

各種津波遡上計算法と波先端条件の比較

後 藤 智 明*・首 藤 伸 夫**

1. 序

近年、津波の挙動を予測するのに数値実験がきわめて有効であることが認識されるようになって来た。遡上計算についても例外にもれず、相田¹⁾、岩崎^{2),3)}、Houston⁴⁾、Hubberd⁵⁾、そして著者^{6),7)}等が種々の計算法を提案している。

しかし、各方法は波先端の条件の設定にまだ問題が残されていることも事実である。さらに、浅海域の津波の変形に関する問題、すなわち、津波の段波性の波への変形そして波形曲率にもとづく分散性の数値計算上の取り扱いなどについても、いろいろな問題が残されている。

本研究は、まずはじめに、代表的な計算法である相田¹⁾、岩崎³⁾そして著者^{6),7)}の各方法に焦点をあて、理論解^{8),9)}との比較を通じ各方法の波先端条件の違いによる計算精度について詳細に検討している。

次に、津波の段波性の波への変形そして波形曲率の効果による分散項の導入について、津波等の問題で比較的便利な staggered leap-frog 法 (以下 S.L.F. 法と記す) を用いた数値計算法を紹介する。

2. 各種津波遡上計算法の比較

波の遡上計算は表—1の6種に大別できる。表—1では各方法について、方程式、計算法、波先端の条件そして遡上形態等について比較をしている。表中構造物とあるのは、防波堤や防潮堤などの構造物の効果を数値計算に取り入れる際の難度について調べたものである。

一般的に津波の計算は比較的広範囲な平面地形を対象とした計算をする必要があり、比較的容易にしかも経済的に計算が可能となるものは表—1のなかでも相田¹⁾、岩崎³⁾そして著者^{6),7)} (線型) の3種である。ここではこの3種類の計算法を取り上げ解析解^{8),9)}との比較を通じ各方法の精度そして所定の精度を得るための条件について調べている。

遡上高と入射波高の比すなわち相対遡上高 R/H に関

表—1 各種津波遡上計算法の比較

方 法	支 配 方 程 式	計 算 法	波 先 端 の 条 件	遡 上 形 態	平 面 二 次 元 へ の 拡 張	構 造 物
相 田 ¹⁾	浅 理 水 論	S.L.F. 法	フルード数の仮定 ($F_r=0.5$)	非 碎 波	容 易	容 易
岩 崎 ²⁾	浅 理 水 論	特 性 曲 線 法	フルード数の仮定 ($F_r=2.0$)	サージング フロント	困 難	比 較 的 困 難
岩 崎 ³⁾	浅 理 水 論	S.L.F. 法	地形の階差的近似	非 碎 波	容 易	容 易
Houston ⁴⁾	浅 理 水 論	陰 分 法	越流計算	非 碎 波	容 易	容 易
Hubberd ⁵⁾	浅 理 水 論	L.W. 法	差分型の変形	非 碎 波 サージング フロント	比 較 的 困 難	比 較 的 困 難
著者等 ^{6),7)}	線型理論 非線型理論	S.L.F. 法	—	非 碎 波	容 易	困 難

する理論解^{8),9)}は、一様勾配斜面と水平床が組み合わされたような簡単な一次元水路の重複波型の解で

$$\frac{R}{H} = \left[J_0^2 \left(4\pi \frac{l}{L} \right) + J_1^2 \left(4\pi \frac{l}{L} \right) \right]^{-1/2} \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。ここで、 L は入射波波長、 l は静水時の汀線から斜面のり先までの水平距離であり、 J_0, J_1 は第一種の Bessel 関数である。

計算は理論解と同じ次元問題とし、相田¹⁾ ($F_r=0.5$)、相田¹⁾ ($F_r=2.0$)、岩崎³⁾そして著者^{6),7)} (線型) の4種について実施している。また、計算条件は、

格 子 長: 25 m, 50 m, 100 m の3種

斜 面 勾 配: 1/10, 1/25, 1/50, 1/100 の4種

入射波周期: 300 s, 600 s の2種

水平床水深: 50 m に固定

入射波振幅: 1 m に固定

とした。ここで、入射波周期は数値計算の現象の長さにと比べ格子長がより短い方が有利であるという性質からみて厳しい条件でもある。実際、周期の長い波の計算結果はどの方法でも理論解とよく合致し比較の対象とならない。

相対遡上高に関して、計算値と理論値の比を表—2に示す。計算値はどれも8周期分の計算を行ない、最大遡上高として安定な値を採用している。表中*印のある計算は後述する数値ギブス振動が発生した結果を表わす。

図—1 は各方法の最大遡上時および引き波時の波形を

* 正会員 工修 東北大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

表-2 各種遡上計算法の最大遡上高に関する理論解との比較

Run	格子長 Δx (m)	勾配 α	周期 T (s)	$\frac{\Delta x}{agT^2} \times 10^4$	(数値解)/(理論解)			
					相田 ¹⁾ ($F_r=0.5$)	相田 ¹⁾ ($F_r=2.0$)	岩崎 ³⁾	著者 ^{6),7)} (線型)
1	25	1/10	300	2.83	1.00	1.00	1.00	0.98
2			600	0.709	1.00	1.00	1.00	1.00
3		1/25	300	7.09	0.94	0.93	0.91	0.99
4			600	1.77	1.02	1.02	0.97	0.99
5		1/50	300	14.2	0.92	0.92	0.84	0.99
6			600	3.54	1.04	1.04	0.99	0.99
7		1/100	300	28.3	0.46*	0.45*	0.55*	1.00
8			600	7.09	0.97	0.97	0.96	0.99
9	50	1/10	300	5.67	0.96	0.96	0.96	0.97
10			600	1.42	0.99	1.00	0.99	0.99
11		1/25	300	14.2	1.00	1.00	0.96	0.98
12			600	3.54	0.98	0.98	0.97	0.98
13		1/50	300	28.3	0.84	0.86	0.84	0.97
14			600	7.09	1.03	1.03	0.98	0.98
15		1/100	300	56.7	0.48*	0.45*	0.47*	1.00
16			600	14.2	0.91	0.92	0.89	0.99
17	100	1/10	300	11.3	0.96	0.96	0.96	0.95
18			600	2.83	0.99	0.99	0.99	0.99
19		1/25	300	28.3	0.95	0.95	0.94	0.97
20			600	7.09	1.01	1.01	0.97	0.98
21		1/50	300	56.7	0.83	0.84	0.74	0.99
22			600	14.2	1.00	1.00	0.94	0.96
23		1/100	300	113.0	0.48*	0.49*	0.40*	1.00
24			600	28.3	0.84	0.84	0.82	0.99

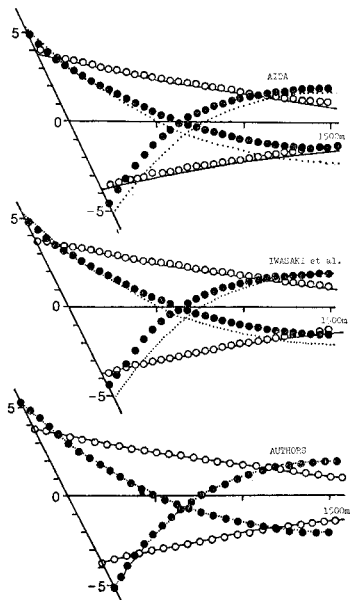


図-1 波形に関する比較

理論値と比較した例である。実線および点線はそれぞれ 600 s, 300 s の理論解を表わし、白丸および黒丸はそれぞれ 600 s, 300 s の計算結果を表わす。なお、格子長は 50 m, 斜面勾配は 1/50 である。

以上の結果をまとめると次のことがいえる。

- ① 浅水理論を用いた相田および岩崎の方法は最大遡上時の空間波形は物質座標系の線型理論の結果と大きな相違を生じない。しかし、引き波時の波形では浅水理論の結果の方が高い水位を示す。
- ② 相田の方法で波先端のフルード数を 0.5 として 2.0 とおいたものを比較すると、両者の最大遡上高は殆ど一致するとみなしてよい。
- ③ 斜面の長さが長くなる程また入射波周期が短くなる程、浅水理論を用いた計算法は理論値をかなり下まわる解しか与えられないので物質座標のものより空間格子を細かく選ぶ必要が生ずる。
- ④ 格子長 Δx , 入射波周期 T , 斜面勾配 α からなる無次元パラメータ $\Delta x/agT^2$ の関数として精度を評価したものが図-2 である。精度は最大遡上高に関して数値解と理論解との比で表わしている。これを用いれば所要の精度に対する空間格子の寸法を定めることができる。

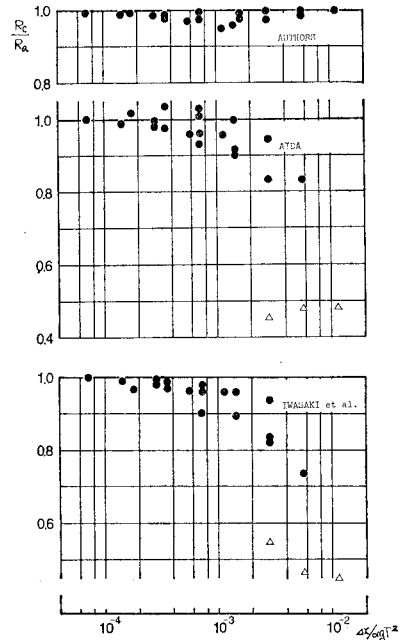


図-2 各種計算法の精度

- ⑤ たとえば, $\Delta x=50$ m, $\alpha=1/50$, $T=600$ s の場合, 相田の方法を 1 として演算時間を比べると,
(相田):(岩崎):(著者)=1:1.02:0.85
となり大差はない。したがって,
- ⑥ 図-2 から適切な格子長を選ぶことにより、比較

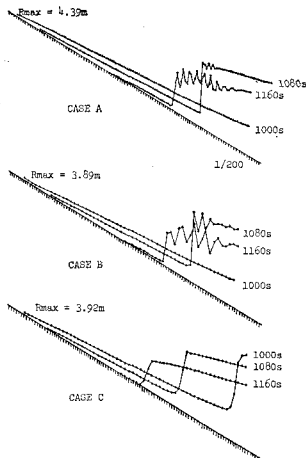


図-3 段波津波の計算例

的面倒な物質座標による方法を用いずとも、浅水理論を使用した方法で十分な精度を持つ計算が可能である。

3. 非線型性の強い津波の遡上計算

(1) 段波津波の計算法

短周期の津波が遠浅の海岸へ来襲するとき、津波の波頭が段波を呈することがある。このような津波を S.L.F. 法で計算する場合問題となることは段波の不連続面前後から発生する数値ギブス振動である。

図-3 にその一例を示す。CASE A および CASE B は格子長がそれぞれ 12.5 m, 25 m の例である。どちらも第1波の最大遡上時から第2波目が海岸に来襲する様子を描いている。どちらも第2波目の波頭で波長が格子長の2倍である数値ギブス振動が発生しているのがよくわかる。第1波の波頭も段波を呈するが、この場合は数値ギブス振動が発生しないかまた発生しても非常に小さいものである。なお、波先端の条件は岩崎³⁾の方法を用いている。

この数値ギブス振動の発生の理由を調べるために、不連続な水位、流速をもつ理想段波について初期値問題を S.L.F. 法で計算を行った。その例を図-4 に示す。

理想段波のように圧縮性のあまり強くない衝撃波は、図-4 のように数値ギブス振動のない理論解に非常に近い結果を与える。なお、左側の図において、実線は理論解、黒丸は計算結果である。

数値解では衝撃波面から上端に向かって伝播する一種の反射波(誤差波)が発生する。この反射波の大きさはフルード数に比例して大きくなるが CASE C の場合でも段波の波高の約 1/10 程度である。この反射波の伝播の様子を調べたものが図-4 の右側の図である。図中破線は衝撃波面の位置を表す。

以上の結果から、図-3 の計算で第1波のように静水

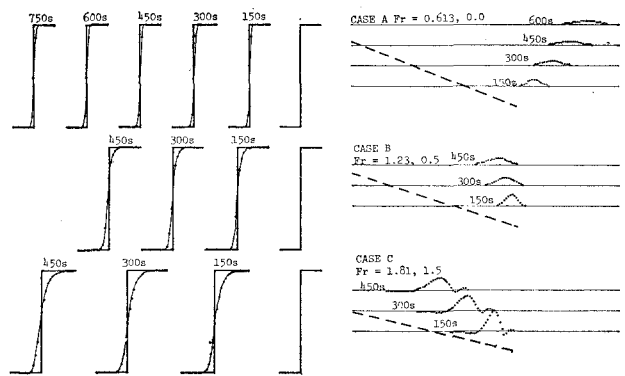


図-4 理想段波の計算例

中を進む段波あるいは図-4 の理想段波の計算のように衝撃波面において流れの圧縮性の弱い場合に比べ、第2波の強いもどり流れのなかを進む、流れの圧縮性の強い衝撃波においてはこの強い圧縮性のため、衝撃波面から発生する反射波が伝播できず、その蓄積効果のために数値ギブス振動が発生すると思われる。

したがって、数値ギブス振動を除去するためには、この振動が発生する箇所では反射波をむりやりにでも伝播させてやればよいのである。そこで、本研究においては浅水理論の連続方程式に、

$$\beta_1(\Delta x)^3 \sqrt{\frac{g}{D}} \left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right| \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right| \dots \dots \dots (2)$$

の型で人為数値拡散項を導入することにした。ここで、 β_1 を

$$\Delta x \left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right| - \gamma \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right| \begin{cases} \leq 0 \text{ のとき } \beta_1 = 0 \\ > 0 \text{ のとき } \beta_1 = \text{定数} \end{cases} \dots \dots \dots (3)$$

とおくと、 γ なる定数をうまく選ぶことにより、数値ギブス振動の発生するところに強く作用し、他の箇所にはまったく作用しないものとなり、望むところでもある。

図-3 の CASE C にこの人為数値拡散項を導入した計算結果を示す。心配される拡散項の影響による波高の減衰も見られず、しかも数値ギブス振動も完全に除去され、望ましい数値解となる。

なお、この人為数値拡散項を導入した差分式の安定条件を Von Neumann の方法で調べると

$$1 \geq (|u| + \sqrt{gD}) \frac{\Delta t}{\Delta x} + \beta_1(\Delta x)^2 \frac{1}{D} \left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right| \dots \dots \dots (4)$$

となる。あまり厳しいものではない。

もう少し、衝撃波の S.L.F. 法による数値計算について考えてみる。最も簡単な定常の衝撃波すなわち跳水現象を取り上げる。

この跳水現象の初期値問題について S.L.F. 法で計算したものが図-5 である。CASE A は人為数値拡散項を用いなかった結果であり、CASE B は用いたものであ

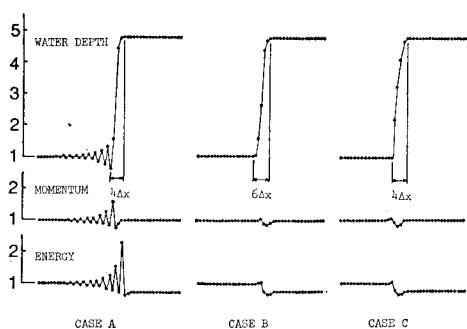


図-5 跳水の計算例

る。CASE A では射流側に数値ギブス振動を生じている。この振動のため運動量もエネルギーも振動する解が得られる。拡散項を導入した方の結果は望ましいものとなる。

しかし、ここであらたな問題が生ずる。すなわち、人為数値拡散項を導入した結果、解がなまり不連続区間が $4\Delta x$ から $6\Delta x$ へ 1.5 倍も長くなったことである。また、これは拡散項の導入に関する問題だけではなく、図-4 の理想段波の計算にみられたような不連続量の差が大きくなることによっておこる。

この解のなまりの問題に関しては、Von Neuman & Richtmyer¹⁰⁾ に代表される人為粘性項に類似したものを考えるとよい。たとえば、この跳水の問題でエネルギー保存則に遷移領域でつり合う項

$$\left(\frac{2}{\pi}\beta_2\Delta x\right)^2 u D \frac{\partial^3 E}{\partial x^3}$$

を導入すると、エネルギー方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x}(uDE) = \left(\frac{2}{\pi}\beta_2\Delta x\right)^2 u D \frac{\partial^3 E}{\partial x^3} \quad \dots\dots\dots(5)$$

となる。ここで、 $E = u^2/2 + gD$ であり、 β_2 は定数である。

式 (5) を

$$\left. \begin{aligned} x = -\beta_2\Delta x & \text{ で } E = E_1 \text{ (上流側の値)} \\ x = \beta_2\Delta x & \text{ で } E = E_2 \text{ (下流側の値)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(6)$$

の条件で解くと

$$E = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) - \frac{1}{2}(E_1 - E_2) \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{\beta_2\Delta x}\right) \quad \dots\dots\dots(7)$$

なる遷移領域における解を得る。図-6 に示すとおり、式 (7) の解は遷移区間をなめらかに連続し、しかも遷移区間の長さは $\beta_2\Delta x$ のオーダーとなり、 β_2 を適切に選ぶことにより、数値解のなまりをある程度おさえることができる。

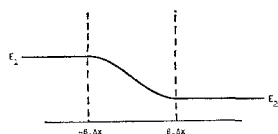


図-6 遷移領域の連続解

なり、 β_2 を適切に選ぶことにより、数値解のなまりをある程度おさえることができる。

$\beta_1 = 1.0$, $\beta_2 = 0.8$ といった計算例を図-5 CASE C

に示す。CASE B に比べ遷移区間は $4\Delta x$ におさえられている。

(2) 波形曲率の効果による分散項の計算

遠浅の海岸とか河川内を遡上する津波を考えるときは段波性の波の変形とともに波形曲率による分散効果が無視できなくなる。

Boussinesq の式に代表される分散項を考慮した長波の式はその他にも K-dV, 角谷, Mehaute そして Peregrine の各式が導かれているが、ここでは、斜面による反射の影響を考慮している Peregrine の式¹¹⁾を採用している。津波のように波長の比較的長い波について考えるとき、いくら遠浅といっても斜面からの反射を無視するわけにはいかないであろうという判断による。

Peregrine の式は、流速、波高、静水深をそれぞれ u , η , h とおくと

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[u(h+\eta)] = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{1}{2} h \frac{\partial^3 (hu)}{\partial x^2 \partial t} \quad \dots\dots\dots(9)$$

で表わされる。式 (8), (9) をそのまま差分化すると分散項の形から想像して陰形式の差分式となるのは明らかであり、一次元伝播の計算ならともかく二次元伝播の計算では演算時間の問題で得策ではない。

そこで、本研究では式 (9) の分散項を書き改めることを考えた。すなわち、Peregrine の展開において第 1 近似は線形長波の式となることから、この関係を第 2 近似である分散項に代入するのである。この変換は、第 2 近似の式を考える上ではいたって問題はない。この方法を用いると Peregrine の式は、線流量 M , 実水深 $D (= h + \eta)$ を用いて

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ = \frac{1}{6} g D^3 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} - \frac{1}{2} g D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(11)$$

と表わされる。式 (11) の形であれば S.L.F. スキームで表現することも可能である。

ここで注意しなければならないことは、S.L.F. スキーム自体が数値分散性を有していることである。すなわち、S.L.F. スキームが持つ数値分散項が式 (11) の分散項と同等以上の効果を有する場合は、式 (11) の分散項を導入する意義がなくなる恐れがあることである。

S.L.F. スキームの擬微分方程式において主たる分散項は

$$-\frac{(4\Delta x)^2}{24} g D \left[1 - (u^2 + gD) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$$

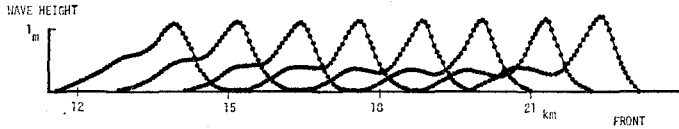


図-7 分散項の計算例

で与えられる。簡単に水平床の場合を考え、式(11)の分散項との比をとると

$$\frac{(\Delta x)^2}{8D^2} \left[1 - (u^2 + gD) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (12)$$

となる。大括弧の中は差分式の安定条件が $(|u| + \sqrt{gD}) \times (\Delta t / \Delta x) \leq 1$ であるので通常 0.1~0.2 程度と考えてもさしつかえないので全体として 1/10 以下になると思われる。したがって、何も高近似のスキームを用いずとも通常の S.L.F. 法で充分であると考えられる。

なお、Von Neumann による安定条件を求めると通常のものより厳しくなり

$$(|u| + \sqrt{gD}) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \leq 1 \dots\dots\dots (13)$$

かつ

$$\Delta x \geq \frac{\sqrt{2}}{3} D \dots\dots\dots (14)$$

となる。したがって、格子寸法の選び方によるが深海域で分散項を考慮すると不安定になるので、式(14)を満たす浅海域で分散項を考慮すると良い。たとえば、二次元伝播問題において電算機的能力から判断し現在用いられる最も細かい格子寸法は 25 m 程度であることを考えると、実水深 D が約 28 m より小さい所から分散項が考慮可能となる。ゆえに、津波のような比較的長周期性の波を考える場合式(14)の条件はあまり問題とはならない。

Peregrine の式の S.L.F. 法による計算例を図-7 に示す。振幅 1 m 半周期 300 秒の正弦波の水平床上の変形について計算している。図の水平軸は波先端の位置を表わし、2 分ごとに描いている。

このように、式(10)、(11)を S.L.F. 法で計算することによっても分散項の効果を計算することができる。また、従来の陰差分のものに比べ二次元問題も比較的容易に拡張でき将来性ある方法ということができよう。

4. 結 論

本研究はまずはじめに、代表的な種々の津波遡上計算法に焦点をあてその数値解の比較を通じて、S.L.F. スキームを用いた浅水理論の計算で、対象とする地形勾配

および波の周期を考慮して適切な格子寸法を用いることにより十分な精度をもって遡上計算が可能であることを明らかにした。そして、非線型性の強い津波に関してもこの S.L.F. スキームを用いて段波津波への変形および高次非線形現象である波形曲率の効果による分散性を考慮した計算が可能である一方法を提案している。しかし、本研究で用いた手法、特に Von Neumann & Richtmyer 風の項が実際の物理現象とどのように対応しているか水理実験等を用い詳細に検討する必要がある。

謝辞： この研究を行なうにあたり、文部省から科学研究費（研究代表者 東京大学梶浦欣二郎教授）による補助を受けた。また、計算・整理にあたり当時東北大学学部生であった中根亘君、大学院学生の諸君の熱心な助力を得た。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 相田 勇：陸上に溢れる津波の数値実験，震研彙報，Vol. 52, pp. 441~460, 1977.
- 2) 岩崎敏夫・富樫宏由：遡上津波先端の条件と計算法，第 16 回海講，pp. 359~364, 1969.
- 3) 岩崎敏夫・真野 明：オイラー座標による二次元津波遡上の数値計算，第 26 回海講，pp. 70~74, 1979.
- 4) Houston, J. R. and H. L. Butler: A numerical model for tsunami inundation, U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Technical Report HL-79-2, 1979.
- 5) Hubberd, S. and D. H. Peregrine: Surf and run-up on a beach; a uniform bore, J.F.M., Vol. 95, Part 2, pp. 323~345, 1979.
- 6) 首藤伸夫・後藤智明：津波の遡上に関する数値解析，第 24 回海講，pp. 65~68, 1977.
- 7) 後藤智明・首藤伸夫：非線型津波の二次元遡上計算，第 26 回海講，pp. 56~60, 1979.
- 8) Shuto, N: Standing wave in front of a sloping dike, Proc. 13th Conf. on Coastal Eng., pp. 1629~1647, ASCE, 1972.
- 9) Keller, J. B. and H. B. Keller: Water wave run-up on a beach, Research Report No. NONR-3828(00), Office of Naval Research, Rept. of Navy, 1964.
- 10) Von Neumann, J. and R. D. Richtmyer: A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, J. of Applied Physics, Vol. 21, No. 3, pp. 232~238, 1950.
- 11) Peregrine, D. H.: Long wave on a beach, J.F.M., Vol. 27, Part 4, pp. 815~827, 1967.