

波・流れ共存時の底面摩擦に関する実験

田 中 仁*・首 藤 伸 夫**

1. はじめに

河口流, 沿岸流, 離岸流などと波が共存する場合の, 砂移動の実態を明らかにする目的で研究をおこなった。波と流れの共存時の摩擦係数については, これまでに, Grant・Madsen¹⁾の理論的研究があるが, 実用上, 使い易いものとは言い難く, また実証的な裏付けに乏しい。

本論文では, 粗面乱流時の波・流れ共存場における摩擦係数を理論的に導き, 実測値との比較をおこなった。さらに, 流速分布, 底質移動限界, 漂砂量などの観点から, 導いた理論式の妥当性を検討した。

2. 共存時の摩擦係数に関する理論解

梶浦²⁾にならい, 全水深にわたって渦動粘性係数を次式で与える。

$$K_y = \kappa \hat{u}_{cw}^* y \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで, $\hat{u}_{cw}^*$: 底面摩擦速度の最大値 ($\hat{u}_{cw}^* = \sqrt{\tau_{om}/\rho}$), κ : カルマン定数, y 軸は底面から上向きにとる。

まず, 流れ (時間的に不変な部分) について考える。

$$\tau_c = \rho u_c^{*2} = \rho \kappa \hat{u}_{cw}^* y \frac{\partial u_o}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (2)$$

故に

$$u_o = \frac{u_c^{*2}}{\kappa \hat{u}_{cw}^*} \ln \frac{y}{y_o} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで, y_o : 粗度長さ (ニクラゼの相当粗度 $k_s = 30y_o$), 添字 c は, 流れに関する諸量を表す。式 (3) は, その形から明かなように, 波と流れの相互干渉の影響を $\hat{u}_{cw}^*$ の形で含んでいる。式 (3) 中の u_c^* は, 次式の様に, 平均流速 $\bar{u}_o$ から求まる。

$$u_c^{*2} = \frac{\kappa \hat{u}_{cw}^* \bar{u}_o}{\ln(y_h/y_o) - 1} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに, y_h : 水深

次に周期的な部分について考える。基本方程式として線型化した2次元境界層方程式を用いる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_w - U_w) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_w}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \kappa \hat{u}_{cw}^* y \frac{\partial u_w}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで, u_w : 水平流速, U_w : 境界層外縁流速である。式 (5) で $U_w - u_w = v = \hat{v} e^{i\omega t}$ とおいて, 代入すれば

$$y \hat{v}'' + \hat{v}' - i c \hat{v} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここに $c = \sigma / (\kappa \hat{u}_{cw}^*)$ である。式 (6) で $z = 2e^{-i\pi/4} \sqrt{cy}$ と変数変換すれば0次のベッセルの微分方程式を得る。これを, 2つの境界条件, すなわち, $y = y_o$ で $u_w = 0$, $y = y_h$ で剪断力がゼロ, のもとで解けば, 解は次の様に表わされる。

$$u_w = \hat{U}_w \text{Real} \left[\left\{ 1 - \frac{N_1(z_h) J_0(z) - J_1(z_h) N_0(z)}{N_1(z_h) J_0(z_o) - J_1(z_h) N_0(z_o)} \right\} e^{i\omega t} \right] \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで, $z_h = 2e^{-i\pi/4} \sqrt{cy_h}$

$$z_o = 2e^{-i\pi/4} \sqrt{cy_o}$$

J_0, J_1 : 0次, および1次のベッセル関数

N_0, N_1 : 0次, および1次のノイマン関数

Real は実数部をとることを表わし, U_w の振幅 $\hat{U}_w$ は, ポテンシャル理論より次式で表わされる。

$$\hat{U}_w = \frac{\pi H/L \cdot (L/T - \bar{u}_o)}{\sinh(2\pi y_h/L)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし, $\bar{u}_o$ の符号は順流を正に, 逆流を負にとっている。共存場の流速は, $u = u_o + u_w$ で与えられる。底部付近においては, 対数則に従い, constant stress layer が存在すると思われる。従って, 底部剪断力は式 (9) で表わされる。

$$\begin{aligned} \tau_o &= \rho \kappa \hat{u}_{cw}^* y \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=y_o} \\ &= \rho u_c^{*2} + \rho \sqrt{\kappa \hat{u}_{cw}^* \sigma y_o} \hat{U}_w \text{Real} \{ A e^{i(\omega t + \theta)} \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで, A, θ は $e^{-i\pi/4} \frac{N_1(z_h) J_1(z_o) - J_1(z_h) N_1(z_o)}{N_1(z_h) J_0(z_o) - J_1(z_h) N_0(z_o)}$ の絶対値, および偏角である。従って, 式の最大値を考えて

$$\tau_{om} = \rho u_c^{*2} = \rho u_c^{*2} + \rho \sqrt{\kappa \hat{u}_{cw}^* \sigma y_o} \hat{U}_w A \quad \dots\dots\dots (10)$$

式 (10) に式 (4) を代入し, さらに両辺を $\hat{u}_{cw}^* \hat{U}_w$ で割る。

$$\frac{\hat{u}_{cw}^*}{\hat{U}_w} = \frac{\kappa}{\ln(y_h/y_o) - 1} \cdot \frac{\bar{u}_o}{\hat{U}_w} + \sqrt{\frac{\kappa \sigma y_o}{\hat{u}_{cw}^*}} A \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで, 共存場の摩擦係数 f_{ow} を次式で定義する。

* 学生会員 東北大学大学院工学研究科
** 正 会 員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

$$\tau_{0m} = \rho \hat{u}_{cw}^{*2} = \frac{\rho}{2} f_{cw} \hat{U}_w^2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

従って、式(11)の左辺は $\sqrt{f_{cw}/2}$ となり、また右辺は、 y_h/y_0 , $\hat{u}_c/\hat{U}_w$, $\sigma y_0/\hat{U}_w$, および f_{cw} の関数となり、式(11)は、 f_{cw} に関する陰関数表示式であることがわかる。数値計算例を図-1, 2, 3に示した。さて、ここで、 $\hat{u}_c/\hat{U}_w \rightarrow 0$, および $\hat{u}_c/\hat{U}_w \rightarrow \infty$ における f_{cw} の振舞いについて考察する。図-1, 2, 3において、 $\hat{u}_c/\hat{U}_w = 0$ での f_{cw} の値をプロットしたのが図-4であり、梶浦³⁾, Jonsson⁴⁾, Riedel ら⁵⁾ が求めた振動流における摩擦係数と近い値を与えることがわかる。次に、 $\hat{u}_c/\hat{U}_w \rightarrow \infty$ の場合について考えると、対数則より容易に次式が求まる。

$$f_{cw} = \frac{2\kappa^2}{\{\ln(y_h/y_0) - 1\}^2} \left(\frac{\hat{u}_c}{\hat{U}_w} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (13)$$

図-1, 2, 3 の点線は、式(13)を表わし、 $\hat{u}_c/\hat{U}_w \rightarrow \infty$ の時、 f_{cw} が点線に漸近して行くことがわかる。

ところで、式(11)を用いて f_{cw} を求めるには、複素ベッセル関数の計算が必要となり、実用上、はなはだ不都合である。そこで、次の様にして、実関数による表示式を求める。一般に $|z_h| \gg 1$, $|z_0| \ll 1$ であるから、式(11)において、 $J_1(z_h)$, $N_1(z_h)$ を漸近展開式で置き換え、 $J_0(z_0)$, $N_0(z_0)$, $J_1(z_0)$, $N_1(z_0)$ を、級数展開式の始めの数項で近似する。若干の計算の後に、式(11)は、式(14)の様に実関数で表現される。

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{f_{cw}}{2}} = & \frac{\kappa}{\ln(y_h/y_0) - 1} \frac{\hat{u}_c}{\hat{U}_w} + \frac{\kappa}{\pi} \left\{ 0.25 \right. \\ & \left. + 0.101 \left(\ln \frac{\sigma y_0}{\hat{U}_w} - \frac{1}{2} \ln f_{cw} + 2.42 \right)^2 \right\}^{-1/2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

図-1, 2, 3 中の●印は、式(14)を用いて計算した f_{cw} の値を示しており、 $\hat{U}_w/\sigma y_0 \geq 50$ では、近似式を用いても十分の精度を得られることがわかる。また、式(14)で $\hat{u}_c = 0$ の時には、式(15)の様に變形でき、Jonsson⁶⁾ の摩擦係数に類似した式を得る。

$$\ln \frac{1}{4\sqrt{f_w}} + \frac{1}{1.77} \sqrt{\frac{1}{f_w} - 7.72} = \ln \frac{\hat{U}_w}{\sigma y_0} - 3.80 \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(15)による計算値を図-4に示した。

一方、 $\hat{U}_w/\sigma y_0 \leq 50$ における f_w はほぼ、式(16)で表わされるから、これをもとに共存場における摩擦係数として式(17)を得る。

$$f_w = 1.06 (\hat{U}_w/\sigma y_0)^{-0.547} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{f_{cw}}{2}} = & \frac{\kappa}{\ln(y_h/y_0) - 1} \frac{\hat{u}_c}{\hat{U}_w} \\ & + 0.728 f_{cw}^{-0.26} \left(\frac{\hat{U}_w}{\sigma y_0} \right)^{-0.408} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (17)$$

式(16), および式(17)による値をそれぞれ、図-4,

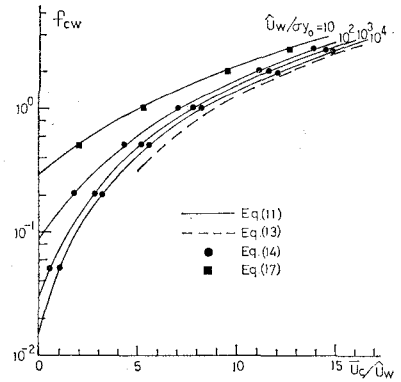


図-1 摩擦係数 ($\ln(y_h/y_0)=6.0$)

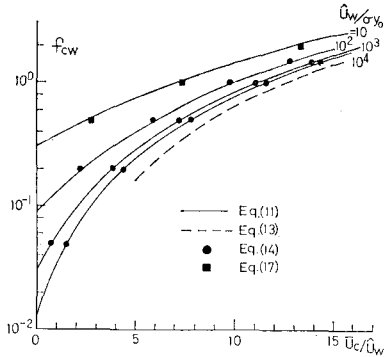


図-2 摩擦係数 ($\ln(y_h/y_0)=8.0$)

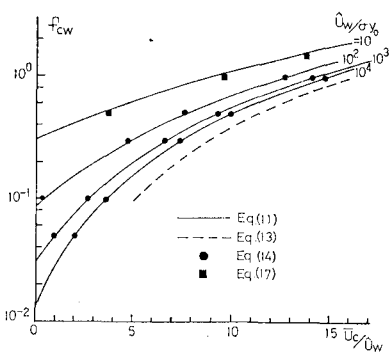


図-3 摩擦係数 ($\ln(y_h/y_0)=10.0$)

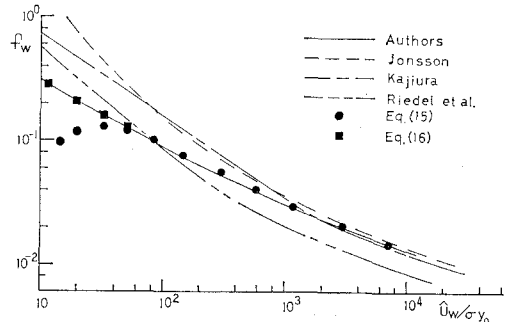


図-4 摩擦係数 (波のみ)

および、図-1, 2, 3 に示した。

また、波向線と流れが角度 φ をもって交わる時にも、同様な理論の展開により式 (18) を得、 $\varphi=0$ の時は確かに式 (14) と一致している。

$$\frac{f_{cw}}{2} = B^2 \left(\frac{\bar{u}_0}{\bar{U}_w} \right)^2 + 2BC \frac{\bar{u}_0}{\bar{U}_w} \cos \varphi + C^2 \quad \cdots (18)$$

ここで

$$B = \frac{\kappa}{\ln(y_h/y_0) - 1}$$

$$C = \frac{\kappa}{\pi} \left\{ 0.25 + 0.101 \left(\ln \frac{\sigma y_0}{\bar{U}_w} - \frac{1}{2} \ln f_{cw} + 2.42 \right)^2 \right\}^{-1/2}$$

3. 実験装置と方法

水路は幅 30 cm、深さ 30 cm、長さ 7 m で、側壁はガラス張りになっている。水路の下流端にフラップ式造波機を取り付け、水深 8~15 cm、流速 10~30 cm/s の流れに、周期 0.83, 1.04, 1.24 s、波高 1~3 cm 程度の波を逆行させた。水路床は固定床とし、ペンキで砂粒子をはり付けた。砂の諸元は、 $d_{50}=0.64$ mm、密度 2.59 g/cm³ である。水路のほぼ中央にサーボ式剪断力計を設置し、shear plate の表面にも上記の砂粒をはり付けた。出力は、ペン書きレクチグラフに描かせ、反射波が到達する以前の数値をデータ解析に用いた。なお、剪断力計のキャリブレーションは、振り子を用いておこない、静的・動的いずれの場合にも、十分に追従しうることを確認している。剪断力計の原理、性能に関する詳細は、文献 7) に譲る。

波動運動のもとでは、shear plate にはたらく力として、剪断力の他に圧力勾配による力が存在する。そこで、shear plate の上に、更にプレートをかぶせて、あらかじめ、圧力勾配による力のみを測定しておき、プレートがない場合の力との差をもって真の剪断力とした。

4. 実験結果と考察

(1) 底面剪断力

剪断力計により実際に測定した底面剪断力の最大値と、上で導いた摩擦係数を用いて求めた値とを比較したのが図-5 である。ただし、 f_{cw} を求める際、 $y_0=d_{50}/30$ としている。ここで問題となることは、測定範囲における流れの特性が粗面乱流に属しているか否かという点である。現在のところ、波と流れが共存する時の flow regime に関する判定基準は確立されていない。そこで、波だけのケースについて、Jonsson⁹⁾が提唱している判定基準によると、遷移領域にあたるのがわかった。従って、流れの影響を考えるならば、粗面乱流としても、ほぼ間違いないと思われる。故に、図-5 より、理論値と実測値は良く合うと判断して良からう。なお実測範囲は $\ln(y_h/y_0)=8.1\sim 8.7$ 、 $\bar{u}_0/\bar{U}_w=2.1\sim 8.6$ 、 $\bar{U}_w/\sigma y_0=200$

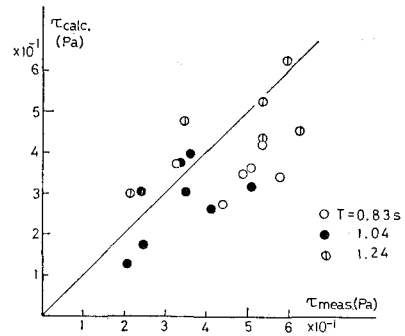


図-5 実測値と理論値の比較

~900 である。

樫木ら⁹⁾は、波と流れにより合成された水粒子速度 $\bar{u}$ に対して、底面剪断力を $\tau = \rho f |\bar{u}|^2$ と定義した時、剪断力の作用方向の考察から、 $\bar{u} = \bar{u}_w + 0.5\bar{u}_0$ となることを示した。樫木らの言う $\bar{u}_0$ と著者らの定義した $\bar{u}_0$ とは、必ずしも一致するとは言えない様であるが、ここでは等しいと仮定して、上記の係数 0.5 について考えてみる。式 (11) を変形すれば、 $\bar{u}_0$ にかかる係数は次式で表わされ、普遍定数ではないことがわかる。

$$\sqrt{\kappa \bar{u}_{cw}^* / \sigma y_0} / [A \{ \ln(y_h/y_0) - 1 \}] \quad \cdots (19)$$

著者らの実測範囲における式 (19) の値を実際に計算してみると、0.37~0.49 となり、樫木らの 0.5 とかなり近い値を得た。

(2) 流速分布

波と流れの共存場の流速分布に関しては、岩垣ら¹⁰⁾が昨年度の本講演会において報告している。そこで、式 (3) および式 (7) による理論値と彼らの実測値とを比較したのが図-6, 7 である。ただし、粗度長さは、流れのみの場合についての流速分布に対数則をあてはめて求めた。flow regime について疑問点が存在することは、(1) と同様であるが、理論値は実測値とかなり良く一致する。特に、流速の大きい位相において一致度が良い。これは、底面剪断力の最大値に対応する摩擦速度を含む

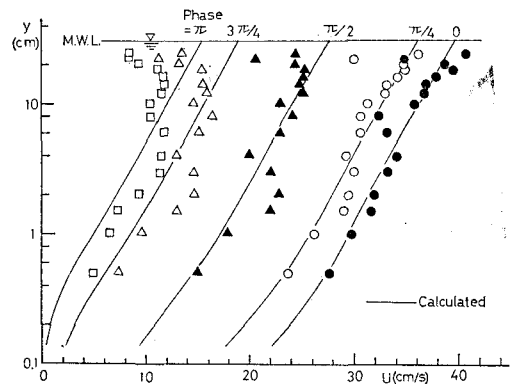


図-6 流速分布 (順流)

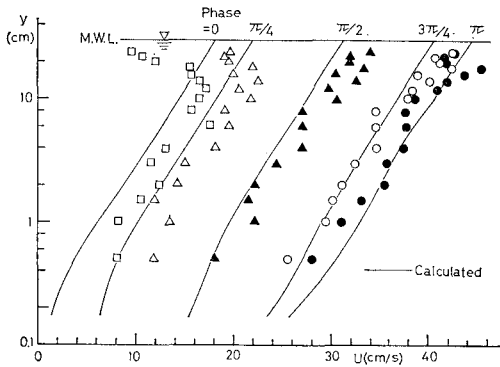


図-7 流速分布(逆流)

渦動粘性係数を仮定したためである。また、全水深にわたって、ほぼ一致していることから、式(1)の様な、かなり簡単な仮定を用いても、現象のかなりの部分を説明できることが示唆される。

岩垣らの測定したレイノルズ応力の鉛直分布と、著者らが求めた剪断力分布との比較も試みたが、後者は前者の数倍であり、定常流において見られる様な対応関係は見られなかった。非定常運動における乱れの定義には、未だ、一考の余地が残されていると思われる。

(3) 底質移動限界

著者らは、かつて、波と流れの共存時における底質移動限界に関する実験をおこなった¹¹⁾。そこで、今回、導いた摩擦係数を用いて、文献 11) の実測値をまとめたのが、図-8 である。ただし、Madsen・Grant¹²⁾ にならい、次式で定義されるシールズ数 ϕ_m とパラメータ S_* の関係で表示した。

$$\phi_m = \tau_{om} / \rho s g d, \quad S_* = d \sqrt{s g d} / 4\nu \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 d は砂粒径、 $s = (\rho_s / \rho) - 1$ は砂の水中比重、 ν は動粘性係数である。ただし、図中で、曲線は定常流における移動限界を表わし、細い縦線は、振動流による移動限界について、Madsen・Grant がまとめたデータのばらつきの範囲を表わす。共存場においては、定常流におけるより幾分、大きめの掃流力で移動を開始しており、波による移動限界と同様の傾向を示していることがうかがえる。ただし、著者らが実験に供した底質は一種類のみであり、今後、より多くの実験データの蓄積が望まれる。

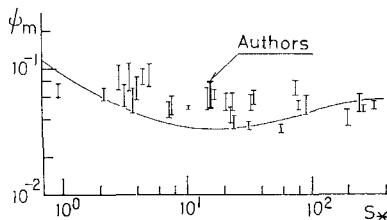


図-8 底質移動限界

(4) 漂砂量

Madsen・Grant¹³⁾ は、波による半周期平均漂砂量を算定する式として、次式を提案した。

$$\Phi = 12.5 \phi_m^3 \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 $\Phi = \bar{q} / w_0 d$ 、 $\bar{q}$: 半周期平均漂砂量、 w_0 : 沈降速度である。式(21)にならい、田中ら¹⁴⁾、Inman・Bowen¹⁵⁾、および Abou-Seida¹⁶⁾ のデータをまとめると、図-9 を得る。ただし、 τ_{om} は底質粒径を粗度 d として、摩擦係数 f_w を用いて求めた。データは、式(21)の近傍にちらばる。式(21)は、一方向流に対する漂砂量公式 $\Phi = 40 \phi^3$ に準定流の仮定を持ち込んで導かれることから考えると、波と流れ共存場における漂砂量公式は、式(22)の様に表わされることが予想される。

$$\Phi = \alpha \phi_m^3 \quad \dots\dots\dots (22)$$

ただし、 $12.5 \leq \alpha \leq 40$ であり、 α は波と流れの相対強度により決定される。

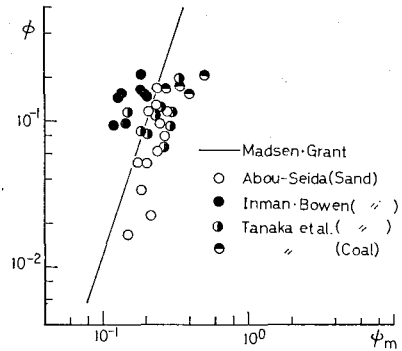


図-9 漂砂量

5. 結 論

(1) 式(1)の様な渦動粘性係数を仮定することにより、波と流れ共存時の摩擦係数が導かれ、それは3つのパラメータ、 y_h / y_0 、 $\sigma y_0 / \bar{U}_w$ 、および $\bar{u}_c / \bar{U}_w$ に支配される。また、相対的に、波が強い場合、および流れが強い場合を考えると、共存時の摩擦係数はそれぞれ、波のみの場合のそれ、および流れのみの時のそれに漸近していくことが認められ、合理的な形を有していると言える。

(2) ここで導いた摩擦係数を用いて計算した剪断力の実測値とかなり良く合う。また、これを用いることにより、流速、底質移動限界、漂砂量等の水理現象をうまく説明できる。

謝辞: 本論文の数値計算をおこなうにあたり、東北大学工学部土木工学科、後藤智明助手の助力を得た。本研究の一部は文部省科学研究費(代表者 東京大学 堀川清司教授)によっておこなわれた。ここに記して厚く謝意を表する。

参考文献

- 1) Grant, W. D. and O. S. Madsen: Combined waves and current interaction with a rough bottom, *J. of Geophys. Res.*, Vol. 84, pp. 1797~1808, 1979.
 - 2) Kajiura, K.: On the bottom friction in an oscillatory current, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, Vol. 42, pp. 147~174, 1964.
 - 3) Kajiura, K.: A model of the bottom boundary layer in water waves, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, Vol. 46, pp. 75~123, 1968.
 - 4) Jonsson, I. G.: Wave boundary layers and friction factors, *Proc. 10th Conf. on Coastal Eng.*, pp. 127~148, 1966.
 - 5) Riedel, H. P., J. W. Kamphuis and A. Brebner: Measurement of bed shear under waves, *Proc. 13th Conf. on Coastal Eng.*, pp. 587~603, 1972.
 - 6) 前出 4)
 - 7) 勝井秀博・花村哲也・田村滋美: 開水路における底面摩擦の直接測定について, 第 32 回年講概要集 (II), pp. 382~383, 1977.
 - 8) 前出 4)
 - 9) 樫木 享・出口一郎・樽野次雄: 波および沿岸流による底部摩擦に関する一考察, 第 25 回海講講演集, pp. 42~45, 1978.
 - 10) 岩垣雄一・浅野敏之: 波と流れの共存場における水粒子速度に関する研究, 第 26 回海講講演集, pp. 6~10, 1979.
 - 11) 田中 仁・首藤伸夫・青田茂雄: 波・流れ共存場における砂移動限界, 第 34 回年講概要集 (II), pp. 655~656, 1979.
 - 12) Madsen, O. S. and W. D. Grant: Quantitative description of sediment transport by waves, *Proc. 15th Conf. on Coastal Eng.*, pp. 1093~1112, 1976.
 - 13) 前出 12)
 - 14) 田中則男・小笹博昭・小笠原 昭: 波と流れによる砂移動に関する実験, 運輸省港湾技術研究所報告, 第 12 巻, 第 4 号, 1973.
 - 15) Inman, D. L. and A. J. Bowen: Flume experiments on sand transport by waves and currents, *Proc. 8th Conf. on Coastal Eng.*, pp. 137~150, 1963.
 - 16) Abou-Seida, M. M.: Sediment transport by waves and currents, *Tech. Rep. No. HEL-2-7*, Berkeley, Univ. of California, 1964.
-