

Run-up フロントの運動に関する解析

島 田 正 志*

1. 緒 言

水平床での Dam-break-wave フロント (先端部) や、海岸等での Run-up フロントなどの、水深 h がゼロとなる点は、非線型浅水理論の数学的特異点であり、種々の議論がなされてきた。Dam-break-wave フロントに対しては、志村が近似的支配方程式とその 1 近似解を得た¹⁾。著者は、志村のフロントの支配方程式の解析解を得て、その非線型分岐解より、Dam-break-wave を基本モデルとしたゲート急開に伴う不定流のフロントの運動の解明を行なってきた^{2),3)}。

本論文では、① 水平床での理論を一樣勾配斜面へ拡張し、Run-up フロントの支配方程式を導き、② その非線型分岐解を、段波を含まない定常波周期解および段波を含む非周期解の代表的なものと比較・検討する。

2. Run-up フロントの支配方程式と近似解

(1) 無次元化された基礎方程式⁴⁾

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + 1 = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

ただし、 u, h, x, t は、流速、水深、空間および時間座標で、対応する次元量 U, H, X, T を次の様に無次元化したものである。 $u = U/(gH_1)^{1/2}$, $h = H \cos \theta / H_1$, $x = X \sin \theta / H_1$, $t = T \sin \theta (g/H_1)^{1/2}$ 。 H_1 : 代表長, g : 重力加速度, θ : 一樣勾配斜面の水平となす角。 x 軸は水平方向にとることとする。

(2) Run-up フロントの支配方程式

志村と同様にして⁵⁾、微分演算子式 (3) を式 (1) (2) およびそれから得られる式に、順次作用させて、無限個からなる Run-up フロントの支配方程式を以下のように得る。

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{d}{dt} (\cdot) \right]^0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \right)^0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^0 \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \right)^0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

ただし、 $(\cdot)^0$ はフロントの量であることを示す。 $d(\cdot)/dt$

は、フロントに沿ったラグランジュ微分である。

$$\frac{dx^0}{dt} = u^0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{dh^0}{dt} = -h^0 \beta^0 = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{du^0}{dt} = \alpha^0 - 1 \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$\frac{d\alpha^0}{dt} = -2\alpha^0 \beta^0 + h^0 \beta_x^0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\frac{d\beta^0}{dt} = -\beta^{02} + \alpha_x^0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\frac{d\alpha_x^0}{dt} = -3\alpha_x^0 \beta^0 - 3\alpha^0 \beta_x^0 + h^0 \beta_{xx}^0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

ただし、 $\alpha^0 = -(\partial h / \partial x)^0$, $\beta^0 = (\partial u / \partial x)^0$, $\alpha_x^0 = -(\partial^2 h / \partial x^2)^0 \dots$ などで、式 (5), (7), (9) の右辺の h^0 自体はゼロであるが、 x で偏微分した量は有効である。

以上が、Run-up フロントの支配方程式である。なお、Dam-break-wave フロントの場合に、式 (6) は右辺第 2 項 (一樣勾配の効果を示す項) を含まない式 (6)' の形をとるが、他の方程式は Run-up フロントの場合と共通である⁶⁾。

$$\frac{du^0}{dt} = \alpha^0 \quad \dots\dots\dots(6)'$$

(3) 支配方程式の近似

無限個の支配方程式は、解くことは不可能であろう。Dam-break-wave フロントに対して、志村は、支配方程式が有限個の方程式に厳密に帰着するとした。すなわち、 $\beta_x^0 = \alpha_{xx}^0 = 0$ が成立するとして、式 (9) を式 (9)' とし、式 (8) (9)' から β^0 の 2 階の非線型常微分方程式 (10) を、志村は導いた⁷⁾。

$$\frac{d\alpha_x^0}{dt} = -3\alpha_x^0 \beta^0 \quad \dots\dots\dots(9)'$$

$$\frac{d^2 \beta^0}{dt^2} + 5\beta^0 \frac{d\beta^0}{dt} + 3\beta^{03} = 0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

しかし、3. (1) で示すように、式 (9)' は厳密に成立するのでなく、不等式 (11) が成立する場合の式 (9) の近似とあくまで考えるべきである。

$$|\alpha_x^0 \beta^0| \gg |\alpha^0 \beta_x^0| \dots\dots\dots(11)$$

フロントの支配方程式では、 $x^0 \leftarrow u^0 \leftarrow \alpha^0 \leftarrow \beta^0 \leftarrow \alpha_x^0 \leftarrow \beta_x^0 \leftarrow \dots$ のように、順次、高次項が低次項を規定するので、フロントの水面勾配 α^0 が異常に大きな、わずかな時間を除けば、式 (11) に類似した近似が可能と思われる。

式 (4), (6), (7), (8), (9)' を Run-up フロントの近似的支配方程式としよう。(以後、単に支配方程式と呼ぶことにする。)

(4) フロント解析法の特徴と意義

以上で、フロントの解析は、境界値問題から初期値問題へ変換された。その根拠は、フロントの支配方程式の解 $u^0, \alpha^0, \beta^0, \alpha_x^0, \beta_x^0$ 等が、 $u(x, t), h(x, t)$ のフロントでのテイラー級数の係数として、フロント近傍の近似解を構成し、フロント解析の境界条件を与えることに求められる⁹⁾。本解析により、特性曲線法が与える相似解に依存していたフロント解析の欠陥(フロントの水面勾配 α^0 はゼロで、自由落下運動に従うという性質)も克服され、 α^0 の効果を導入した評価が可能である。

(5) 支配方程式の解

水平床に対する支配方程式 (4), (6)', (7), (8), (9)' の解をすでに著者は得た⁹⁾。式 (4), (5), (6), (7), (8), (9)' の解も同様にして得られるので結果のみを列記する。

$$\beta^0 = C_\beta \frac{|z+1|}{|2z+3|^{3/2}} \dots\dots\dots(12)$$

z は時間 t の変換パラメーターで、式 (13) あるいは (14) の関係がある。

$$z > -1.5$$

$$t = \frac{1}{C_\beta} \left(\frac{(2z+3)^{1/2}}{|z+1|} - \operatorname{sgn}(z+1) \cdot \ln \frac{|(2z+3)^{1/2}-1|}{(2z+3)^{1/2}+1} \right) + C_t \dots\dots\dots(13)$$

$$z < -1.5$$

$$t = \frac{1}{C_\beta} \left(\frac{|2z+3|^{1/2}}{z+1} + 2 \tan^{-1}(|2z+3|^{1/2}) \right) + C_t \dots\dots\dots(14)$$

$$\alpha_x^0 = C_\beta^3 \cdot \operatorname{sgn}(2z+3) \left(\frac{z+1}{2z+3} \right)^3 \dots\dots\dots(15)$$

$$\alpha^0 = C_\alpha \frac{(z+1)^2}{(2z+3)^2} \dots\dots\dots(16)$$

$$u^0 = C_u + \frac{C_\alpha \operatorname{sgn}(z+1)}{C_\beta |2z+3|^{1/2}} - t \dots\dots\dots(17)$$

$$x^0 = C_x + C_u \cdot t + \frac{C_\alpha}{C_\beta} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(2z+3)}{(z+1)} - \frac{t^2}{2} \dots\dots\dots(18)$$

ただし、 $\operatorname{sgn}(\cdot)$ は、 $(\cdot)$ の正負に対して、+1 または -1 の値を示す。 $C_\beta, C_\alpha, C_u, C_t, C_x$ は積分常数で、 C_β は正負の値をとりうる。式 (17) の右辺第 1, 3 項は、自由落下運動を、第 2 項はフロントの水面勾配の効果を示す。

解は、 $z = -1, -1.5$ の 2 つの分岐点を含む。 C_β の正負は x 軸の向きにより逆転するので、3 つの基本的

解があると考えうる。著者は、Dam-breaker-wave を基本モデルとして、ゲートの急開により発生する不定流を検討し、3 つの分岐解の考察を行った¹⁰⁾。Run-up フロントの場合、段波を含まない定常波周期解、段波を含む非周期解の代表的な例について検討する。

3. 周 期 解

(1) 最も単純な定常波解による支配方程式の検討

Carrier & Greenspan¹¹⁾ は、基礎方程式を変数変換し、 $u = \partial \phi(p, q) / \partial p$ の形で導入したポテンシャル ϕ の線形方程式 (19) を得た。

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(p \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - p \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} = 0 \dots\dots\dots(19)$$

式 (19) の最も単純な解 (20) で表現される運動に対して、支配方程式および分岐解の検討をする。

$$\phi = J_0(p) \cos q \dots\dots\dots(20)$$

$$u = -J_1(p) \cos q / p \dots\dots\dots(21)$$

$$h = (p/4)^2 \dots\dots\dots(22)$$

$$t = \frac{q}{2} + \frac{J_1(p)}{p} \cos q \dots\dots\dots(23)$$

$$x = -\frac{J_0(p)}{4} \sin q - \frac{J_1(p)}{2p^2} \cos^2 q - \left(\frac{p}{4} \right)^2 \dots\dots\dots(24)$$

ただし、 $p = 4h^{1/2}$, $q = 2(u+t)$ 。 $J_0(p)$, $J_1(p)$ は、0, 1 次の Bessel 関数である。

2. (2) の Run-up フロントの支配方程式を検討しよう。式 (21), (22), (23), (24) に微分演算を施して、例えば、 $\alpha^0 = (-p \partial p / \partial x)_{p=0/8}$ などとして次式を得る。

$$t = (q + \cos q) / 2 \dots\dots\dots(25)$$

$$u^0 = -\cos q / 2 \dots\dots\dots(26)$$

$$\alpha^0 = (1 - \sin q)^{-1} \dots\dots\dots(27)$$

$$\beta^0 = -\cos q / (1 - \sin q)^2 \dots\dots\dots(28)$$

$$\alpha_x^0 = -(3 + \sin q) / (1 - \sin q)^3 \dots\dots\dots(29)$$

$$x^0 = -(2 \sin q + \cos^2 q) / 8 \dots\dots\dots(30)$$

$$\beta_x^0 = \frac{\cos q}{3} \cdot \frac{(1 + \sin q)}{(1 - \sin q)^4} \dots\dots\dots(31)$$

一方、式 (30), (32) を用いて式 (4), (6), (7), (8), (9) より、 $u^0, \alpha^0, \beta^0, \alpha_x^0, \beta_x^0$ を順次得るが、これらは式 (26), (27), (28), (29), (31) と一致する。

$$dt = (1 - \sin q) / 2 \cdot dq \dots\dots\dots(32)$$

以上で、2. (2) の Run-up フロントの支配方程式が成立することがわかった。次に、不等式 (11) を評価すると式 (33) となり、式 (9) の近似式 (9)' が成立することがわかる。

$$\gamma = \frac{|\alpha^0 \beta_x^0|}{|\alpha_x^0 \beta^0|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + \sin q}{3 + \sin q}, \quad 0 \leq \gamma \leq \frac{1}{6} \dots\dots\dots(33)$$

さて、運動は周期 2π の定常波なので、 $\pi/2 \leq q \leq 5\pi/2$ とするが、最大打ちあげ高位置 $q = 3\pi/2$ で $x^0, \alpha^0, \alpha_x^0$ は対称、 u^0, β^0 は反対称となるので、半周期 $\pi/2 \leq q \leq 3\pi/2$

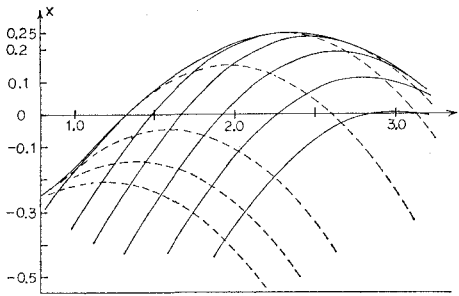


図-1 定常波解 $\phi = J_0(p) \cos q$ の特性曲線図
—— 正の特性曲線, --- 負の特性曲線

とする。図-1 の特性曲線図でわかるように、フロントは、正の特性曲線が負の特性曲線として、順次、反射する包絡線である。(図-1)

(2) $-\infty < z < -1.5$ の分岐解

式 (25), (26), (27), (28), (29), (30), (31) の特徴を有し、周期運動を表現しうる解は、 $-\infty < z < -1.5$, $C_\beta \geq 0$ の分岐解である。特に、 $C_\beta < 0$ の場合、フロントの水面勾配 α^0 は、有限時間で必ず ∞ となる。この性質は、基礎式 (1), (2) で記述される Run-up フロントの碎波の近似的モデルを与えるものと考えられる。

半周期では、 $C_\beta > 0$ として積分常数を定める。 $q = \pi/2$ は特異点なので、 $q = \pi$ で初期条件を与え、 $C_a = 1.76$, $C_\beta = 1.86$, $C_u = 2.25$, $C_x = -2.30$, $C_t = 0.56$ となる。表-1 に、 $u^0, x^0, \alpha^0, \beta^0, \alpha_x^0$ の両者の比較を示す。(表-1)

表-1 $x^0, u^0, \alpha^0, \beta^0, \alpha_x^0$ の比較 (左欄が定常波解, 右欄が分岐解 $-\infty < z < -1.5$, $C_\beta > 0$)

t	x^0	u^0	α^0	β^0	α_x^0
$\frac{\pi}{4}$	-0.25	0	∞	∞	$-\infty$
0.81	-0.25 -0.25	0.29 0.39	5.24 2.18	16.1 2.29	-547. -4.77
0.85	-0.23 -0.23	0.40 0.43	2.43 1.83	4.76 1.93	-51.2 -3.66
1.07	-0.13 -0.13	0.50 0.50	1.00 1.00	1.00 1.00	-3.00 -1.48
1.25	-0.04 -0.04	0.48 0.47	0.76 0.74	0.56 0.66	-1.20 -0.95
1.36	0.01 0.01	0.45 0.44	0.69 0.66	0.42 0.54	-0.83 -0.79
1.61	0.11 0.11	0.35 0.34	0.59 0.53	0.24 0.32	-0.46 -0.57
1.75	0.16 0.15	0.29 0.27	0.55 0.49	0.18 0.24	-0.37 -0.51
2.04	0.23 0.21	0.15 0.12	0.51 0.45	0.08 0.09	-0.28 -0.44
$\frac{3}{4}\pi$	0.25	0	0.50	0	-0.25

解は、 $q = \pi/2$ の近傍を除けば、運動を良く表現する。より高次項を含めた支配方程式とすれば、より良い近似となるが、より多くの条件が積分常数を定めるのに必要となる。

4. 非周期解

(1) 段波崩壊後の Run-up フロントの解析

図-2 のように、水平勾配部より一様勾配斜面へ段波が入射する流れを取扱った Hibberd & Peregrine の結

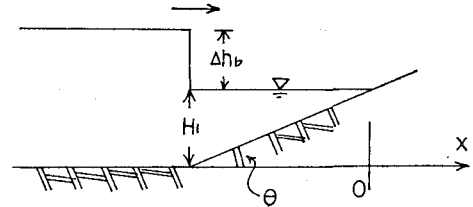


図-2 一様勾配斜面に入射する段波 ($x=0$; 静止時の汀線位置, Δh_b ; 段波波高)

果¹²⁾ (段波波高 $\Delta h_b/H_1 = 0.6$) を用いて、非周期解を検討する (図-2)。

Keller, Levine, & Whitham によれば¹³⁾, 段波が静止時の汀線に到達すると ($t = \tau_s, x = 0$), 段波波高はゼロとなり、流速も一定値 U_s となる。これより Run-up を開始し、Back-wash 時に形成される段波と出会うまでが、解析の対象となる。段波崩壊時に有心の負の特性曲線群が発生するので¹⁴⁾, フロントは包絡線と異なる性質を有する。しかし、Run-up フロントの運動が、フロントの支配方程式で記述されることに変わりはない。周期解とは異なり、最大打ちあげ高位置で、非対称な性質を持ち、 β^0 は正値で極大値を経て $t \rightarrow \infty$ でゼロに漸近する。 α^0 およびフロント近傍の水深は、Back-wash においても、漸減する。

(1) $-1 < z < \infty$, $C_\beta > 0$ の分岐解

上述の特徴を有する解は、 $-1 < z < \infty$, $C_\beta > 0$ の分岐解で、志村が Dam-break-wave フロントに対して得た近似解もこれに相当する¹⁵⁾。Hibberd & Peregrine の差分計算は、フロントで安定した解の振動を示しており、厳密とはいえないが、初期条件として $t = 0.76, x^0 = 0.047, u^0 = 1.4, \alpha^0 = 15.0, \beta^0 = 1.4$ をグラフより用いる。積分常数を定めるのに、他の条件が必要である。式 (17) より式 (34) を得る。

$$u_\infty + t_\infty = C_u + C_a/C_\beta \dots \dots \dots (34)$$

($u_\infty + t_\infty$) は、仮想上 $t \rightarrow \infty$ でフロントに到達する正の特性曲線上の Riemann 不変量と極限で一致する。この値が、Limiting-line¹⁶⁾ 上のものと異なれば、発生する負の特性曲線群は有心波ではあり得ない。故に、式 (35) を得る。

$$C_u + C_a/C_\beta = U_s + \tau_s \dots \dots \dots (35)$$

$\Delta h_b/H_1 = 0.6$ に対して、Keller, Levine, & Whitham の理論より、 $U_s = 2.51, \tau_s = 0.62$ となる。以上の条件より、 $C_a = 60.3, C_\beta = 59.2, C_u = 2.12, C_x = -1.28, C_t = 0.76$ となる。図-3 に x^0, u^0 , 図-4 に α^0 , 図-5 に β^0 の分岐解との比較を示す。(図-3, 図-4, 図-5)

初期条件に含まれる誤差を考えると、解は運動を良く表現している。著者の解析によれば、フロントの水面勾配 α^0 の効果は、段波崩壊後のわずかな時間に限られる。

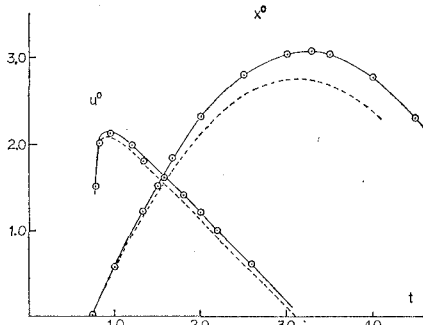


図-3 フロント軌跡 x^0 , フロント流速 u^0 の比較 (○—○ Hibberd & Peregrine, --- 分岐解 $-1 < z < \infty$, $C_\beta > 0$)

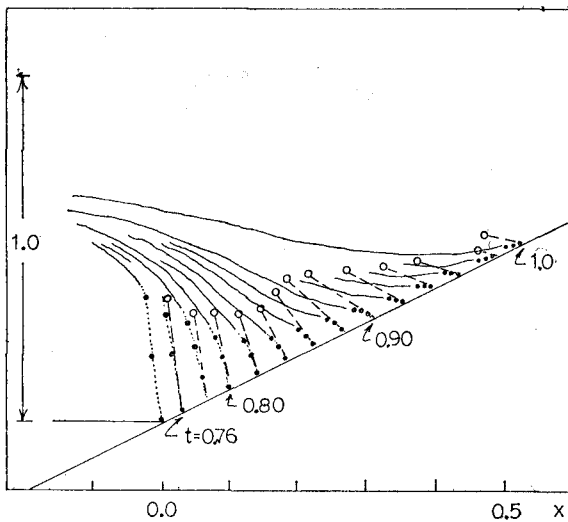


図-4 フロント水面勾配 α^0 の比較 (—●—●—● Hibberd & Peregrine による水面形, ○--- 分岐解 $-1 < z < \infty$, $C_\beta > 0$)

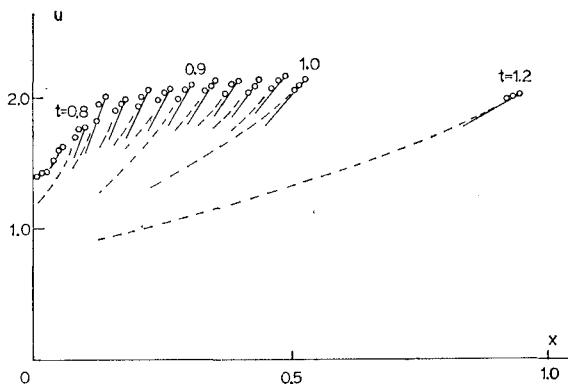


図-5 フロント流速の勾配 β^0 の比較 (---○---○ Hibberd & Peregrine, — 分岐解 $-1 < z < \infty$, $C_\beta > 0$)

5. 結 言

① 水平床で得られた水深ゼロのフロントの運動理論

を一樣勾配斜面へ拡張し、非線型浅水理論の基礎式より、Run-up フロントの支配方程式を得た。

② Run-up フロントの支配方程式を近似化して、その非線型解を得た。特にフロント軌跡 x^0 , フロント速度 u^0 は、フロント水面勾配と自由落下にもとづく運動を示す2項からなり、フロントの水面勾配 α^0 を含めた運動の解析が可能となった。

③ 得られた分岐解より、段波を含まない定常波解および段波を含む非周期解の代表的例について、Run-up フロントの検討を行なった。

定常波解の検討より、Run-up フロントの支配方程式が成立することが、明確となった。

3つの分岐解のうち a) $-\infty < z < -1.5$, $C_\beta \geq 0$ の解は、最大打ちあげ高位置で対称な周期運動を、b) $-1 < z < \infty$, $C_\beta > 0$ の解は、一樣勾配斜面に入射する段波の崩壊後の非対称な非周期運動を、 $\alpha^0 = \infty$ の近傍を除けば、各々良く表現する。

④ ③, a) の $C_\beta < 0$ の解は、有限時間で $\alpha^0 \rightarrow \infty$ となる事から、基礎式 (1), (2) で記述される Run-up フロントの碎波の近似的モデルであることが期待される。 $-1.5 < z < -1$ の分岐解が如何なる場合に有効であるか、又、解の分岐の原因・指標について、今後、検討する必要がある。

謝辞； 本研究にあたっては、東京大学教授・志村博康博士、農業土木試験場・木ノ瀬紘一博士より、貴重な御助言を戴いた。ここに、記して感謝の意を表する。

引用文献

- 1) 志村博康：前方水位のない Dam-break-wave のフロントの非粘性解（ゲート急開直後に生ずる流れの研究），農土論集第 60 号，pp. 33~39, 1975.
- 2) 島田正志：ゲート開放に伴う不定流の基礎的研究，東京大学学位論文，1978.
- 3) 島田正志：ゲート急開放により発生するフロントの運動理論（準備中）.
- 4) Hibberd, S. and D. H. Peregrine: Surf and run-up on a beach, a uniform bore, J. Fluid Mech., Vol. 95, Part 2, pp. 323~345, 1979.
- 5) 前出 1).
- 6) 前出 1).
- 7) 志村博康：前方水位のない Dam-break-wave フロントの非粘性解（Ⅱ），農土大会講演要旨，pp. 160~161, 1976.
- 8) 前出 3).
- 9) 前出 2).
- 10) 前出 2).
- 11) Carrier, G. F. and H. P. Greenspan: Water waves of finite amplitude on a sloping beach, J. Fluid Mech., 4, pp. 97~109, 1958.
- 12) 前出 4).
- 13) Keller, H., D. A. Levine and G. B. Whitham: Motion of a bore over a sloping beach, J. Fluid Mech.,

- 7, pp. 302~316, 1960.
- 14) 前出 4).
- 15) 前出 1).
- 16) Ho, D. V. and R. E. Meyer: Climb of a bore on a beach. Part 1. Uniform beach slope, J. Fluid Mech., 14, pp. 305~318, 1962.
-