

一様傾斜底水域における二次元二層界面静振

木村 晴保*・綿貫 啓**

1. 緒 言

密度成層を成す流体の内部に生ずる波動現象を内部波といい、特に、石油と水のように明瞭な密度界面に生ずる内部波を界面波という。自然界においては十分に発達した密度躍層でも、石油と水のように明瞭な密度界面が形成されることはない。しかし、躍層厚に比べて十分に長い波長の内部波は界面波としての取り扱いが可能である^{1),2)}。そしてこのような内部波（以下界面波という）は、湾や外洋においてしばしば観測されていて、海水流動³⁾・魚道⁴⁾・湧昇流⁵⁾・底質移動^{6),7)}さらには表面におけるスリック現象⁸⁾などと関連していることが知られている。

界面波は表面波と類似した点が多く、内部波に比べて理論的にも実験的にも取り扱いが簡単であるが、表面波ほど定式化されていない。

ここでは二次元二層界面長波の基本式を誘導する。そして、まず水深が一定で幅のみが変化する水域での二次元二層界面波は、Mixing による影響が無視できる現象であれば、表面波の結果から推論できることを示す。つぎに、水深のみが変化する水域での界面静振の級数解を求め、室内実験結果と比較検討し、底勾配に起因する界面静振の特性を明らかにする。

2. 基本式の誘導

流体は非圧縮・非粘性とする。界面波は図-1に示す xz 面内の二次元とし、波長は上下層の層厚に比べて十分に大きく、波高は十分に小さいものとする。この場合、上下層の運動方程式と連続の式は、微小振幅の表面長波のそれと同様にして次式を得る。

〔運動方程式〕

$$\text{上層: } \rho_1 \partial u_1 / \partial t = -\partial p_1 / \partial x, \quad 0 = -\partial p_1 / \partial z - \rho_1 g \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{下層: } \rho_2 \partial u_2 / \partial t = -\partial p_2 / \partial x, \quad 0 = -\partial p_2 / \partial z - \rho_2 g \quad \dots\dots\dots (2)$$

〔連続の式〕

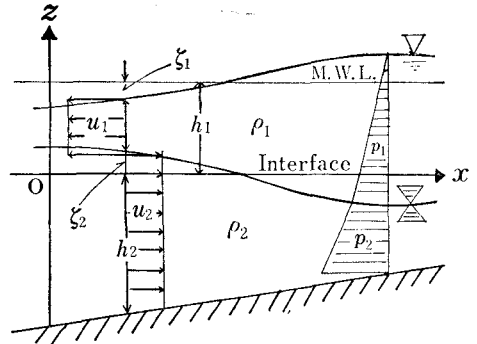


図-1 座標と記号

$$\text{上層: } -b \partial \zeta_2 / \partial t + h_1 \partial (u_1 b) / \partial x = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{下層: } b \partial \zeta_2 / \partial t + \partial (u_2 b h_2) / \partial x = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 u は流速、 ρ は密度、 p は圧力、 g は重力加速度、 b は水路幅、 h は静水時の層厚で添字 1 は上層、2 は下層を示す。 ζ_2 は界面の鉛直変位で上方を正とする。また、一般に自然界においては $(\rho_2 - \rho_1) / \rho_2 \approx 10^{-3}$ であり、界面波による表面の変位量 ζ_1 は ζ_2 の 10^{-3} 程度となるため、式 (3) の第 1 項においては、 ζ_1 は省略した。

式 (1), (2) は、境界条件 $z = h_1 + \zeta_1$ で $p_1 = 0$, $z = \zeta_2$ で $p_2 = p_1$ を用い、次式となる。

$$\partial u_1 / \partial t = -g \partial \zeta_1 / \partial x \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\partial u_2 / \partial t = -g \{ \partial \zeta_1 / \partial x + (\Delta \rho / \rho) \partial \zeta_2 / \partial x \} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$, $\rho = \rho_2 \approx \rho_1$

式 (3)~(6) は、 $b = b(x)$, $h_2 = h_2(x)$ の水域における二次元二層界面長波の基礎式である。

(1) $h_2 = \text{const.}$, $b = b(x)$ の場合

式 (3)~(6) を用いて次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \right) - \frac{b}{(\Delta \rho / \rho) g} \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

式 (8) は、水深 $h = \text{const.}$, 幅 $b = b(x)$ の水域における二次元表面長波の基本式⁹⁾において、 g を $(\Delta \rho / \rho) g$, h を $h_1 h_2 / (h_1 + h_2)$ としたものに等しい。

(2) $h_2 = h_2(x)$, $b = b(x)$ の場合

式 (3)~(6) から ζ_1 に関する基本式として次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right) \right\} - \frac{1}{(\Delta \rho / \rho) g} \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x \partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

* 正会員 農博 水産工学研究所 水産土木工学部

** 正会員 日本テトラポッド(株)

式 (9) は, 式 (3)~(6) から求める過程で一度 x について積分されている. この際, 積分定数を 0 としているため, 外力が作用するときは式 (9) の右辺に強制項がつく.

3. 幅一定・底勾配一定な水域での界面静振

3.1 解 析

式 (9) で $b=\text{const.}$, $h_2=h_0-\alpha x$ について考える (図-2). このとき式 (9) は x の関数を係数とする ζ_1 の線形微分方程式であるため, 一般解は ζ_1 が $e^{-i\omega t}$ のように時間に依存する特解の和で表わすことができる. そこで x, ζ_1 を式 (10), (11) で表わすと式 (9) は式 (12) となる.

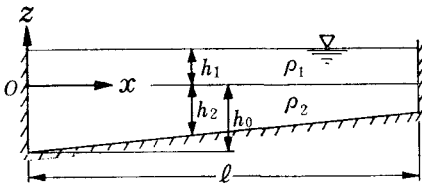


図-2 座標と記号

$$\xi = x/l \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\partial \zeta_1 / (\partial \xi) = q(x) e^{-i\omega t} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\frac{d^2 q}{d\xi^2} + \nu^2 \left(\frac{1}{1-\gamma\xi} + \beta \right) q = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここに,

$$\nu^2 = \frac{(l\sigma)^2}{(\Delta\rho/\rho)gh_0}, \quad \beta = \frac{h_0}{h_1}, \quad \gamma = \frac{\alpha l}{h_0} \quad \dots\dots\dots(13)$$

界面静振の境界条件

$$\xi=0(x=0) \text{ で } q=0, \quad \xi=1(x=l) \text{ で } q=0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

の第1式を満足する式 (12) の級数解は, 係数比較法により次式となる.

$$q(\xi, \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \xi^n] \quad \dots\dots\dots(15)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \text{任意定数} \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= -\nu^2(1+\beta)a_1/6 \\ &\vdots \\ a_n &= \{(n-1)(n-2)\gamma a_{n-1} - \nu^2(1+\beta)a_{n-2} \\ &\quad + \nu^2\beta\gamma a_{n-3}\} / \{n(n-1)\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

ν は σ を含むから a_n は σ の関数となるので式 (15) の q を $q(\xi, \sigma)$ と書く.

(1) モード周期

モード M の界面静振の角周波数を σ_M で表わすと, σ_M は式 (14) の第2式と式 (15) から次式によって求めることができる.

$$q(1, \sigma_M) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n] = 0 \quad \dots\dots\dots(17)$$

(2) 表面と界面の振動振幅

モード M の界面静振によって誘起される表面の変位量 ζ_1 は式 (11), (15) より求める. 変位の振動振幅を $\xi_1(\xi, \sigma_M)$ とすると, ξ_1 は次式で与えられる.

$$\xi_1(\xi, \sigma_M) = l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n+1} \xi^{n+1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{(n+1)(n+2)} \right] \right\} \quad \dots\dots\dots(18)$$

界面変位の振動振幅 $\xi_2(\xi, \sigma_M)$ は, 式 (3), (5), (11), (15) から次式を得る.

$$\xi_2(\xi, \sigma_M) = \frac{gh_1}{l\sigma_M^2} \sum_{n=1}^{\infty} [na_n \xi^n] \quad \dots\dots\dots(19)$$

(3) 上下層の水粒子速度

上下層の水粒子速度の振動振幅をそれぞれ $\bar{u}_1(\xi, \sigma_M)$, $\bar{u}_2(\xi, \sigma_M)$ とすると, これらは式 (5), (6), (11), (18), (19) から次式を得る.

$$\bar{u}_1(\xi, \sigma_M) = -\frac{g}{\sigma_M} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \xi^n] \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$\bar{u}_2(\xi, \sigma_M) = -\frac{g}{\sigma_M} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \xi^n] + \frac{1}{\nu^2} \sum_{n=1}^{\infty} [n(n-1)a_n \xi^{n-2}] \right\} \quad \dots\dots\dots(21)$$

3.2 数値計算結果

(1) モード周期

式 (13) で与えられる β, γ を指定して, 式 (17) より σ を解いた 1 例を図示したのが 図-3 で, 水深が一定 ($\alpha=0$) な水域における界面静振の角周波数は, 図中

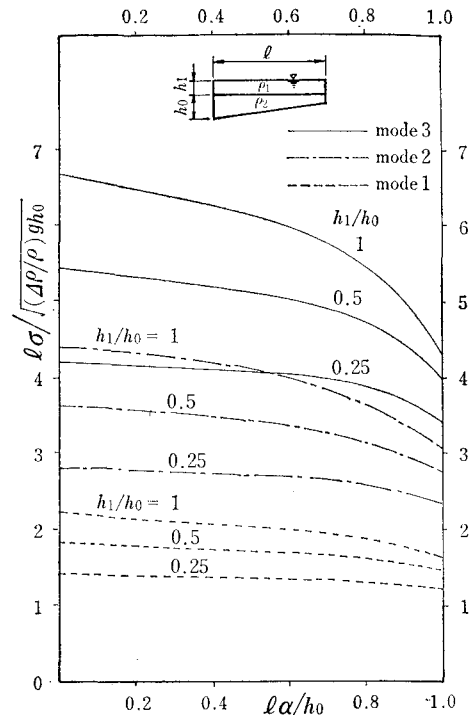


図-3 傾斜底水域における二次元二層界面静振の共振周期

$la/h_0=0$ に対応する σ で与えられる。

底勾配 α がモード周期におよぼす影響は、モードが高いほど、また上層の層厚が大きいほど大となる。

(2) 表面と界面の振動振幅および上下層の水粒子速度

モード周期が決まると、水域縦断面の表面と界面および上下層の水粒子速度の振動振幅は、それぞれ式 (18), (19) および式 (20), (21) で与えられる。図-4 は結果の 1 例で、 ξ_1, ξ_2 が 0 となる位置 (図中の矢印) および $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ が最大となる位置はそれぞれ異なり、一定水深の場合に比べて浅い水深の方に移動することが判る。

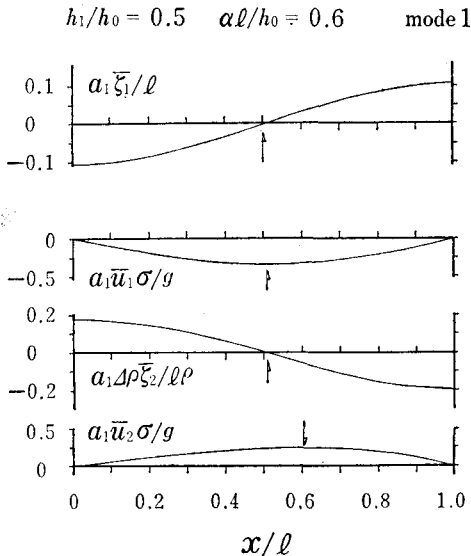


図-4 界面静振による表面と界面および上下層における水粒子速度の振幅, 矢印はゼロないし最大となる位置

3.3 実験

(1) 実験装置 (図-5)

水槽は厚さ 10 mm の透明アクリル製で、規模は長さ 3.88 m × 幅 0.2 m × 深さ 0.5 m である。二層の流体には石油 (比重 0.786) と淡水を使用した。造波は直径

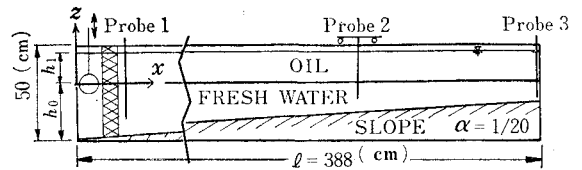


図-5 実験装置

100 mm のアルミパイプを界面を中心に上下し、擾乱はパイプ前面に設けた消波材で消去するようにした。界面変動の実測には容量式波高計 3 台を使用した。

(2) 結果と考察

図-6 は造波周期と水槽浅水端 (図-5 の右端) での界面および表面の変動量を示したもので、実験は $h_1=11.0$ cm, $h_0=22.0$ cm, $\alpha=1/20$ および造波ストロークを一定とし、周期のみを変えた。横軸に付記したモード周期は式 (17) から求めたもので、これらの周期の近くで界面および表面の変動は大きくなっている。

この種の実験は、 la/h_0 の値として 0.882 の他に 0.746 と 1.0 についても実施した。0.746 ときには図-6 とほぼ同様な結果を得た。1.0 の場合には、界面変動の最大値が 2.3 cm, 最小値が 1.1 cm で、前記 2 者のものに比べて最大値は小さく、逆に最小値は大きくなり、周期変化に伴う界面変動の変化率は小さくなった。また変動量が極大となる造波周期は各モードとも計算値に比べて 7~10% 小さかった。

図-7 は $la/h_0=1.0$, モード 3 の界面波の挙動を示す。すなわち界面波は、浅水部の斜面上を遡上し、鉛直壁に衝突、反射される。反射の際、波高 0.9 cm, 波長 10 cm 程度の波が新たに 2~3 波発生し、造波機側へ伝播していくのが観られた。

図-8 は界面変動振幅 ξ_2 および上下層での水粒子速度振幅 $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ の実測値と理論値を比較したものである。界面変動は図-5 に示す水槽縦断方向に移動可能な Probe 2 の波高計で実測した。水粒子速度は 1 周期間での浮遊物の移動距離を実測し、これより速度振幅を求め

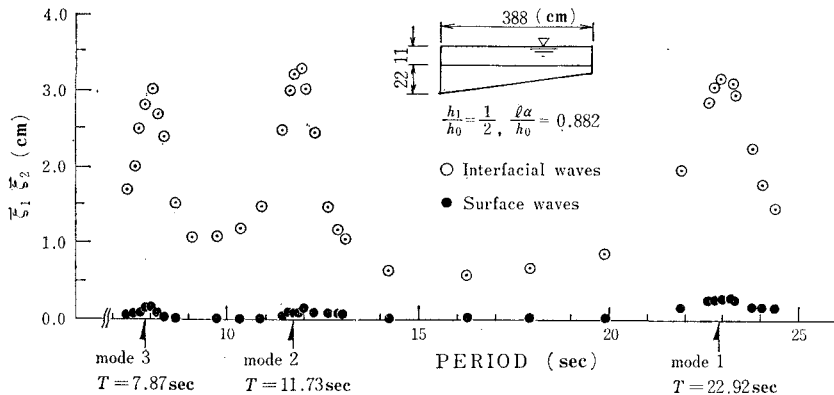
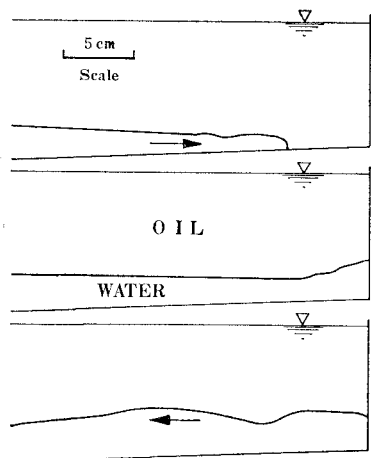
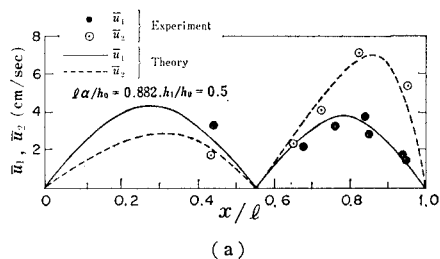
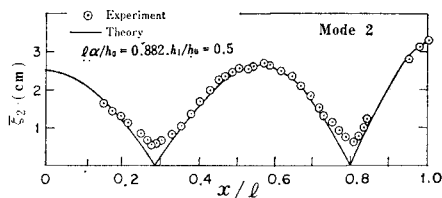


図-6 造波周期と界面および表面の振動振幅

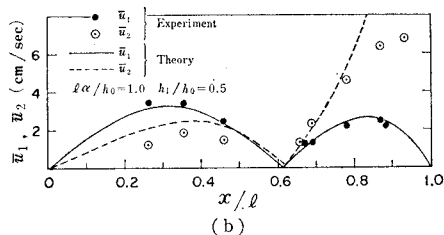
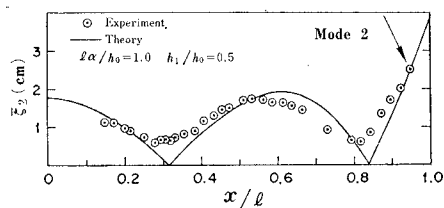


$h_0 = 19.4 \text{ cm}$, $h_1 = 9.7 \text{ cm}$, $\alpha = 1/20$
 $\ell = 388 \text{ cm}$, $T = 8.73 \text{ sec}$, mode 3, $\ell\alpha/h_0 = 1.0$

図-7 浅水部における界面フロントの挙動



(a)



(b)

図-8 界面および上下層流速の振動振幅に関する理論値と実験値の比較, (a) は $\ell\alpha/h_0$ が 0.882, (b) は 1.0 で他の条件は同じ

た. 理論値は, 図-8 (a) では $x/\ell=1.0$, 図-8 (b) では $x/\ell=0.95$ (図中の矢印) での界面変動量が実験値と一致するように式 (16) の a_1 を与え, 級数解から求めた.

理論値は, 図-8 (a) では節 (界面変動が 0 となる位置) の近傍を除けば, 界面変動, 上下層での流速とも実験値と良く一致しているのに対し, 図-8 (b) では充分とは言えない. これは, 実験では界面のフロントが図-7 のように挙動しているのを, 解析では式 (14) の第 2 式で表わされる境界条件で近似したことによるため, 両者に差の生じたのはむしろ当然のことで, むしろ上層の流速が比較的良く一致したことの方が驚きである.

4. 考 察

底勾配が一定な二次元水域での二次元二層界面静振については, 図-7 のように界面が斜面上を遡上する場合を除けば, モード周期, 界面変動量および上下層の水粒子速度はここで記述した級数解より, 実用上十分な精度でもって算定できる.

4.1 モード周期

モード周期は式 (17) ないし 図-3 から求まる. ただし, $\ell\alpha/h_0 \approx 1.0$ の場合には, 7~10% 大きな値を与え

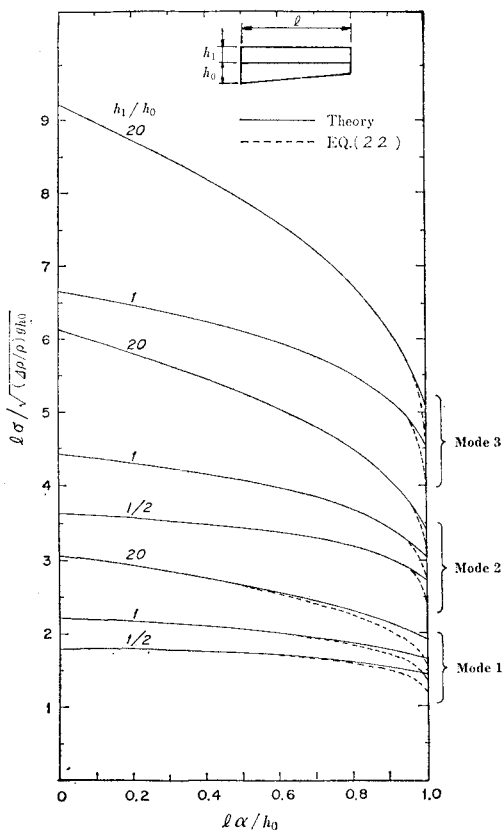


図-9 傾斜底水域における二次元二層界面静振の共振周期に関しての式 (17) と (22) の比較

る. $l\alpha/h_0 \neq 0$ のモード M の角周波数は基本モードの M 倍とはならない.

斜面上で界面波が局所位相速度⁹⁾

$$C_p = \{(\Delta\rho/\rho)gh_1h_2/(h_1+h_2)\}^{1/2} \dots\dots\dots(22)$$

で伝播するとして, 図-2 におけるモード M の角周波数 σ_M' を求めると式 (23) を得る¹⁰⁾.

$$\frac{\sigma_M' l}{\sqrt{(\Delta\rho/\rho)gh_0}} = \pi M \gamma \left[\sqrt{1+\beta} - \frac{\sqrt{\pi+\beta}}{K} + \frac{1}{\beta} \left\{ \ln \left(\frac{\sqrt{K+\beta}-\sqrt{\beta}}{K} \right) - \ln(\sqrt{1+\beta}-\sqrt{\beta}) \right\} \right] \dots\dots\dots(23)$$

ここに, $K=(1-l\alpha/h_0)^{-1}$ その他は前出と同じである.

図-9 は式 (17) から求めた $\sigma_M l / \sqrt{(\Delta\rho/\rho)gh_0}$ と式 (23) を比較したもので, これより界面静振のモード周期は充分な精度でもって式 (23) から推算できることが判る. また, 斜面上では, 微小振幅波でも, 位相速度は式 (22) の C_p よりも大きくなることが判る.

4.2 界面変動

界面変動量 ξ_2 は式 (19) から算定できる. 界面の形状は 図-10 に示すようにもはや正弦波形ではなく, 変動量が 0 となる位置は浅水部に移る. これらの傾向は h_1/h_0 が大きくなるほど, $l\alpha/h_0$ が大きくなるほど, またモードが高いほど顕著である.

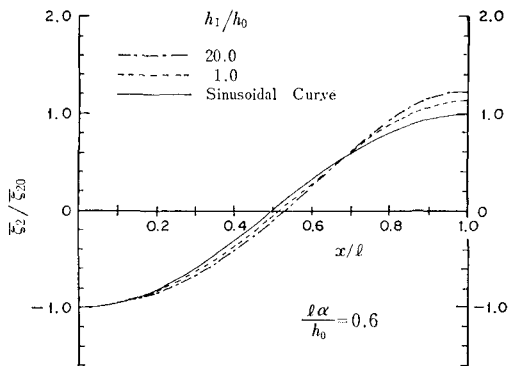


図-10 界面の縦断波形, ξ_{20} は $x/l=0$ での ξ_2

4.3 上下層流速

これらは式 (20), (22) から算定でき, 1 例を 図-4 に示した. 上下層の流速は逆位相で, 最大となる位置は異なる. また, モード 2 の結果を 図-8 に示したが, 流速が極大となる位置は上下層とも 2 ケ所で, 最大値は上層では深水部で, 下層では浅水部で生ずる. それゆえ, 界面波の安定・不安定と直接関係するシア一流は, 必ずしも上下層の流速が最大となる位置で, 最大になるとは

限らない.

また 図-8 は $l\alpha/h_0 \rightarrow 1$ の場合, 下層での流速が非常に大きくなりうることを示唆している. 例えば $l=3.0$ km, $h_0=25$ m, $h_1=25$ m, $l\alpha/h_0=0.9$, $\Delta\rho/\rho=2 \times 10^{-3}$ の水域で, モード 1 の界面静振が発達し深水部での界面変動量 ξ_{20} が 1.0 m となると, 下層での最大流速はほぼ 16 cm/sec となり, これは粒径 0.06 mm の底質砂を移動させる大きさである.

5. 結 言

本稿は 図-2 における二次元二層界面静振のうち, Mixing による影響が無視できる現象について理論的・実験的解析を行なったもので, 工学上特に重要な結果を要約すると,

① 水深が一定な水域での界面静振は, 表面静振の結果から推論できる.

② 界面静振は, 深海の底質を移動させるに十分な大きさの流速を誘起する場合もある.

③ 界面静振は, 式 (13) の ν, β, γ の 3 つの無次元量で表わすことができ, その結果, 幾何学的歪み模型実験が可能である.

謝辞: 稿をまとめるに当たり, 前鹿児島大学教授富永政英博士には, 理論的構成から記号の用い方に至るまで懇切丁寧な御指導を賜りました. ここに心よりお礼申し上げる次第です.

参 考 文 献

- 1) 富永政英: 海洋波動, 共立, pp. 536~543, 1976.
- 2) 浜田徳一: 密度流の問題 (3), 第 15 回海講演集, pp. 180~184, 1968.
- 3) 中村 充・萩野静也: 密度成層流体中の海水交換機構に関する研究, 第 26 回海講演集, pp. 544~548, 1979.
- 4) 中村 充: 水産土木学, 工業時事通信社, pp. 404~415, 1969.
- 5) Emery, K. O.: Deep standing internal waves in California basins, Limnol. Oceanogr., 1 (1), pp. 35~41, 1956.
- 6) Southard, J. B. and D. A. Cacchione: Experiments on bottom sediment movement by breaking internal waves, Shelf sediment transport; Swift, Duane and Pilkey (Eds.), Ross, Inc., pp. 83~97, 1972.
- 7) Eugene C. Lafond and Katherine G. Lafond: Perspectives of Slicks, Streaks, and Internal waves Studies, B. J. S. of Fish. Oceanogr., pp. 741~763, 1933.
- 8) 本間 仁: 長波の変形に就いて, 土木学会誌, 第 19 巻第 9 号, pp. 741~763, 1933.
- 9) 例えば 1) の p. 545 式 (96, 10) より.
- 10) 木村晴保: 2 次元水槽における二層界面長波, 水工研報告 1, pp. 41~50, 式 (53), 1980.