

Cokelet の理論による波の浅水変形

酒 井 哲 郎*・J. A. Battjes**

1. ま え が き

最近, 定形の有限振幅波理論において新しい展開があり, とくに Cokelet¹⁾ は, Longuet-Higgins and Fenton²⁾ および Longuet-Higgins³⁾ が夫々, 孤立波と深海波について, 波速, 波のエネルギー, エネルギーフラックスなどが波高の増大とともに最高波高に到達する前に極大値に達することを明らかにしたが, これが任意の水深・波長比の場合についても成立することを明らかにした. 彼は, 新しい級数展開のパラメータを用いて, 任意の水深・波長比, 任意の波形勾配で収束する解を見出した. 波形勾配が大きくなり, 水深・波長比が小さくなるほど精度は減少するものの, 彼の理論は実用上は定形進行波の厳密解を与えたものと考えることが出来る. ここでは, この理論を波の浅水変形の計算に用い, その結果を従来の低次の有限振幅波理論を用いた波の浅水変形の理論と比較して, 従来の理論の精度を検討するとともに, 実験結果とも比較する.

2. Cokelet の理論¹⁾

Cokelet が扱ったのは, 定形, 2次元, 非回転, 周期的重力波であって, ここでは後の議論に関係する点のみについて述べる. 彼の理論では, すべての水理量は波数 k , 流体の密度 ρ および重力加速度 g によって無次元化されている. 座標系は, x 軸が波の進行方向の水平座標, y 軸が鉛直上向き座標である. $y=0$ は, 平均水面とは一致していない. 自由水面は $y=\eta(x,t)$ で与えられ, 底面は $y=-d$ で与えられるので, 平均水深 h は $h=d+\bar{\eta}$ (ここに, “ $\bar{}$ ” は時間平均を意味する) で与えられる. この Oxy 座標での x, y 方向の水粒子速度を夫々 u, v , 波速を c で表わす. この座標系は, 波の谷より下の水中のあらゆる点で $\bar{u}=0$ となるように選ばれており, したがって, 平均の波の質量輸送

$$I = \int_{-d}^{\eta} \rho u dy \quad \dots\dots\dots (1)$$

は 0 ではない.

複素座標の関数としての複素速度ポテンシャルを, フーリエ級数展開した. その場合, ラプラスの式および底面および水面での運動学的条件は正確に満足されている. 自由表面での力学的条件から, フーリエ級数を決定する一連の非線型の代数方程式が得られる. これらの非線型方程式の解として, Cokelet は, 新しいせつ動パラメータ

$$\epsilon^2 = 1 - \frac{q_{\text{crest}}^2 \cdot q_{\text{trough}}^2}{c^4} \quad \dots\dots\dots (2)$$

のべき級数展開を用いた. ここで $q_{\text{crest}}, q_{\text{trough}}$ は, 波とともに移動する座標系における波の峯および谷の自由表面での水粒子速度である. このパラメータは波の非線型性の程度を表わすもので, 微小振幅波では 0, 最高波で 1 となる. 同じ ϵ のべきの係数を等しいとおくと係数を求める式が得られるが, これらの値は電子計算機を用いて求められた.

Cokelet は, 計算された無次元の種々の水理量 (半波高 a , 波速の二乗 c^2 , 質量輸送 I , ラディエーション応力 S_{xx} , 位置エネルギー V , 運動エネルギー T およびエネルギーフラックス F) の値を, ϵ^2 と相対水深 kd の関数として表に示している.

3. 浅水変形計算

(1) 仮 定

ここでは古典的な浅水変形の問題, すなわち緩勾配の不透過な海底面を考え, 反射, エネルギー損失を考えない. 底勾配は十分に小さく, 一様水深の理論を使えるとする.

(2) 座 標 系

上記の状況を考えて, 運動を海底に固定された座標系から見ることにする. この座標系を $Ox'y'$ とすると, 波の峯とエネルギーの保存より, 波の周波数 σ' とエネルギーフラックス F' は一定となる (ここで “ $\prime$ ” は $Ox'y'$ 座標での水理量を意味する). また $Ox'y'$ 座標系での平均の質量輸送 I' は 0 であるが, Cokelet の用いた座標系 Oxy では質量輸送 I は 0 ではない. このように, $Ox'y'$ 座標は Oxy 座標に対して,

$$U = I/(\rho h) \quad \dots\dots\dots (3)$$

* 正会員 工博 京都大学助教授 工学部土木工学科

** Dr. Eng. デルフト工科大学教授 土木工学科

の相対速度を有している。ここでは Cokelet の結果を、 $0xy$ 座標での水平方向水粒子速度および波速から U だけ差し引くことにより、 $0x'y'$ 座標での量に変換した。

$$u' = u - U, \quad c' = c - U \dots \dots \dots (4)$$

これを、波の周波数とエネルギーフラックスに対して行なうと、

$$\sigma' = \left(c - \frac{I}{\rho h} \right) \cdot k \dots \dots \dots (5)$$

$$F' = F - \frac{I}{\rho h} (T + V + S_{xx}) + \frac{I^3}{\rho^2 h^2} \dots \dots \dots (6)$$

が得られる。

(3) 無次元化

Cokelet は、すべての水理量を ρ, k および g で無次元化した。こうして無次元化された量に “ $\sim$ ” をつけて示すと、エネルギーフラックスに関しては、

$$\tilde{F}' = \frac{k^{5/2}}{\rho g^{3/2}} \cdot F' \dots \dots \dots (7)$$

が得られる。この無次元化は、浅水変形の過程では k が変化するので、ここでの目的には適していない。ここでは、 k よりも浅水変形においても変化しない σ' を用いた方がよい。こうして得られる無次元量を “ $\star$ ” で示すと、

$$\tilde{F}'^{\star} = \frac{\sigma'^5}{\rho g^4} F' \dots \dots \dots (8)$$

が得られる。式 (7) を式 (8) に代入し、 $\sigma' = c' \cdot k$, $c' = (g/k)^{1/2} \cdot \bar{c}'$ の関係および式 (3), (4), (6) を用いると、最終的に次式が得られる。

$$\tilde{F}'^{\star} = \left(\bar{c}' - \frac{\tilde{I}}{\bar{d} + \bar{\eta}} \right)^5 \cdot \left\{ \tilde{F} - \frac{\tilde{I}}{\bar{d} + \bar{\eta}} (\tilde{T} + \tilde{V} + \tilde{S}_{xx}) + \frac{\tilde{I}^3}{(\bar{d} + \bar{\eta})^2} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

(4) 浅水変形計算の方法

式 (9) によって、 $0x'y'$ 座標での、ここでの目的に合ったように無次元化されたエネルギーフラックスが、 ϵ^2 と kd の関数として、Cokelet が表にした無次元量によって完全に与えられる。周波数 σ' とエネルギーフラックス F' は浅水変形の過程において一定であるから、 $\tilde{F}'^{\star}$ も一定である (式 (8))。したがって、どこでもその沖での値 $\tilde{F}'_0^{\star}$ に等しい:

$$\tilde{F}'^{\star}(\epsilon^2, kd) = \text{const.} = \tilde{F}'_0^{\star} \dots \dots \dots (10)$$

浅水変形計算の過程は、簡単に述べると次の通りである。まず、沖波波形勾配 $H_0/\lambda_0 = \pi^{-1} \cdot k_0 \cdot a_0$ が与えられる (λ は波長, “0” は沖波の値を意味する)。この値から沖での ϵ^2 の値 (ϵ_0^2) が決まり、さらに $\tilde{F}'_0^{\star}$ を含めて沖での諸量が決まる。与えられた kd の値に対して、式 (10) を ϵ^2 について解く (図-1 参照)。求められた ϵ^2 の値と kd の値から、この水深での ka , $k\bar{\eta}$, k/k_0 等の無次元量の値が決まり、したがって波高比 $H/H_0 = a/a_0$

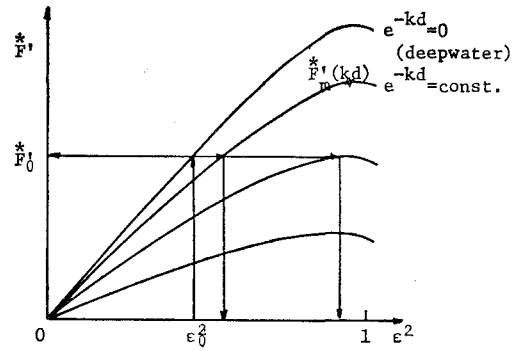


図-1 浅水変形計算の方法

が H_0/λ_0 の値をパラメータとして、相対水深 $h/\lambda_0 = (d + \bar{\eta})/\lambda_0$ の関数として求められる。

ϵ^2 と kd の関数としての $\tilde{F}'^{\star}$ の変化は、基本的には $\tilde{F}$ と同じ、すなわち相対水深 kd を一定とすると、 $\tilde{F}'^{\star}$ は 1 より小さい ϵ^2 の値で極大値 ($\tilde{F}'_m^{\star}$) をとる (図-1)。したがって、 $\tilde{F}'_m^{\star}$ が与えられた沖での $\tilde{F}'_0^{\star}$ の値より大きいような kd の値の大きい場合にのみ、式 (10) は解を有する。 $\tilde{F}'_m^{\star}(kd)$ が $\tilde{F}'_0^{\star}$ より小さいような浅い水深では、波は必要なエネルギーフラックスを維持できない。 $\tilde{F}'_m^{\star} = \tilde{F}'_0^{\star}$ となる点 (この位置は $\tilde{F}'_0^{\star}$, つまり H_0/λ_0 によって決まる) を、とりあえず砕波点と呼ぶことにする。浅水変形計算は、この点まで行なった。

Cokelet の表では、 ϵ^2 の値は 0 から 0.8 までは 0.1 毎に、0.8 から 1.0 までは 0.01 毎に、また e^{-kd} の値は 0 から 0.9 まで 0.1 毎に、種々の水理量の値が示されている。浅水変形計算では 0 から 0.8 までの ϵ^2 の値の間隔は粗すぎるので、各 e^{-kd} の値に対して、 ϵ^2 の 0 から 1.0 までの 0.1 毎の 11 種類の値に対する諸量の値を読みとり、電子計算機を用いて cubic spline により、 ϵ^2 の 0 から 0.8 までの 0.01 毎の値を補間した。こうして得られた値は、 e^{-kd} の値の間隔を 0.1 から 0.02 にするための補間に用いられた。こうすることによって、浅水変形の曲線が滑らかに描けることになる。ただし、砕波点近傍ではその変化が急なため、 kd に関してさらに細かい間隔での値が必要となった。砕波点を決定するために、砕波点近傍では式 (10) を e^{-kd} の 10^{-4} 精度で計算した。

4. 結果と考察

(1) 結果

計算は、0.001 から 0.1 までの 11 種類の H_0/λ_0 の値に対して行なった。 H/H_0 の計算値を h/λ_0 の関数として図にプロットし、それらの点を通して滑らかな曲線を描いた。結果は 図-2 の実線で示されている。 $H_0/\lambda_0 = 0$ の曲線は、微小振幅波理論による曲線である。Cokelet の理論による曲線の砕波点は、曲線で結ばれている。注

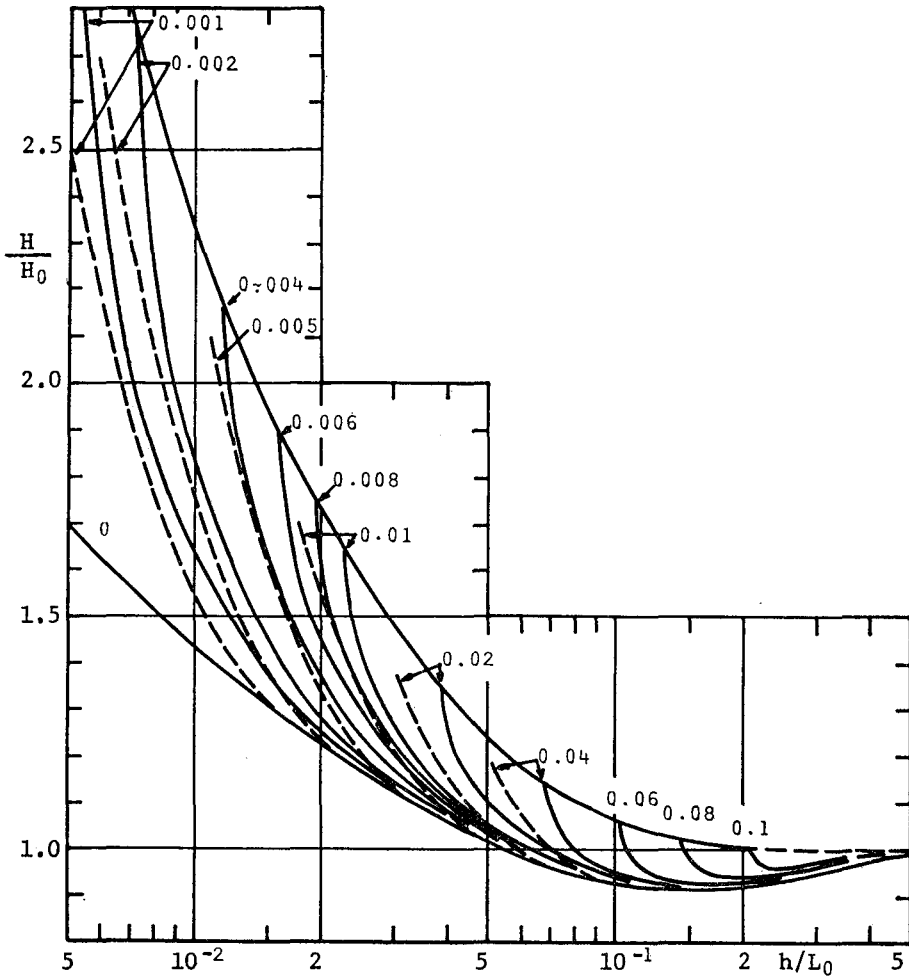


図-2 実線: Cokelet¹⁾ の理論による浅水変形曲線, H_0/λ_0 の値が示されている, 破線: 港湾の施設の技術上の基準・同解説⁵⁾ (昭和54年運輸省港湾局監修) に示されている首藤⁴⁾ による浅水変形曲線 (文献 5) p. 2-94 の図一解 4.30 より), H_0/L_0 の値が示されている。

意しなければならないことは, λ_0 が非線型の効果を含んだ沖波波長である点である。微小振幅波の沖波波長 L_0 とは異なり, 両者の比を表-1 に H_0/λ_0 の値に対して示している。

表-1 沖波波表に対する非線空性の効果

H_0/λ_0	$0 \leq H_0/\lambda_0 \leq 0.02$	0.04	0.06	0.08	0.10
λ_0/L_0	$1 \leq \lambda_0/L_0 \leq 1.01$	1.02	1.04	1.07	1.10

$H_0/\lambda_0 \leq 0.04$ の範囲では, H_0/λ_0 と H_0/L_0 の相違による違いは無視しうる。

(2) 砕波点近傍の浅水変形曲線

砕波点近傍の浅水変形曲線の勾配は, きわめて急である。これは, 波のエネルギーフラックスが砕波点で ϵ^2 に関して極大値をとるという事実の当然の結果である。このことは, エネルギーフラックスを一定とし

た場合, 砕波点での ϵ^2 の値をわずかに変化 ($\partial \epsilon^2$) させても, kd の値は変化しないということを意味している ($\partial(kd)/\partial \epsilon^2|_{\epsilon^2=\text{const.}}=0$)。 kd が一定の場合, 波形勾配は ϵ^2 の単調増加関数であるので, 浅水変形の曲線の勾配 $\partial(H/H_0)/\partial(h/\lambda_0)|_{H/\lambda_0=\text{const.}}$ は砕波点で無限大となる。このことは, 波の諸量の変化がゆるやかであるというここでの浅水変形の計算の仮定に反する。したがって, 砕波点に近づくにつれて, 浅水変形計算に Cokelet の理論を用いることに矛盾が生じてくる。砕波点近傍の波の挙動は, どんなに底勾配が緩くても, この理論からは推定できない。

(3) 従来の浅水変形曲線との比較

従来の低次の有限振幅波理論にもとづく浅水変形曲線として, Stokes 波の第3次近似解にもとづく Le Méhauté and Webb⁶⁾, Laitone のクノイド波の第2近似解の近似表現であるハイパボリック波を用いた岩垣・酒井⁷⁾,

Laitone のクノイド波の第1近似解を用いた Svendsen and Brink-Kjaer⁹⁾, 水深の変化の効果を含めた非線型の浅水理論を解いた首藤¹⁰⁾および Chappellear のクノイド波の第2近似解にもとづく山口・土屋⁹⁾の5種類の曲線と比較した。図-2には、最近出版された運輸省港湾局監修の“港湾の施設の技術上の基準・同解説”(昭和54年)⁹⁾に示されている首藤の曲線との比較を示している。図からわかるように、首藤の曲線は、全体に Cokelet の理論にもとづく曲線と比べて波高比が小さく、とくに砕波点に近づくにつれてその差が大きくなっている。Svendsen and Brink-Kjaer の曲線を除く他の理論曲線のいずれについても、この傾向は同じであり、その差はほとんどないが、全体的には、岩垣・酒井および山口・土屋の2種類の曲線がもっとも Cokelet の理論による曲線に近い。ただし、山口・土屋の曲線は、Svendsen and Brink-Kjaer の曲線ほどではないにしても、相対水深の大きいところで微小振幅波の値よりも値が小さくなる領域がある。

すでに(2)で述べたように、Cokelet の理論の砕波点近傍での適用には問題がある。したがって、たとえ定形波の厳密解であっても、波の浅水変形計算にその解を用いた場合、必ずしも近似解を用いたものよりもより精度のよい結果を与えるとはかぎらない。皮肉にも、従来の低次の有限振幅波理論にもとづく浅水変形曲線においては上述のような問題はない。なぜならば、これらの低次の理論ではエネルギーフラックスは波高の単調増加関数であるからである。

(4) 実験値との比較

浅水変形の実験データとして、Svendsen and Buhr-Hansen¹⁰⁾のものを理論曲線と比較した。彼らの実験は1/35勾配の斜面上で行なわれ、6ケースの波高変化が示されている。実験値そのものは彼らの論文には示されていないので、直接彼らからデータを得た。斜面先端での波の周期、波高、平均水深から、Cokelet の理論にもとづく曲線を用いて、沖波波形勾配 H_0/L_0 を計算した。斜面と水槽側壁での摩擦による波高減衰を見つめるため、Hunt¹¹⁾の理論を用いた。この理論では微小振幅で層流境界層の場合を扱っているが、波高減衰そのものの程度が小さいので、この理論で十分と考えられる。理論による波高 H は、 $Ca \cdot H_0 \cdot (H/H_0)_t$ として求めた。ここで、 Ca は上述の波高減衰率、 $(H/H_0)_t$ は Cokelet の理論にもとづく曲線から求めた波高比である。

図-3は、こうして得られた理論波高と実験値を比べたもので、6ケースのうち3ケースを示している(T : 波の周期)。図から明らかなように、ここに示さなかった他の3ケースも含めて、実験値と理論値との一致は、砕波点近傍を除いてよい。砕波点近傍では理論値の方がより急激に増大する。その理由は(2)で述べたとおりである。なお、Svendsen and Buhr-Hansen は、彼らの実験値を Svendsen and Brink-Kjaer⁹⁾の浅水変形の曲線と比べている。理論値は砕波点近傍でも実験値とほぼ一致している。ただしこれは、理論曲線の方を、 $h/L_0=0.1$ で微小振幅波の理論値と一致するように修正した後の比較であって、この場合そこでエネルギーフラックスは不連

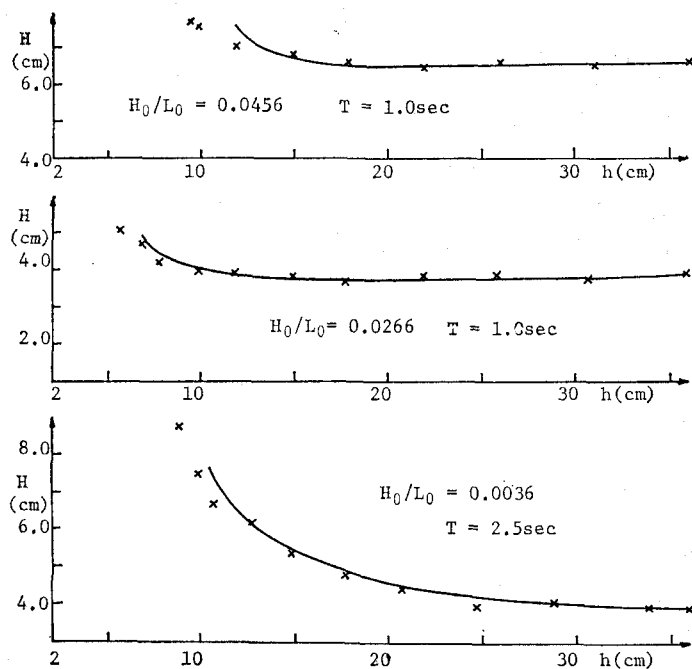


図-3 Svendsen and Buhr-Hansen¹⁰⁾ の実験値との比較

続である。

ここでは、従来の浅水変形曲線の精度を量的に検討しないが、図-3の実験値とCokeletの理論にもとづく曲線との比較から、Cokeletの理論にもとづく曲線の適用範囲を決めれば、その範囲内で例えば首藤による曲線の値がCokeletの理論にもとづく曲線の値よりどの程度小さいかは容易にわかる。

5. 謝 辞

この研究に当り、Dr. E. D. Cokelet は彼の理論における種々の水理量の補間値の表を提供してくれた。この表は、この研究の初期の段階において有益であった。ここに謝意を表する。また、実験値のデータ表を提供してくれた Dr. Ib. A. Svendsen に対しても感謝する。なお、この研究は著者の一人、酒井がデルフト工科大学滞在中に行なった研究の1つで、電子計算機の利用に関して、同大学土木工学科の Mr. S. de Boer にお世話になった。最後に著者の1人、酒井は、リサーチフェローシップを与えてくれたデルフト工科大学に感謝する。

参 考 文 献

- 1) Cokelet, E. D.: Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth, Trans. R. Soc. Lond. 286, A1335, pp. 183~230, 1977.
- 2) Longuet-Higgins, M. S. and J. D. Fenton: On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave, II, Proc. R. Soc. Lond. A340, pp. 471~493, 1974.
- 3) Longuet-Higgins, M. S.: Integral properties of periodic gravity waves of finite amplitude, Proc. R. Soc. Lond. A342, pp. 157~174, 1975.
- 4) Shuto, N.: Non-linear long waves in a channel of variable section, Coastal Eng. in Japan, Vol. 17, pp. 1~12, 1974.
- 5) 運輸省港湾局 (監修): 港湾の施設の技術上の基準・同解説, 日本港湾協会, p. 2~94, 1979.
- 6) Le Méhauté, B. and L. M. Webb: Periodic gravity waves over a gentle slope at a third order approximation, Proc. 9th Conf. Coastal Eng., pp. 23~40, 1964.
- 7) 岩垣雄一・酒井哲郎: 有限振幅波の Shoaling について, 第 14 回海岸工学講演会講演集, pp. 1~7, 1967.
- 8) Svendsen, I. A. and O. Brink-Kjaer: Shoaling of cnoidal waves, Proc. 13th Conf. Coastal Eng., pp. 365~383, 1972.
- 9) 山口正隆・土屋義人: 有限振幅波理論に基づく波の Shoaling について, 第 22 回海岸工学講演会論文集, pp. 59~63, 1975.
- 10) Svendsen, I. A. and K. Buhr-Hansen: Deformation up to breaking of periodic waves on a beach, Proc. 15th Conf. Coastal Eng., pp. 477~496, 1976.
- 11) Hunt, J. N.: Viscous damping of waves over an inclined bed in a channel of finite width, La Houille Blanche, pp. 836~842, 1952.