で与えられる。ただし、\$D_x=D_y=D_z=D\$ とする。

$$\frac{c}{c_m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left[\operatorname{erf} \left\{ k_z \left(1 - \frac{2x}{x_0} \right) \right\} + \operatorname{erf} \left\{ k_z \left(1 + \frac{2x}{x_0} \right) \right\} \right] \times \operatorname{erf} \left(k_z \cdot \frac{y_0}{x_0} \right) \times \operatorname{erf} \left(k_z \cdot \frac{2}{x_0} \right)}{\operatorname{erf} (k_m) \times \operatorname{erf} \left(k_m \cdot \frac{y_0}{x_0} \right) \times \operatorname{erf} \left(k_m \cdot \frac{2}{x_0} \right)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、\$k_z = \sqrt{x_0^2 \cdot \bar{w}_0 / 16 D z}\$、\$k_m = \sqrt{x_0^2 \bar{w}_0 / 16 D z_m}\$ である。上式で \$x=0\$、\$z=0\$ の位置の濃度を \$c_0\$ とすると次式に変換される。

$$\frac{c_m}{c_0} = \operatorname{erf} (k_m) \times \operatorname{erf} \left(k_m \cdot \frac{y_0}{x_0} \right) \times \operatorname{erf} \left(k_m \cdot \frac{2}{x_0} \right) \quad \dots\dots\dots (9)$$

本実験では \$y_0 \gg x_0\$ であることを考慮して上式の計算

値を示したのが図-7である。ただし撮影濃度に対応するので左辺は \$q_m/q_0\$ に書き直した。また、この式に関連させて \$q_m\$ と \$z_m\$ の関係を実験によって示したのが図-8である。図によると slit 近傍ほど拡散は大きいことがわかる。

c) 底面の濃度分布

図-9 に示した底面格子 (\$\Delta x \times \Delta y\$) 内の着底粒子数

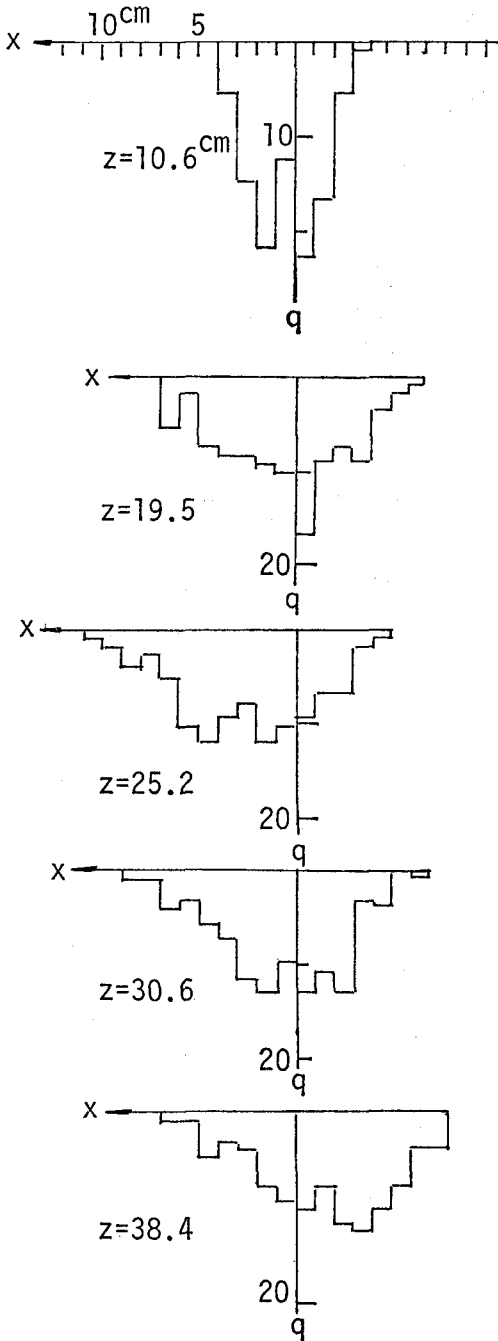


図-6 進行波による分布 (Nylon)

M は次式に式 (7) の濃度 c を代入して得られる。

$$M = \left\{ \int_{x-dx/2}^{x+dx/2} \int_{y-dy/2}^{y+dy/2} \int_{-h}^{\infty} c(x, y, z_1, t) \times dx dy dz_1 \right\}_{t=h/\bar{w}_0} \dots\dots\dots (10)$$

もちろん、すべての粒子が $t=\bar{w}_0$ で同時には着底しないが瞬間放出落下の場合は近似的に上式は成立すると考えられる。erf(φ) は $\Delta\varphi$ の範囲で直線的に変化すると

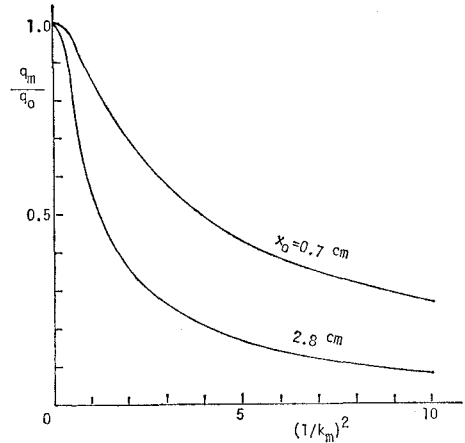


図-7 鉛直濃度分布 (計算値)

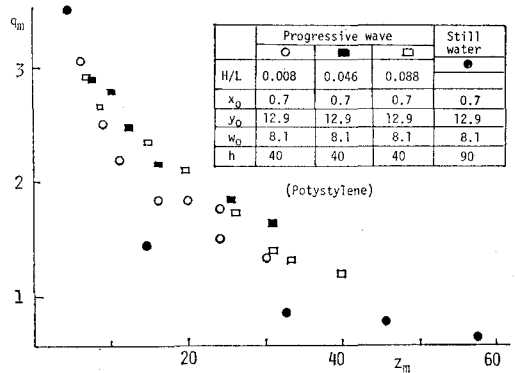


図-8 鉛直濃度分布 (撮影濃度)

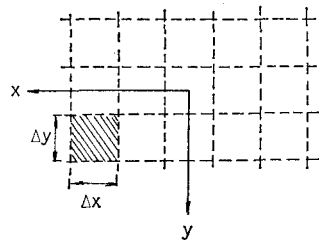


図-9 底面格子

仮定し、 $M=c \times \Delta x \times \Delta y$ とすると式 (3) は次式になる。ただし、 $k_h = \sqrt{x_0^2 \cdot \bar{w}_0 / 16 D h}$ 、 $D = D_x = D_y = D_z$ とおいた。

$$\begin{aligned} \frac{c}{c_0} = & \frac{1}{8} \left[\operatorname{erf} \left\{ k_h \left(1 - \frac{2x}{x_0} \right) \right\} + \operatorname{erf} \left\{ k_h \left(1 + \frac{2x}{x_0} \right) \right\} \right] \\ & \times \left[\operatorname{erf} \left\{ k_h \frac{y_0}{x_0} \left(1 - \frac{2y}{y_0} \right) \right\} \right. \\ & \left. + \operatorname{erf} \left\{ k_h \frac{y_0}{x_0} \left(1 + \frac{2y}{y_0} \right) \right\} \right] \\ & \times \int_{-h}^{\infty} \left[\operatorname{erf} \left\{ \frac{2k_h(1+z_1)}{x_0} \right\} - \operatorname{erf} \left\{ \frac{2k_h \cdot z_1}{x_0} \right\} \right] dz_1 \end{aligned} \dots\dots\dots (11)$$

$x=0$ の位置の底面濃度を c_m とおくと次式が得られる。

$$\frac{c}{c_m} = \frac{1}{2 \cdot \operatorname{erf}(k_h)} \cdot \left[\operatorname{erf} \left\{ k_h \left(1 - \frac{2x}{x_0} \right) \right\} + \operatorname{erf} \left\{ k_h \left(1 + \frac{2x}{x_0} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (12)$$

図-10 の実線は式 (12) で計算したものであり、 x 点の濃度 c の測定値と対比させて示してある。図の中で

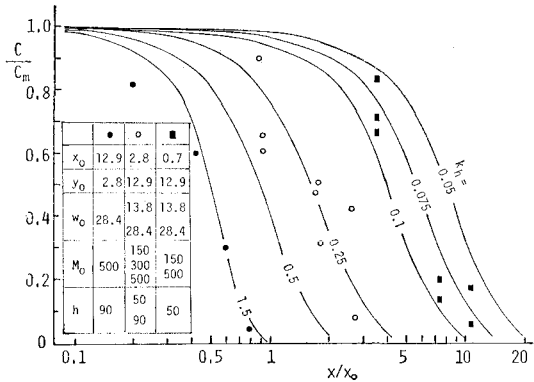


図-10 底面濃度分布

M_0 は粒子の落下総個数、 w_0 は単一粒子の沈降速度、 h は落下水深(静水実験だけ)である。

(4) 分散について

計算を簡単にするため点源瞬間放出と仮定し、 x 方向の分散について考えてみる。分散を V_x とすると式 (5) を次式に示した濃度 c に代入して積分すると次式になる。

$$V_x = \left\{ \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c x^2 dx dz_1 \right) / \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c dx dz_1 \right) \right\} = 2Dt = 2Dz/\bar{w}_0 \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 $D_x = D_y = D_z = D$ と仮定した、標準偏差は $\sigma \sqrt{V_x}$ としての σ と z の関係を示すと図-11, 12 になる。図中の記号はこれまでのものと同じである。図によると粒子の散らばり変化率は slit 近傍で非常に大きく、

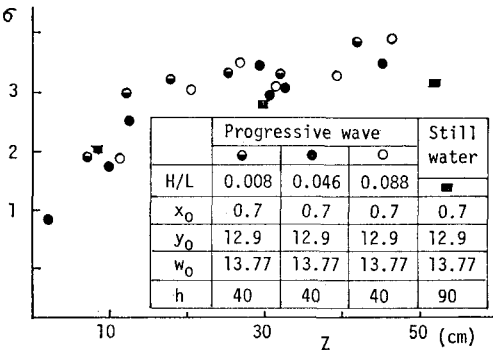


図-11 標準偏差 (Nylon)

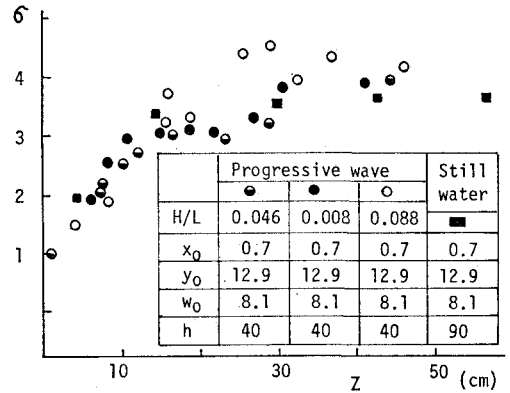


図-12 標準偏差 (polystyren)

ある程度落下するとほとんど一樣になる。これは噴流拡散の効果を表わしていると思われる。静水と波動の場合では後者による散らばりが大きくなる傾向がみられる。また波形勾配の大きい程散らばるようである。今後の課題としては水中任意点の容積濃度の評価方法の検討が必要である。

5. 結 論

静水および進行波中での固体粒子群の自由落下による散らばりに関する実験結果を要約すると次のようになる。

- ① 粒子群の平均沈降速度は単一粒子の場合より若干遅くなる。
- ② 比重が大きい粒子は投入地点の鉛直線上に集中して落下する傾向がみられる。
- ③ 進行波の中では粒子群が投入地点の鉛直線上を波の進行方向の前後に揺れながら落下する。
- ④ 鉛直方向の散らばりの変化率は slit 近傍で大きく、ある落下地点以降は一樣化する傾向がある。

参 考 文 献

- 1) 箭内寛治: 砂および礫の水中落下の散らばりに関する研究, 土木学会論文集, 第69号, 1960.
- 2) 小川 元・竹内益雄: 土捨船による投棄土砂の分散, 土木学会論文報告集, 第161号, 1969.
- 3) Tawatchai, T.: Gravitational Convection, thesis No. 336, Asian Institute of Technology, Thailand, 1970.
- 4) Alger, G. R. and Simons, D. B.: Falling Velocity of Irregular Saped Particles, Jour. of Hydraulics Div., Proc. ASCE, 1968.
- 5) 吉川秀夫・福岡捷二・吉川勝秀: 流体と固体粒子の相互作用に関する研究, 土木学会論文報告集, 第260号, 1979.
- 6) 河野二夫・佐藤 勝: 進行波の中の固体粒子の落下運動, 第26回海講演集, 1979.
- 7) 大井鐵郎: 偏微分方程式とその応用, 応用数学講座, 第9巻, コロナ社, 1957.
- 8) 本間 仁: 水理学, 丸善, 1967.