

数値解析による浅海波の変形特性

——波数周波数スペクトルとバイスペクトルによる検討——

石田 昭*・高橋宏直**・金沢和幸***

1. はしがき

余弦波形を持つ波が一様水深の浅水領域に進入した場合の非定形波現象を Zabusky ら¹⁾が用いた KDV 方程式にもとづく数値解析法および波数周波数スペクトル解析法を適用することによってしらべた。前報²⁾では初期波形のアーセル数が 200 を越えると波数周波数成分の振幅の値が不連続になるという解析上の不備があった点を改良し、新たに波数周波数成分の振幅 A_{ij} と初期波高の振幅 $H_0/2$ との比をアーセル数の関数として与えることができたので、初期波高 H_0 、水深 h 、および周期 T がわかると時空間波形の変形の様子を知ることが可能となった。さらに現地海岸での不規則波をしらべるための第一段階として変形波の特性とバイスペクトルの関連を研究した。

2. 非定形浅水波の波数周波数成分

前報²⁾と同じ解析法により初期波高が 2 cm から 22 cm までの余弦波形をアーセル数が 20 から 360 までの間で前報の結果も含めて 31 ケースの初期波形条件を設定して解析した。前報では振幅が大きい 7 成分を再合成して非定形波の特性をしらべたが、ここでは精度を高めて 15 成分の場合についてもしらべた。また各成分 A_{ij} の波数と周波数は図-1 に示すような関係がある。

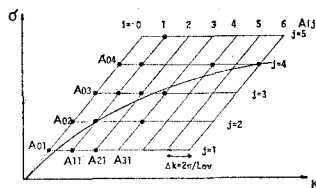


図-1 15 個の波数周波数成分の取りかた

各成分波の波高 $2A_{ij}$ と初期波高 H_0 との比を α_{ij} として横軸に初期波のアーセル数 $U_r = H_0 L^2 / h^3$ を取って示すと図-2 (a)~(c) のようになる。アーセル数が 30 程度までの間は振幅の 90% 以上を基本波 A_{01} が占めているが、それ以上になるとストークス波的成分 A_{02} および Fontanet 波 A_{12} が大きくなりはじめ、アーセル数が

100 以上になるとこれらの値も減少するようになって、さらに他の成分が成長し始めることがわかる。基本波と Fontanet 波との二次干渉によって発生すると推定される和の波 A_{13} と差の波 A_{11} はアーセル数が 200 を越えると減少を始めるので、この付近からさらに複雑な非線型干渉が開始するものと思われる。アーセル数が 300 を越えると基本波は初期波高の半分以下になってしまうこともわかる。図中の曲線は両対数をとって二次式に当てはめたもので、この時の係数を表-1 に示した。すな

表-1 波数周波数成分を表示するための係数

α_{ij}	a	b	c
α_{01}	-0.137	0.263	-0.118
α_{02}	-0.536	2.273	-2.817
α_{03}	-0.876	4.143	-5.552
α_{04}	-1.182	5.590	-8.258
α_{11}	-0.865	4.108	-5.379
α_{12}	-0.646	2.607	-3.075
α_{13}	-0.903	4.163	-5.406
α_{14}	-1.202	5.876	-7.929
α_{15}	-1.300	6.726	-9.601
α_{21}	-1.807	9.881	-14.136
α_{23}	-1.450	7.396	-10.071
α_{32}	-2.079	10.351	-13.714
α_{33}	-2.111	10.045	-12.543
α_{44}	-0.159	2.528	-6.045
α_{64}	-1.091	7.121	-11.820

$$\log_{10} \alpha_{ij} = a[\log_{10} U_r]^2 + b[\log_{10} U_r] + c$$

わち次式の係数 a, b, c を示している。

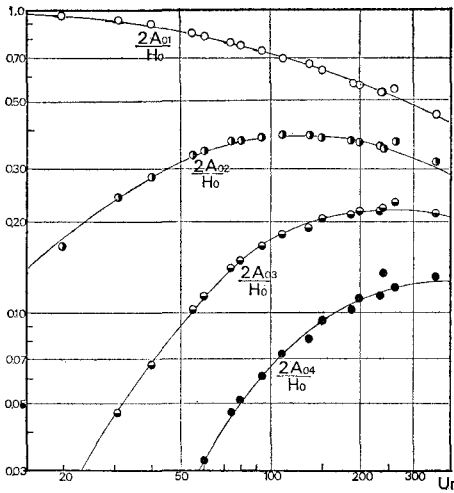
$$\log_{10} \alpha_{ij} = \log_{10} \left(\frac{2A_{ij}}{H_0} \right) = a[\log_{10} U_r]^2 + b[\log_{10} U_r] + c \quad \cdots \cdots (1)$$

U_r は初期波高 H_0 と周期 T および水深 h がわかれば図-5 から C_1 を読み取って決めることができる。また図-3 から再帰間隔 Lov も得られるので任意の波形を次式によって求めることができる。

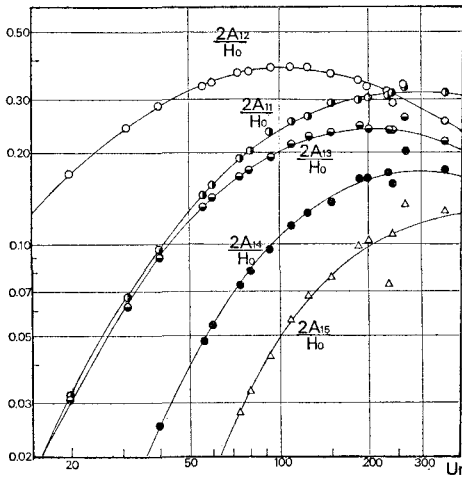
$$\eta(x, t) = \frac{H_0}{2} \sum_{i=0} \sum_{j=1} \left[\alpha_{ij} \cos \left\{ \left(j \frac{2\pi}{L} + i \frac{2\pi}{Lov} \right) x - \left(j \frac{2\pi}{T} \right) t + \theta_{ij} \right\} \right] \quad \cdots \cdots (2)$$

初期位相 θ_{ij} は時空間の原点で基本波 A_{01} の位相が 0 となるように換算してあるから、 $\theta_{01} = \theta_{02} = \theta_{03} = \theta_{04} = 0$,

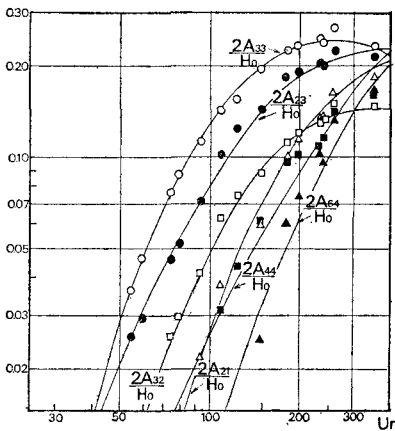
* 正会員 工博 名古屋工業大学助教授 工学部土木工学科
 ** 学生会員 名古屋工業大学大学院 土木工学科
 *** 大日本土木株式会社



(a)



(b)



(c)

図-2 各成分振幅 A_{i2} と初期波高 H_0 の関係

$\theta_{12} = \theta_{13} = \theta_{14} = \theta_{21} = \theta_{23} = \pi$, $\theta_{11} = 0.027$, $\theta_{15} = 3.05$, $\theta_{21} = 0.31$, $\theta_{32} = -2.78$, $\theta_{33} = 0.427$,

$\theta_{44} = 0.25$, $\theta_{64} = -1.92$ という値を取る。

3. 非定形浅水波の諸特性

(1) 非定形波の再帰間隔

一様水深の浅水領域での非定形波には波形が再び元に戻る再帰現象があり、その間隔は再帰間隔、追い越し間隔あるいは二次波峯発生間隔などの名で呼ばれている。この間隔 L_{ov} は合田を始めとする数多くの実験的研究によって波高水深比 (H/h) をパラメータとして水深波長比 (h/L) の関数で与えられることが判明している。今回の数値解析によって得られた L_{ov} の値も従来の研究結果とほとんど同じ値を示すが、図-3 のように $T\sqrt{gh}$ で無次元化した L_{ov} と無次元周期 $T\sqrt{g/h}$ との関係で示すと、波高水深比 H/h ごとに直線上にプロットされることがわかり、結局式 (3) の関係がある。

$$L_{ov} = K_0(gT^2 - 4\sqrt{gh} \cdot T)/2 \dots\dots\dots(3)$$

K_0 の値は $H/h=0.2$ の時 0.81 で H/h が大きくなると小さな値となるが $H/h=0.6$ における 0.67 ぐらいが下限の値と思われる。 L_{ov} は図中にも示すように基本波の波速 C_1 と 2 倍周波数を持つ自由波の波速 C_2 によって次のように与えられるものである。

$$L_{ov} = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1 C_2}{(C_1 - C_2)} \cdot T \dots\dots\dots(4)$$

図中の曲線は式 (4) の C_1, C_2 を周期が T および $T/2$ を持つ微小振幅波として計算したものであるが、波高水深比 H/h が小さくなった場合でも、この曲線と式 (3) は一致しないことがわかる。

(2) 平均波速と Fontanet 波の波速

ここで用いた Zabusky らの解析方法では線形長波の波速 $\sqrt{gh}$ で移動する座標軸からみた波形が得られる

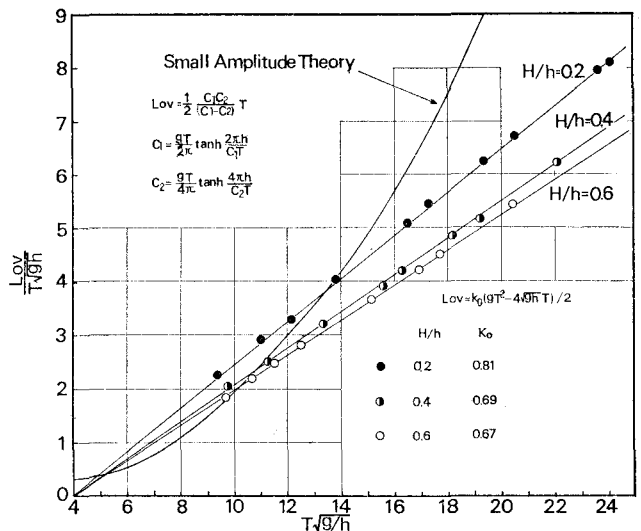


図-3 非定形波の再帰間隔 L_{ov} と無次元周期の関係

が、解析結果ではアーセル数が 50 以下では座標の移動の方が速く、50 以上では波の方が速く進行している。もちろん見掛け上の波峯の速度は場所的に若干変化しているが、ここでは再帰間隔 L_{ov} 内での平均波速 C_1 を上記のことを考慮に入れた補正を施して求めた。また

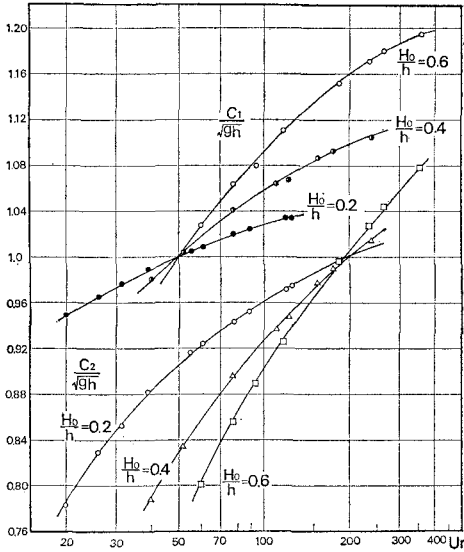


図-4 平均波速 C_1 および Fontanet Wave の波速 C_2 と初期波のアーセル数 U_r との関係

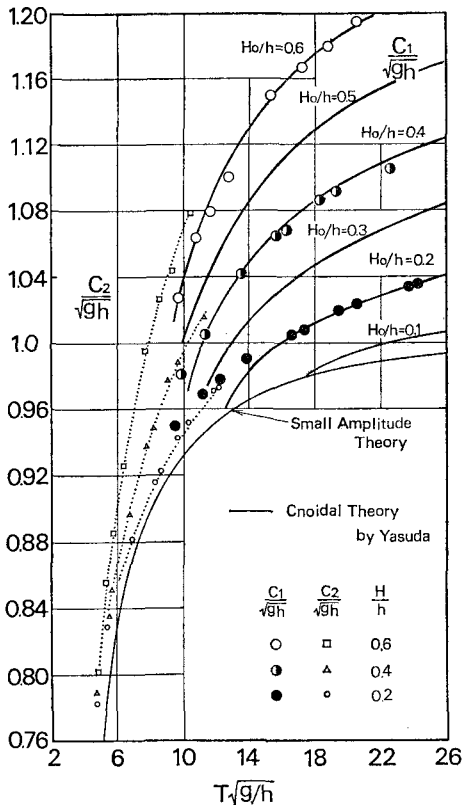


図-5 平均波速 C_1 および C_2 と無次元周期の関係

L_{ov} と基本波の平均波速 C_1 がわかれば式 (4) を使って Fontanet 波 (周期は $1/2T$) の波速 C_2 も得ることができる。こうして求めた C_1 および C_2 と $\sqrt{gh}$ との比を初期波のアーセル数 U_r との関係で示したのが 図-4 である。 C_1 はアーセル数が 50 以上になると、いずれの場合も $\sqrt{gh}$ より大きくなり、 C_2 は 200 以上になると $\sqrt{gh}$ よりも大きくなるのがわかる。 C_2 はアーセル数を $1/4$ にしてプロットすると C_1 と接続するような傾向を持っている。図-5 は横軸に無次元周期を取って示したもので Fontanet 波については横軸の無次元周期を半分にしてプロットしてある。図中の実線は新しいクノイド波理論の第一近似解として安田³⁾ が提案している次式

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \frac{4K}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{\frac{H}{h}} \cdot T \sqrt{\frac{g}{h}} \right)^{-1} \left\{ \dots (5) \right.$$

$$\left. \frac{C}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{2k^2} \left(\frac{H}{h} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + k^2 - 2 \right\} \right\}$$

において $H=H_0$ として示したものである。ここで K, E は第一種および第二種の完全だ円積分であり、 k はその母数である。数値解析によって得られる基本波の平均波速 $C_1/\sqrt{gh}$ は $C_1/\sqrt{gh} > 1.0$ すなわち $U_r > 50$ の場合には式 (5) と非常に良く一致することがわかった。また $C_2/\sqrt{gh}$ と $C_1/\sqrt{gh}$ は完全には接続していないこともわかる。

(3) 波形の諸特性

非定形波形の変形の様子は定性的には前報の 7 成分でも判明すると思われるが定量的にも明確にとらえるためにはさらに多くの成分波を重ねる必要があると思われる。特にアーセル数が 100 を越えると 図-2 でもわかるように振幅の大きい波がたくさん出現してくる。そこで二次波峯発生点における波峯位 η_1 と初期波高 H_0 の比および二次波峯位 η_2 と η_1 の比 (いずれも平均水面から

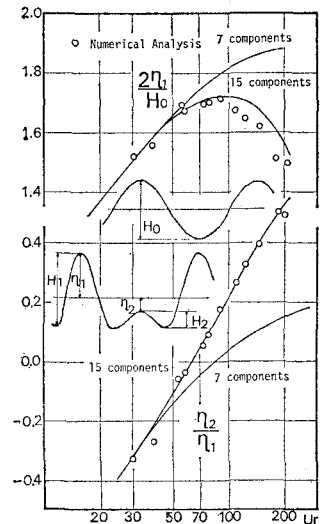


図-6 再合成する場合の成分波の個数とその精度の関係

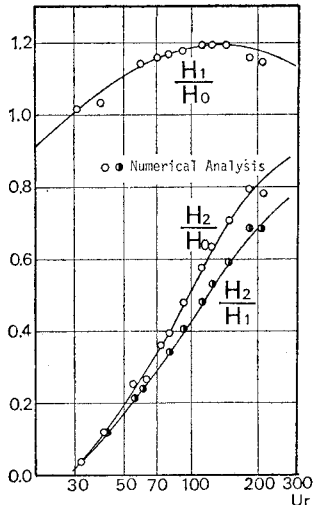


図-7 非定形波の諸特性と U_r の関係

計った距離)について7成分を再合成した場合と15成分を再合成した場合、および数値解析そのままの値の三者について比較したのが図-6である。いずれの場合もアーセル数が50を越えると7成分を合成したものは数値解析したそのままの値とかなり違っており、15成分程度合成する必要があることがわかる。それもアーセル数が200を越えると不十分となるようだ。図-7は前報でも示した非定形波の特性の一部を示したものであるが、15個の成分波を合成する場合には前報の7成分の場合のように簡略な数式表示ができないことから、数値解析した波形そのものから求めたものを示した。アーセル数が大きくなると前報とはかなり違った値を示すようになる。

4. バイスペクトルによる非定形性の評価

(1) バイスペクトルの振幅と位相

時間波形を解析して得られるバイスペクトル $B(\sigma_m,$

$\sigma_n)$ およびその位相 $\theta(\sigma_m, \sigma_n)$ は周波数成分を A_n 、初期位相を ε_n とすると次式で与えられる⁴⁾。

$$B(\sigma_m, \sigma_n) = A_{m+n} \cdot A_m \cdot A_n \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\theta(\sigma_m, \sigma_n) = \varepsilon_{m+n} - \varepsilon_m - \varepsilon_n \quad \dots\dots\dots (7)$$

非定形波形が上述したように15成分で与えられる場合でも一点で得られる時間波形は周波数の面だけから考えると、5個の周波数成分だけから成り立っている。この場合バイスペクトルは $B(\sigma, \sigma)$, $B(2\sigma, \sigma)$, $B(3\sigma, \sigma)$, $B(4\sigma, \sigma)$, $B(2\sigma, 2\sigma)$, $B(2\sigma, 3\sigma)$ の6成分が値を持つだけである。初期波形を余弦波と考えているので、 $x=0$ では $B \equiv 0$, $\theta \equiv 0$ である。図-8(a)~(c)は各場所で数値解析して得られた時間波形(解析上は空間波形であるが、これを時間波形と読み替える)に周波数解析を施して基本周波数成分 A_1 から5倍周波数成分 A_5 までを求め、式(6), (7)からバイスペクトルの絶対値と位相を求めたものの一部を示したものである。ただし A_n の値は初期波の振幅 $H_0/2$ で無次元化してある。この波形は線型長波の波速で移動する軸からみた波形を使ったため、前述したように x が大きな値を取る場所ほど、かつ高次のバイスペクトル成分になるほどその位相 θ の値は再帰性がうすれてくる。波数周波数成分が、 $A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{11}, A_{12}$ および A_{13} の6個で表わされる程度の規模の小さい二次波峰現象のバイスペクトルについてしらべた井本ら⁴⁾の研究によると次のようなことがわかって

- 1) 含まれる成分波が3倍周波数までであるから、バイスペクトルは $B(\sigma, \sigma) = A_1^2 \cdot A_2$, $B(2\sigma, \sigma) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ の2つしか存在しない。
- 2) $B(\sigma, \sigma)$, $B(2\sigma, \sigma)$ の場所的変化は A_1, A_2, A_3 の大小によって大きく変化する。例えば A_{11} が大きい値の時は $B(\sigma, \sigma)$ は $Lov/2$ に相当する地点で極小値を示すが、 A_{11} が小さい場合には極大値を示す。
- 3) 次式で定義される Skewness S

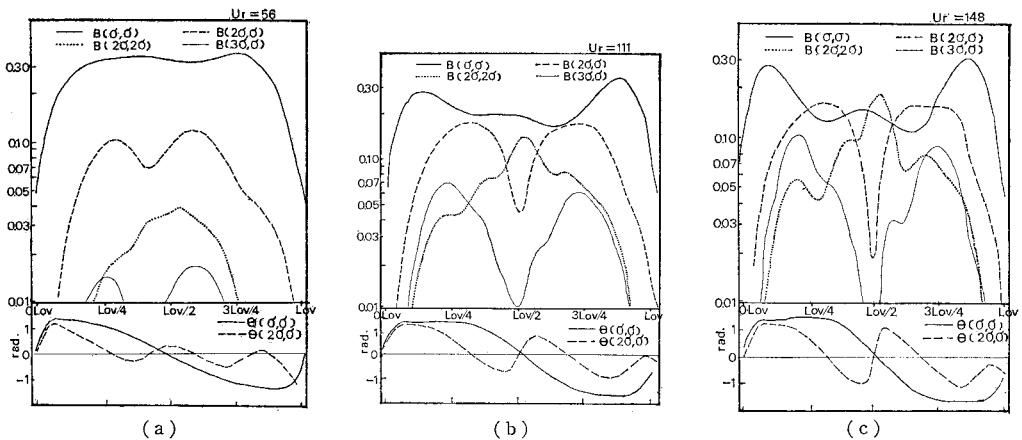


図-8 再帰間隔 Lov 内でのバイスペクトルの振幅と位相の変化

$$S = \frac{1}{T} \int_0^T \eta^3(t) dt / \rho^3$$

$$= \sum_m \sum_n A_{m+n} \cdot A_m \cdot A_n \cos(\varepsilon_{m+n} - \varepsilon_m - \varepsilon_n) / \rho^3$$

$$\dots\dots\dots(18)$$

$$\rho^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \eta^2(t) dt = \sum_n A_n^2 \dots\dots\dots(19)$$

は $x=0$, L_{ov} で最小値をとり, $x=\frac{1}{2}L_{ov}$ で最大値を示す.

4) $\theta(\sigma, \sigma)$, $\theta(2\sigma, \sigma)$ は $0 < x < L_{ov}/2$ の区間即ち波形が前傾性を示す区間では正の値を取り, $L_{ov}/2 < x < X$ の後傾性を示す区間では負の値を示す. また $x=0$, $L_{ov}/2$, L_{ov} などの前後対称性を示す場所では 0 である.

5) バイスpekトルの位相 θ は振幅の大小には関係がなく初期位相 ε と波数周波数成分の振幅比 A_{11}/A_{01} , A_{12}/A_{02} , A_{13}/A_{03} に関係している.

(2) バイスpekトルと非定形性との関連

前述した井本ら⁴⁾の研究結果と 図-8 とからバイスpekトルと非定形性との関連をしらべる.

図-8 はアーセル数が 56, 111, 148 についてのものであるが, アーセル数が大きくなって変形が著しくなっても $B(\sigma, \sigma)$ は大きくならず, かえって減少している. 替って $B(2\sigma, \sigma)$, $B(2\sigma, 2\sigma)$ などの成分が大きくなってバイスpekトル構造が平滑化されていくことがわかる. 前傾性, 後傾性が強くなる $L_{ov}/4$, $3L_{ov}/4$ 付近ではいずれも $B(\sigma, \sigma)$, $B(2\sigma, \sigma)$ および $B(3\sigma, \sigma)$ の値が大きくなって, バイスpekトル構造が横に延びる傾向がある. 前傾性と後傾性の違いは $\theta(\sigma, \sigma)$ の値が前者では正, 後者では負となり, 井本らの報告と同じである. ただし $\theta(2\sigma, \sigma)$ については前述した理由から原点を離れるにつれて明確な傾向はつかめなかった. 波形が非常に尖って, かつ前後が対称となる波形を示す $L_{ov}/2$ では $B(2\sigma, \sigma)$, $B(3\sigma, \sigma)$ が小さくなって $B(2\sigma, 2\sigma)$ が大きくなる. したがって $B(2\sigma, 2\sigma)$ が大きくなることは式 (4) の Skewness S をさらに増大させることを意味すると思われる. また井本らの報告にもあるように 0, $L_{ov}/2$, L_{ov} では $\theta(\sigma, \sigma)$ が 0 となっていることもわかる. 波形の前傾性, 後傾性の問題は現地海岸における漂砂現象と密接に関連している⁵⁾ と思われるので, 今後は波峯の位置から腕の長さをとった波形のモーメント値などとの

関連を見い出して, ランダム波の非対称性を評価する方法を見出す必要がある.

5. 結 語

余弦波形を持つ深海波が一定水深の浅海域に進入したと想定して, 数値解析によって非定形波の特性をしらべた結果以下のことが明らかとなった.

- 1) 波数周波数振幅spekトルの各成分波高と初期波高 H_0 との比を初期波のアーセル数 U_r の関数として表示することができた.
- 2) 非定形波の再帰間隔 L_{ov} 区間での平均波速 C_1 は $C_1/\sqrt{gh} > 1.0$ の場合すなわち $U_r > 50$ の場合には安田の提案した新しいクノイド波理論の第一次近似解とよく一致する.
- 3) 再帰間隔 L_{ov} は H/h をパラメータとして無次元周期と密接な関係があり, H/h が小さくなくても微小振幅波理論による値には収束しない.
- 4) アーセル数 50 以上の場合に非定形波形を定量的にも評価するには 15 個程度の成分波を再合成する必要がある. それもアーセル数が 200 を越えるとは不可能となる.
- 5) 波形の尖りかた, 前傾性, 後傾性などの特性はバイスpekトルの振幅および位相と密接な関連があることがわかった.

最後に本研究は文部省自然災害特別研究 (代表者京大工学部岩垣雄一教授) による研究であることを付記し, 御助言を賜った岩垣雄一教授に感謝の意を表します.

参 考 文 献

- 1) Zabusky, N. J. and C. J. Galvin: Shallow-water waves, the Korteweg-de Vries equation and Solitons, J.F.M., Vol. 49, pp. 811~824, 1971.
- 2) 石田 昭・広沢 達・西垣嘉行: 数値解析による非定形浅水波の波数周波数特性, 第 26 回海岸工学講演会論文集, pp. 16~20, 1979.
- 3) 安田孝志: 浅海における有限振幅波理論とその適用に関する研究, 京大学位論文, p. 145, 1978.
- 4) 井本久仁吉・石田 昭・細井正延: バイスpekトルの理解と 2 次波峯現象へのその応用, 名古屋工業大学学報, 第 30 巻, pp. 347~354, 1978.
- 5) Bijker, E. W., E. V. Hijum and P. Vellinga: Sand Transport by waves, Proc. 15th Conf. Coastal Eng., pp. 1149~1167, 1976.