

Empirical eigenfunction によるエッジ波の解析

加藤 一正*・灘岡 和夫**・田中 則男***

1. はじめに

海浜流, サーフビート, リズミック地形等との関連において, 海岸工学における重要性が認識されつつあるエッジ波は, 沿岸部にエネルギーがトラップされて生じる波であり, その振幅が汀線位置で最も大きく, 沿岸方向に周期的に変動し, 沖方向に指数関数的に減少するという特徴を有する.

エッジ波の理論的取り扱いには, モード 0 のストークスエッジ波, 長波近似, 一様勾配上の微小振幅波近似, 指数型海底地形の長波近似, 有限振幅エッジ波理論等がある¹⁾. これらの理論によって明らかにされたエッジ波の種々の特性のうち特に興味あることは, 沿岸部にエネルギーがトラップされてエッジ波が生じるか, あるいはエネルギーが沖へリークしてしまうかの限界状態の存在であり, このときの周波数を *Cut-off frequency* と称している. さらに, Ursell によると, エッジ波はこの *Cut-off* モードにおいて共振する²⁾. この共振のため, 実際の海岸では周波数選択の機構が働き, モードごとに特定周波数のエッジ波が存在することになる.

エッジ波は, 現地において単独で存在することはなく, 入射波・碎波・サーフビート・反射定常波等と混在している. このため, 現地観測データの解析では, これら諸現象が含まれる測定値のなかから, 既応の理論に基づき, 各地点の水位変動・流速変動の位相差, および沖方向への振幅の減衰特性を検討することにより, エッジ波成分を分離することが重要である. 例えば, Huntley & Bowen³⁾ は 1 台の電磁流速計, Huntley²⁾ は 3 台の電磁流速計, 佐々木他⁴⁾ は 11 地点の波のデータからエッジ波を分離した. しかし, 水口⁵⁾が指摘するように, 従来の報告は『二重の検証 (例えば, 岸沖および沿岸方向の両方向の特性の検証) に欠けており, 確定的な結果とは言い難い』.

本論文は, 汀線付近の波の遡上線の沿岸方向の変化を, Empirical eigenfunction によって解析することにより,

大港湾近傍のエッジ波をとらえ, 同時に測定した 3 台の電磁流速計, 8 台の波高計データのスペクトル解析の結果からそれを確認したものである.

2. 波の遡上線の解析

汀線では, エッジ波の振幅が最大になるのに対し, 入射波の振幅は最小になるので, 汀線付近の波の遡上にはエッジ波の影響が顕著に現われる. この考えに基づき, Guza & Inman⁵⁾ は実験室で遡上の最大値と最小値からエッジ波の振幅を測定している.

一般に, 現地において種々のモード・周期のエッジ波が存在するとき, ある瞬間の波の遡上位置はこれらの波が重なり沿岸方向に不規則な変化をするであろう. このとき, 大港湾のような沿岸方向に明確な境界が存在すると, その近傍のエッジ波は重複波になるので, ある瞬間の波の遡上位置の沿岸方向の不規則性には, エッジ波の位相の影響も含まれる.

今, 沿岸方向等間隔に設定した測線を順番に 1, 2, ..., n_x とし, x 番目の測線における任意の時刻 t の波の遡上位置を $R_{x,t}$ で表わす. ただし, $R_{x,t}$ は各測線の遡上位置の平均位置からの水平距離であり,

$$\bar{R}_x = \frac{1}{n_t} \sum_{t=1}^{n_t} R_{x,t}, t=0 \dots\dots\dots (1)$$

の関係が成立する. また, t は任意の測定時刻を示し, 1 と n_t (全測定回数) の間の整数である. このように定義すると, 任意時刻 t における波の遡上位置の沿岸方向分布特性は, ベクトル

$$\mathbf{R}_t = (R_{1,t}, R_{2,t}, \dots, R_{n_x,t})^T \dots\dots\dots (2)$$

で表現される.

ここで, 任意の時刻の $\mathbf{R}_t$ には, m 組の基本的な成分すなわちエッジ波が種々の重み付きで重なり合って現われていると仮定し,

$$\mathbf{R}_t = \sum_{n=1}^m C_{n,t} \cdot \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_t, \quad (t=1 \sim n_t) \dots\dots (3)$$

とおく. $\mathbf{e}_n$ はすべてあるいは一部の $\mathbf{R}_t$ に含まれる共通成分 (因子) であり, $\mathbf{e}_t$ は任意の時刻 t の測定誤差や, 影響の小さい成分を含むものである. 測定値から式 (3) のモデル構造の推定を行うものを因子分析という.

* 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所水工部主任研究官
 ** 正会員 工修 運輸省港湾技術研究所水工部漂砂研究室
 *** 正会員 運輸省港湾技術研究所水工部漂砂研究室長

しかし、式(3)の右辺は、測定可能な変量も既知の定数も含まず、まったく未知のものばかりであるので、このモデル構造を推定する基準は一義的に定められない状況にあり、種々様々な手法が提案されている⁶⁾。

このうち、 $m=n_x$ 、 $e_t=0$ としたものが主成分分析であり、測定値の相関行列から出発して、 $C_{n,t}$ 、 e_n が計算機を利用して求まる。ここでは、測定値がすべて長さであるので、この分析は Empirical eigenfunction の解析⁷⁾に相当する。求まる e_n は、互いに無相関な直交ベクトルである。Empirical eigenfunction の解析では、式(3)の e_t が e_n の中に含まれるので、 e_n の寄与の小さいもの(計算される固有値 λ_n の小さいもの)は、物理的解釈の対象からはずされる。なお、以下で利用する次の関係式

$$\lambda_n = \frac{1}{n_x \cdot n_t} \cdot \sum_{t=1}^{n_t} C_{n,t}^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

が、理論展開で導ける。

3. 現地観測データの解析

汀線位置の波の遡上特性からエッジ波をとらえるために、1979年9月18日に図-1に示す仙台新港南海岸で現地観測を実施した。図中には、調査対象海域の海底地形(D.L.基準)、波高計・電磁流速計の設置位置も合わせて示されている。波の測定方法は、各地点に設置したポールを陸上から16mmメモモーションカメラで1コマ/秒の撮影をするものである。観測時の沖波(水深D.L. 20m)は、 $H_{1/3}=0.68$ m、 $T_{1/3}=6.8$ secで波向はほぼSEであった。

波の遡上位置測定のための測線は、防波堤基部の捨石地域を避けて沿岸方向に5m間隔の37($=n_x$)測線と

した。この測線上の R_t (式(2))は、14時24分からほぼ1時間(満潮時)に、上空約500mに浮揚した気球に搭載したカメラから約30秒(最初の19枚)と約60秒(後の49枚)間隔で撮影した計68枚の写真のうち、対象とする汀線が撮影されている66枚($=n_t$)から0.5mの精度で読み取られた。各測線の $\bar{R}_x=0$ (式(1))の位置を連ねたものは、測定時の汀線とみなされ、図-1に破線で記入されている。この汀線がなめらかであることから、汀線付近の地形が単純であることがわかり、したがって、 R_t の沿岸方向の変化には地形の影響がほとんどないとしてよい。なお、ハンドレベルで測定した前浜勾配は1/6~1/7程度である。

この測定値が、Empirical eigenfunction の解析に使用された。得られた固有値・寄与率、eigenfunctionが、寄与率1%以上について、それぞれ表-1、図-2に示されている。図-2によると、各 e_n は沿岸方向に正弦的(e_1, e_2 は、正弦波の一部)に変動しており、また捨石部を図中点線で示すように防波堤位置まで外そうすると、各 e_n は防波堤位置においてはほぼ腹になっていると見なすことが許されよう。このことから、波の遡上位置の沿岸方向変化特性は、防波堤位置で腹となり沿岸方向に周期的に変動する種々の波長の重複波を重ね合せたものとしてとらえられる。なお、図から読み取れる e_n の沿岸方向の波長(表-1)は、 $e_1, e_2, \dots$ の順に短くなる。

さて、海底断面が $h=h_0(1-\exp(-\alpha x))$ のとき、重複エッジ波は Ball の長波近似理論¹⁾より、次式で表わされる。

$$\eta_n = \eta_*(x) \cdot \sin k_n y \cdot \sin \sigma_n t \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} \eta_*(x) &= a_n \exp(-p\alpha x) \\ &\times F(-n, n+2p+1; 2p+1; \exp(-\alpha x)) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$p^2 = (k_n/\alpha)^2 - \sigma_n^2/g\alpha^2 h_0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$(k_n/\alpha)^2 = (p+n)(p+n+1) \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 n : モード、 a_n : 振幅、

表-1 固有値、寄与率、エッジ波の波長・周期

n	λ_n	寄与率(%)	波長(m)	周期(秒)
1	4.266	50.7	420	60.0
2	2.181	25.9	280	40.0
3	0.722	8.6	162	23.1
4	0.358	4.3	115	16.4
5	0.218	2.6	90	12.9
6	0.177	2.1	82.5	11.8
7	0.093	1.1	58.5	8.4

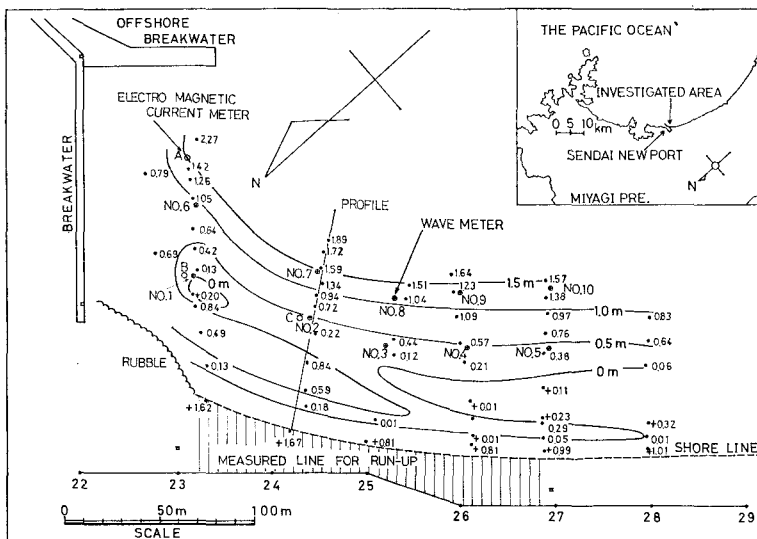
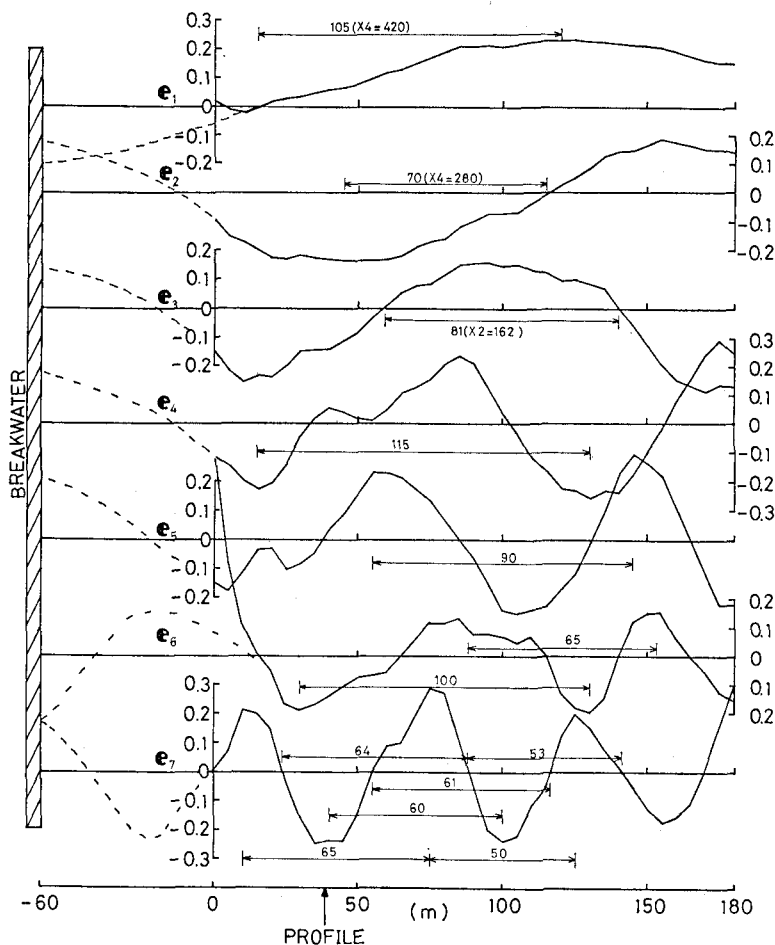


図-1 調査対象海岸の深浅図 (D.L. 基準)

図-2 Empirical eigenfunction ($e_1 \sim e_7$)

σ_n : 角振動数, k_n : 沿岸方向波数, F : 超幾何関数である. 式(7), (8)は p を媒介変数とした分散関係式である. 限界条件は式(6)より $p=0$ で与えられ, 角振動数と波数についての等価な式

$$\sigma_n = \alpha \sqrt{n(n+1)} g h_0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$k_n = \alpha \sqrt{n(n+1)} \quad \dots\dots\dots (10)$$

が得られる.

図-1に示す測線の海底断面は, 図-3に示すように $h=5.0(1-\exp(-0.013x))$ で近似されうる. そして, 図-4は, $\alpha=0.013$ としたときの式(10)を図示したものであり, また図中には, 表-1の波長から計算される波数が $e_1, e_2, \dots$ の順にモード 1, 2, $\dots$ としてプロ

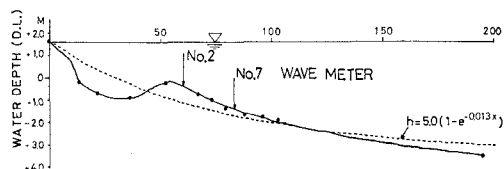


図-3 海底断面

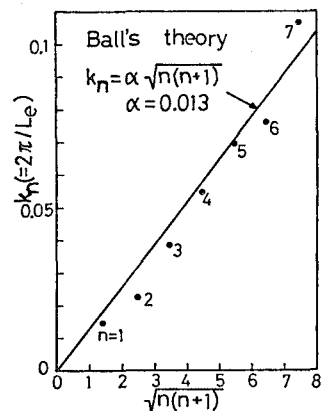


図-4 波数とモードの関係(限界状態)

ットされている. 図より, e_n は限界状態のモード n のエッジ波に対応したものであることがわかる.

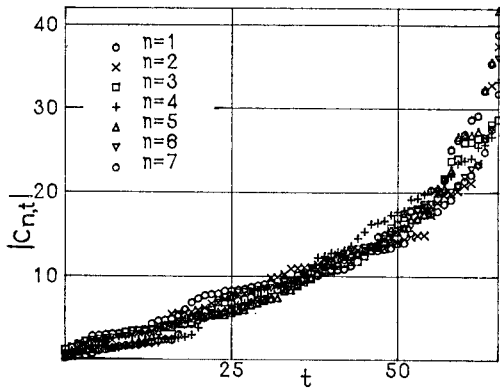
本海岸の限界状態のエッジ波周期は, 表-1の波長を用いて, 式(9), (10)から計算される. その結果が, 表-1にまとめられている. 計算されたエッジ波の周期は, 空中写真撮影の時間間隔(全体の約2/3が約60秒間隔で撮影)以下であり, したがって $C_{n,t}$ の時間変化から e_n の時間についての周期性を検討することはできない.

むしろ, 波の遡上位置を読み取った各時刻は, モード数の大きいエッジ波の位相に対してランダムな状態にあると考えられ, また, エッジ波の周期の計算には, 長波近似, 海底を指数関数で近似したこと等による誤差が含まれることを考えると, モード数の小さいエッジ波の位相に対しても同様な状態が考えられよう.

そこで, まず, 各 n について $C_{n,t}$ の絶対値 ($|C_{n,t}|$) の小さいものから順番に $t=1, 2, \dots, n_t$ と改める. 図-5は, 横軸を新しい t として, $|C_{n,t}|$ を各 n ごとにプロットしたものである. ただし, $n \geq 2$ については, t についての $|C_{n,t}|$ の和がそれぞれ $n=1$ のときの和に等しくなるように定数をかけて規準化してある. 図によると, $|C_{n,t}|$ が t とともに増加する特性は n に関係ない. すなわち, 各モードのエッジ波の遡上は, 幾何学的相似であるとみなし

$$|C_{n,t}| = a_n \cdot f \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n_t} \left(t - \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (t=1, \dots, n_t) \quad \dots\dots\dots (11)$$

とおく. ここに, a_n はモード n のエッジ波振幅, f は

図-5 Empirical eigenfunction の係数 ($|C_n, t|$)

週上特性を表わす周期関数で、1/4 周期で定義されるようなものである。式 (4), (11) より

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{1}{n_x \cdot n_t} \sum_{t=1}^{n_t} C_{n,t}^2 = \frac{1}{u_x \cdot n_t} \sum_{t=1}^{n_t} |C_{n,t}|^2 \\ &= a_n^2 \left\{ \frac{1}{n_x \cdot n_t} \sum_{t=1}^{n_t} f^2 \right\} \propto a_n^2\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(12)$$

となる。次に 図-6 は、縦軸に λ_n の平方根、横軸にエッジ波の波数 ($2\pi/\text{波長}$) (表-1) をプロットしたものであり、データは -1 乗の直線上によく乗っている。このことから

$$\sqrt{\lambda_n} \propto k_n^{-1} \quad \dots\dots\dots(13)$$

の関係が成立する。したがって、エッジ波の振幅は、式 (10), (12), (13) より、

$$a_n \propto k_n^{-1} = (\alpha \sqrt{n(n+1)})^{-1} \quad \dots\dots\dots(14)$$

となり、各モードの振幅は各モードの波数に逆比例する。この結果は、Huntley²⁾の示した『 a_n はモードにかかわ

らずほぼ一定』と異なる。なお、厳密には、 e_n の振幅 (図-2) も考慮されなければならないが、 e_n の振幅は 0.2 前後でほぼ一定であるので、ここでは考慮していない。

図-2 より重複エッジ波の訂線における節の位置が決定され、それを訂線に直角に沖方向に延長すればエッジ波の沿岸方向節線 (節を連ねた線) になる。一方、沖方向の節線の位置は、式 (6) で $p=0$ において超幾何関数が 0 となるところである。図-7 は、その結果をモード 4 までについて示したものである。同図には、波高計 (黒丸 1~10)、電磁流速計 (白丸 A~C) の位置も示されている。

図-8 は、沖波と砕波帯近傍の波 (No. 5, 10 は撮影できなかった) のパワースペクトルである。16 mm フィルムからの波の読み取りには、精度上の問題点があり、またスペクトル解析では分解能を向上させるために自由度が犠牲になっているので、定量的な議論は避ける。図-7 との対比で 図-8 を検討すると、まずモード 1 については、節線が No. 1~No. 4 付近に存在するので、節線から離れている No. 8, 9 のエネルギーが大きくなる。この傾向は、図-8 に示した Ball の理論で予測される位置より若干低周波数側にシフトしたところに認められる^{2),4)}。モード 2 では、節線的位置よりエネルギーピークの期待される場所は No. 2, 7, 4 であり、

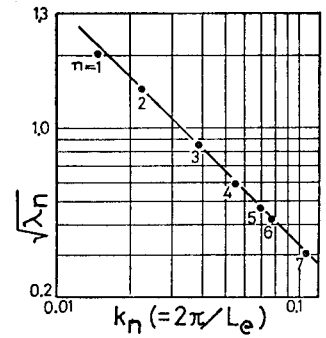
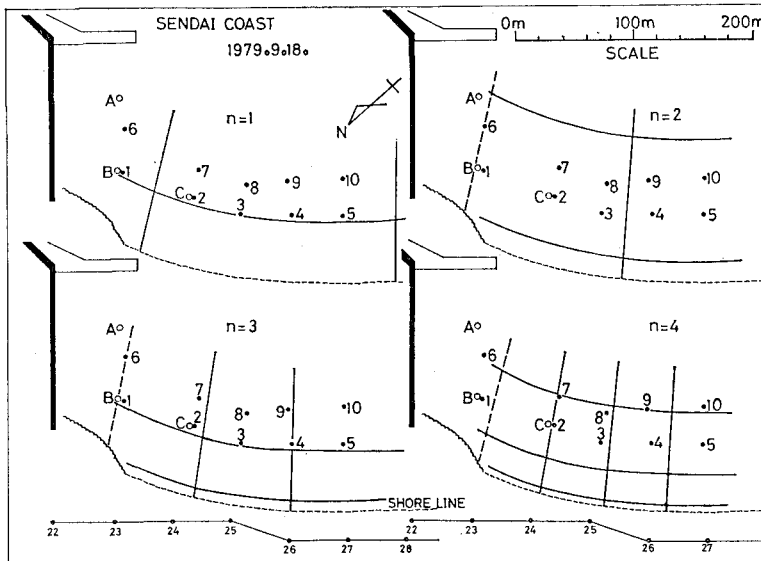
図-6 固有値 (λ_n) と波数の関係

図-7 重複エッジ波の節線 (モード 1~4)

図-8 で確認される。モード 3 では、No. 8 の地点だけがエッジ波の腹であるため、図-8 において No. 8 だけに際立ったピークが存在する。モード 4 では、どの地点も節線の近くに位置し、顕著なピークが認められない。なお、理由は不明であるが、沖波のこれらのモードの周波数に対応した位置で、モード 6 を除き、エネルギーがほぼ負のピークを示している。

図-9 は、C 地点の底面上 23 cm で測定された流速の岸沖 (U)、沿岸 (V) 方向成分のパワースペクトルである。重複エッジ波の流速は節線上で大きく (ただし、節線の交点では流速が 0)、腹の部

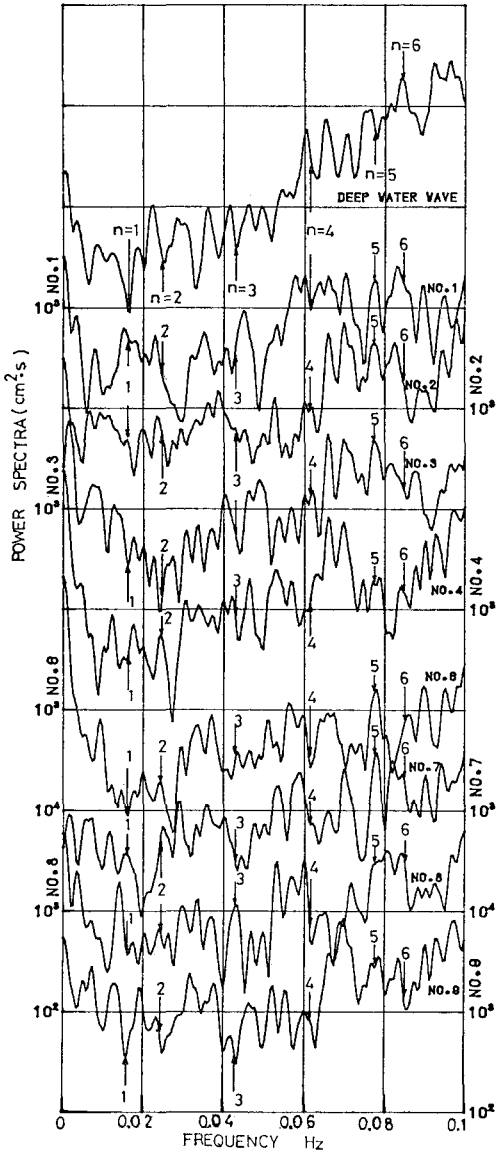


図-8 波のパワースペクトル ($N=2048$, $\Delta t=1$ 秒, FFT)

分で 0 になることを考慮すると、図-7 よりモード 1, 4 で流速のエネルギーが大きくなり、モード 2 (腹), 3 (節線の交点近傍) で小さくなるが予測される。図-9 には、モード 1 について Ball の理論と若干のずれはあるものの、全体にこの傾向が認められる。ただし、 $U \cdot V$ のエネルギー比は、流速計設置方向の測定精度および解析時の座標のとり方に誤差が含まれるためか、理

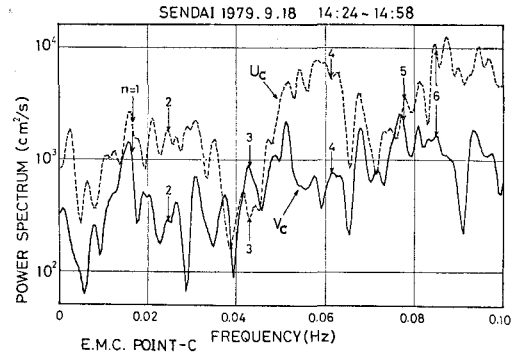


図-9 C地点の流速パワースペクトル ($N=2048$, $\Delta t=1$ 秒, FFT)

論との一致性がよくない。

なお、A・B地点の流速の解析や、流れ・波のクロススペクトル解析は別の機会に報告する。

4. おわりに

現地における波の遡上の沿岸方向分布を Empirical eigenfunction で解析することにより、Ball の理論の限界状態に対応する重複エッジ波がとらえられた。さらに現地観測を継続し、エッジ波の振幅に関する関係式(14)を検証し、比例定数を決定したい。

最後に、現地観測では、海岸環境工学研究センターから電磁流速計、16 mm メモーションカメラの御配慮を受け、また運輸省横浜調査設計事務所と塩釜港工事事務所の各位から多大な協力を受けたことを記し謝意を表します。

参考文献

- 1) 水口 優: 海岸工学におけるエッジ波, 第 15 回夏期研修会, B, 土木学会, pp. B-4-1~B-4-20, 1979.
- 2) Huntley, D. A.: Long-period waves on a natural beach, J.G.R., Vol. 81, No. 36, pp. 6441~6449, 1976.
- 3) Huntley, D. A. and A. J. Bowen: Field observation of edge waves, Nature, Vol. 243, pp. 160~162, 1973.
- 4) 佐々木民雄・堀川清司・久保田 進: 海浜流に関する研究(第5報)―海浜流の長周期変動―, 第24回海講, pp. 586~590, 1977.
- 5) Guza, R. T. and D. L. Inman: Edge waves and beach cusps, J.G.R., Vol. 80, No. 21, pp. 2997~3012, 1975.
- 6) 奥野忠一・芳賀敏郎・久米 均・吉沢 正: 多変量解析法, 日科技連出版社, 430 p., 1971.
- 7) Winant, C. D., D. L. Inman and C. E. Nordstrom: Description of seasonal beach change using empirical eigenfunction, J.G.R., Vol. 80, No. 15, pp. 1979~1986, 1975.