

# K-dV 方程式による斜面上の波の水粒子速度

安田 孝志\*・後藤真太郎\*\*・土屋 義人\*\*\*

## 1. 緒 言

砕波に至る斜面上の波の変形については、これまで数多くの研究が行われ、著者らによる斜面上の K-dV 方程式を用いた数値シミュレーション<sup>1)</sup>によっても、その特性が詳細に解明されてきた。しかしながら、水粒子速度などの内部特性については、波力や漂砂などに密接に関わり合っているにもかかわらず、実験上および理論上の問題もあって、それに関する研究は Adeymo<sup>2)</sup> や岩垣ら<sup>3), 4)</sup> による一連の研究などがあるに過ぎない。

本研究では、斜面上の波に対する速度ポテンシャルの表示式を導き、これに K-dV 方程式の数値解を適用することにより、浅水化に伴う斜面上の波の水粒子速度場の変形過程を、一様水深場での定形波理論との比較において明らかにする。

## 2. 斜面上における波の水粒子速度の表示式

一様な傾斜面上における非回転波動を考え、座標および記号を図-1 のように定める。前報<sup>1)</sup> 同様の記号を用いれば、基礎方程式は、

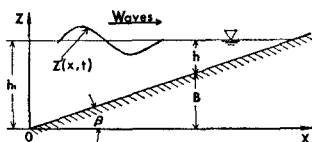


図-1 座標系および記号の説明

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0, \quad \phi_t + (\phi_x^2 + \phi_z^2)/2 + g(z-h)|_{z=h_1+z'}=0 \\ z'_t + z'_x \phi_x - \phi_z|_{z=h_1+z'} &= 0, \quad \phi_z - B_x \phi_x|_{z=B}=0 \\ &\dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

となり、前報同様の通減せつ動法<sup>5)</sup> および速度ポテンシャル  $\Omega$  に関する仮定

$$\Omega_t = -3\eta^2/4c_0^3 - c_0\eta\xi\xi/6 + B_t^* \int_0^\xi \eta d\xi/4c_0^2 \dots(2)$$

を適用して、非線形、分散および斜面勾配の諸効果が平衡関係にあるときの斜面上の波に対する速度ポテンシャルの表示を次式のように得ることができる。

$$\begin{aligned} \eta_t + 3\eta\eta\xi/2c_0^3 + c_0\eta\xi\xi/6 - B_t^* \eta/4c_0^2 &= O(\varepsilon) \dots(3) \\ \phi_t^* &= \varepsilon^{1/2}\eta_1 + \varepsilon^{3/2}(1/2c_0^2)\{(c_0^4 - \zeta^2)\eta\xi\xi + \eta^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \varepsilon^{5/2}\left\{(\zeta^4 - 2c_0^4\zeta^2 + c_0^8)\eta\xi\xi\xi/24c_0^4 - B_t^*(\zeta^2 \right. \\ &- 2c_0^2\zeta + c_0^4)\eta\xi/2c_0^3 + (\zeta^2 - c_0^4)\eta\eta\xi\xi/6c_0^4 \\ &+ (2\zeta^2 - c_0^4)\eta^2/2c_0^4 - \eta^3/4c_0^4 \\ &\left. + (B_t^*/4c_0^3)\eta \int_0^\xi \eta d\xi\right\} + O(\varepsilon^{7/2}) \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

ここに、 $c_0 = \sqrt{1-B^*} = \sqrt{h^*}$ ,  $\xi = \varepsilon^{1/2}\left(\int dx^*/c_0 - t^*\right)$ ,  $\tau = \varepsilon^{3/2}x^*$ ,  $B^* = B/h_1$ ,  $x^* = x/h_1$ ,  $z^* = z/h_1$ ,  $t^* = t\sqrt{g/h_1}$ ,  $h^* = h/h_1$ ,  $\varepsilon = (h_1/L_1)^2 \ll 1$ ,  $\zeta = z^* - B^*$ ,  $\varepsilon\eta = z'/h_1$  および  $\phi^* = \phi/h_1\sqrt{g h_1} = \varepsilon^{1/2}(\Omega - \varepsilon\tau^2\Omega_{\xi\xi}/2 + \varepsilon^2\zeta^4\Omega_{\xi\xi\xi\xi}/4! - \dots)$  である。さて、数値計算の便宜上、初期波の波高および周期がともに 1 となるように、

$$Y = \varepsilon\eta/(H_1/h_1), \quad \xi = c^*\sigma, \quad c^* = c/\sqrt{g h_1} \dots(5)$$

によって時間波形の規準化を行う。ここに、 $H_1$  および  $c$  はそれぞれ初期波の波高および波速である。これを式 (4) に適用し、水平および鉛直水粒子速度  $u$  および  $w$  の表示を導けば、それぞれ次式となる。

$$\begin{aligned} u/\sqrt{g h_1} &= \varepsilon U_s Y/c_0 + \varepsilon^2 \left\{ c^{*2} U_s (c_0/3 - \zeta^2/2c_0^3) Y_{\sigma\sigma} \right. \\ &- U_s^2 Y^2/4c_0^3 + c^{*-2} U_s B_t^* \int_0^\sigma Y d\sigma/4c_0^2 \left. \right\} \\ &+ \varepsilon^3 \left\{ -c^* U_s B_t^* (9\zeta^2/8c_0^4 - 2\zeta/c_0^2 \right. \\ &+ 7/8) Y_\sigma + c^{*2} U_s^2 (7\zeta^2/c_0^5 - 5/c_0) Y_\sigma^2/4 \\ &+ c^{*2} U_s^2 (7\zeta^2/4c_0^5 - 11/12c_0) Y Y_{\sigma\sigma} \\ &+ c^{*4} U_s (\zeta^4/c_0^5 - c_0^8) Y_{\sigma\sigma\sigma\sigma}/24 \\ &- U_s^3 Y^3/4c_0^5 + c^{*-1} U_s^2 B_t^* Y \\ &\times \int_0^\sigma Y d\sigma/4c_0^4 - 3 U_s^3 \int_0^\sigma Y^2 Y_\sigma d\sigma/2c_0^5 \\ &+ 3c^{*-1} U_s^2 B_t^* \int_0^\sigma Y^2 d\sigma/4c_0^4 \\ &+ c^{*2} U_s^2 \int_0^\sigma Y_\sigma Y_{\sigma\sigma} d\sigma/6c_0 \\ &\left. - c^{*2} U_s^2 Y Y_{\sigma\sigma}/6c_0 \right\} + \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w/\sqrt{g h_1} &= -\varepsilon^{3/2}c^* U_s \zeta Y_\sigma/c_0^2 \\ &+ \varepsilon^{5/2}\{c^{*3} U_s \zeta (\zeta^2/c_0^4 - 1)/6 \\ &+ 2c^* U_s^2 \zeta Y Y_\sigma/c_0^4 \\ &- U_s B_t^* (\zeta - c_0^2) Y/c_0^3\} \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

\* 正 会 員 工 博 岐阜大学助教授 工学部土木工学科

\*\* 学生会員 岐阜大学大学院工学研究科

\*\*\* 正 会 員 工 博 京都大学教授 防災研究所

ここに,  $U_s$  は  $H_1 L_1^2 / h_1^3$  で表される Ursell 数である.

さらに, 水粒子の軌跡の計算に都合の良い Lagrange 座標での水粒子速度の表示を導くため,

$$U(a, t) = u \left( a + \int_0^t u(a, t') dt', t \right) \\ = u(a, t) + \left( \int_0^t u dt' \right) \nabla u + \dots \quad (8)$$

を用いれば, Lagrange 座標における水平および鉛直水粒子速度  $U$  および  $W$  は, それぞれ次式のように表わされる.

$$U/\sqrt{gh_1} = \varepsilon U_s Y/c_0 + \varepsilon^2 \left\{ c^{*2} U_s (c_0/3 - \zeta^2/2c_0^3) Y_{ss} \right. \\ \left. - U_s^2 Y^2/4c_0^3 - U_s Y_{ss} \int_0^\sigma Y d\sigma/c_0^3 \right. \\ \left. + c^{*-1} B_s^* U_s \int_0^\sigma Y d\sigma/4c_0^2 \right\} + \dots \quad (9)$$

$$W/\sqrt{gh_1} = -\varepsilon^{3/2} c^* U_s \zeta Y_{ss}/c_0^2 + \dots \quad (10)$$

このように, 角谷<sup>9)</sup>によって示された通減せつ動法に加えて, 式(2)で示される速度ポテンシャルに対する仮定を式(1)に適用することによって, 斜面上の K-dV 方程式と同時に水面変動のみで表された速度ポテンシャルの表示が導かれる. したがって, 式(3)を解いて任意水深における  $\eta$  を求め, それを上述の諸式に適用すれば, 容易に斜面上の波の内部特性を明らかにすることができる.

前報<sup>1)</sup>において明らかにしたように, 波形  $\eta$  に関しては第1次近似解によって十分な精度が期待されることから, 波形  $Y$  は,

$$Y_s + 3U_s c^* Y Y_{ss}/2c_0^3 + c_0 c^* Y_{ss}/6 - B_s^* Y/4c_0^2 = 0 \\ \dots \quad (11)$$

の数値解として与えられるとし, 水粒子速度に関してのみ第3次近似のオーダーまで用いることにする.

### 3. 数値解の精度

このときの数値解の精度は, 数値解  $Y$  の精度に加えて, 速度ポテンシャルの表示式(4)を導く場合の仮定の妥当性およびその数値計算の精度に依存する. 前者については, すでに前報において碎波直前の波に対しても十分な精度のあることが明らかにされているので, ここでは, 後者の問題について検討を行う.

式(2)の関係を満足するポテンシャル場において波の変形およびそれに伴う水粒子速度場の変化を考えることにし, この仮定の適用性は, 得られた数値解を実験結果と比較して検討する.

図-2 には, 式(6)の斜面勾配の項をゼロとした一様水深場において, 波の峯での水平水粒子速度の鉛直分布に関する解析解と数値解の比較を示す. これから, 水深波高比  $h/H$  が 1.5 となるような波高の大きい場合においても, 第2次近似の数値解の誤差は小さく, 一様水深場

ではあるが,  $O(\varepsilon^2)$  で考える限り, 式(6)の数値解の精度は良好であることがわかる. これに対して, 第3次近似の数値解には,  $h/H=1.5$  において若干の不安定性が見られ, 鉛直分布を支配する4階の数値微分の誤差の影響が現われているものと考えられる. このため, 以下では, 近似次数は低いが, 数値計算上の精度が良好な第2次近似の数値解の精度について検討を行うことにする.

図-3 は, 式(9)および(10)を用いて計算した一様水深場での水粒子の軌跡に関する数値解の結果を, クノイド波理論による結果および二重床水槽による実験結果とを比較したものである. これから, 数値解は実験および理論結果のいずれともよく対応しており, 式(9)および(10)による数値解の精度が満足すべきものであることがわかる. したがって, これらを用いて Lagrange 座標における水粒子速度の特性を数値的に究明することは十分可能であることがわかる.

図-4 は, 斜面勾配を考慮したときの式(6)による数値解の精度を検討するため, 岩垣<sup>8)</sup>による  $1/20$  の勾配を持つ斜面上の波の水平水粒子速度の鉛直分布に関する実験結果との比較を示したものであり,

図-5 は, このときの両者の波形の比較を示

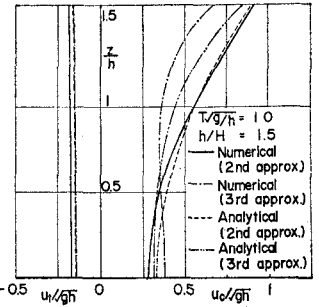


図-2 一様水深場における水平水粒子速度の鉛直分布に関する数値解と解析解の比較

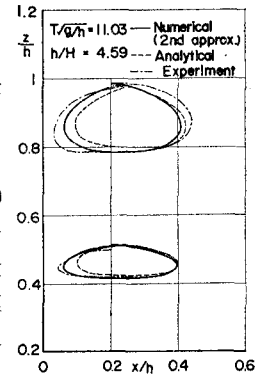


図-3 一様水深場における水粒子の軌跡に関する数値解と解析解および実験結果との比較

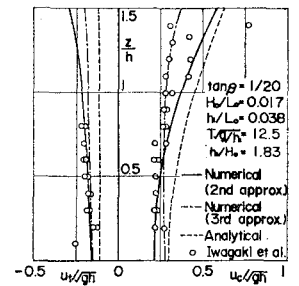


図-4 斜面上の水粒子速度の鉛直分布に関する実験結果との比較

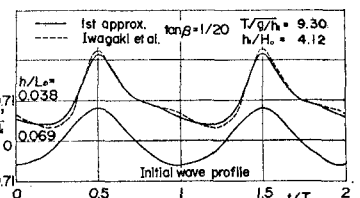


図-5 斜面上の波の波形に関する実験結果との比較

す。これらの図から、数値誤差の影響にもかかわらず、クノイド波理論の結果に比べて、数値解は波形および水粒子速度のいずれに関してもよく一致していることがわかる。このことは、水粒子速度場に及ぼす波形の影響の重要性を示しており、波形の変形が問題となる斜面上の波においては、その水粒子速度場の特性の究明に際して波形変化の影響の評価が必須となることを示すものと言えよう。

図-6 および 7 は、岩垣らによって定義された水平水粒子速度の特性を表すパラメーター  $\bar{u}_c/\bar{u}_l$  および  $\Delta(u_c/\sqrt{gh})/\Delta(1+z/h)$  に関して、数値解による結果と岩垣ら<sup>9)</sup>の実験結果を比較したものであり、図中には比較のために各水深におけるクノイド波理論の結果も示してある。なお、 $\bar{u}_c$  は波峰時の水平水粒子速度の鉛直平均を示し、 $|\bar{u}_l|$  は波の谷における水平水粒子速度の鉛直平均の絶対値を示す。また、 $\Delta(u_c/\sqrt{gh})/\Delta(1+z/h)$  は水面付近の  $\bar{u}_c$  よりも大きい  $u_c$  の部分の平均鉛直勾配を表す。これらの図から、数値解による結果は、定形波理論のものに比較して、実験結果との対応は良好であり、斜面勾配および波形変化の影響を陽に評価した式 (6) の数値解の精度はほぼ満足すべきものであるといえる。

以上示した数例からも、ここで用いる手法の妥当性が

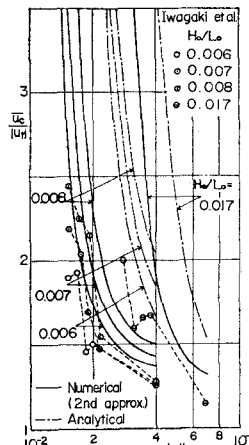


図-6  $\bar{u}_c/|\bar{u}_l|$  の変化に関する実験値との比較

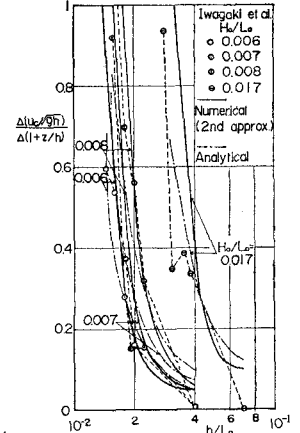


図-7  $\Delta(u_c/\sqrt{gh})/\Delta(1+z/h)$  の変化に関する実験値との比較

ある程度裏付けられたので、以下ではこの手法を用いて斜面上の波の水粒子速度の特性を究明する。

#### 4. 斜面上の波の水粒子速度

##### (1) 水平水粒子速度の1周期変化

ここでは、浅水化に伴う水平水粒子速度の1周期変化

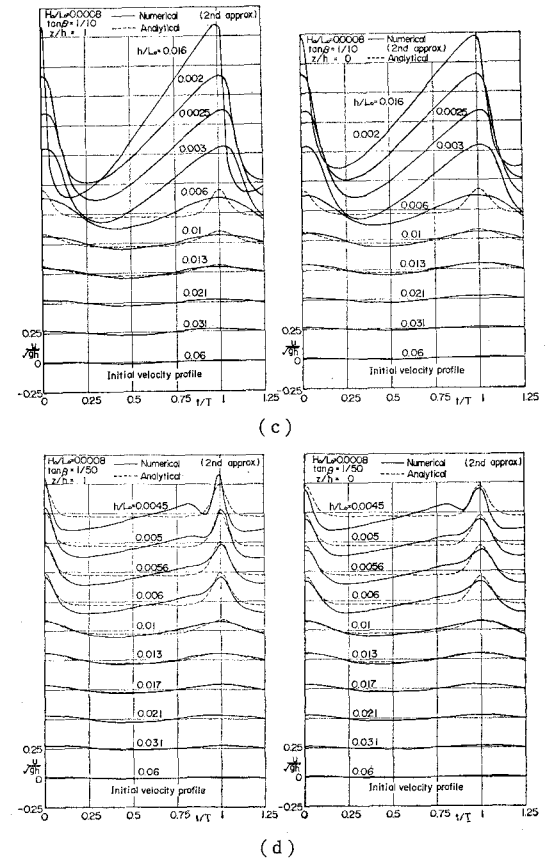
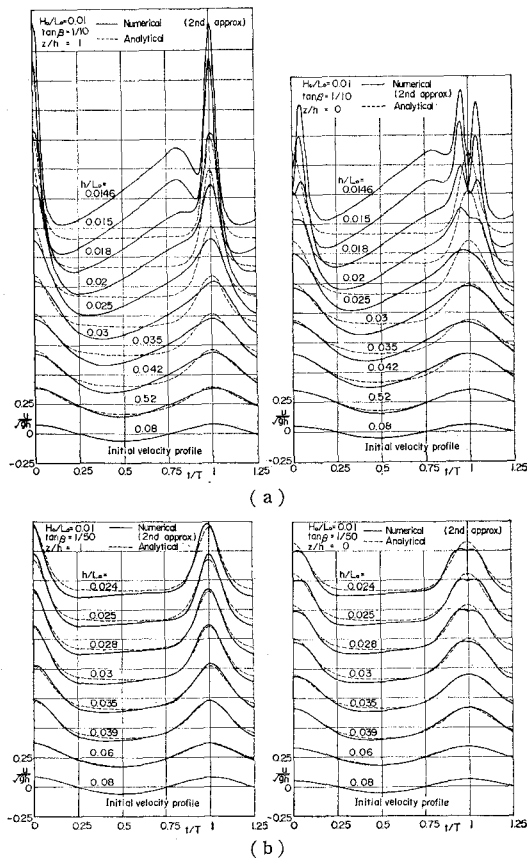


図-8 水平水粒子速度の1周期変化に関する定形波理論との比較

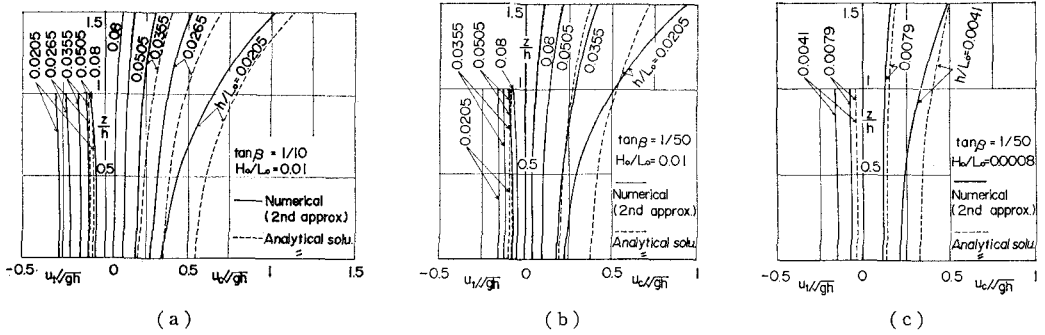


図-9 水平水粒子速度の鉛直分布に関する定形波理論との比較

の変形過程について考察し、波動の場の内部特性に及ぼす斜面勾配の影響を明らかにする。

図-8 は、数値計算上の最大波高に達するまでの浅水化の過程における水平水粒子速度の1周期変化を示したものであり、図中の破線は比較のために示した各水深でのクノイド波の1周期変化である。まず、斜面上の波の水粒子速度の特性を、一様水深場での定形波理論による結果との比較において考察すれば、沖波波形勾配  $H_0/L_0 = 0.01$  および斜面勾配  $1/50$  の場合を除いて、いずれも両者の相違は大きく、斜面上の波への定形波理論の安易な適用に問題のあることがわかる。しかしながら、定形波理論との相違が小さい  $H_0/L_0 = 0.01$  および  $\tan \beta = 1/50$  の場合は、前報<sup>9)</sup>の図-5 に示されるように、波形に関しても定形波との相違は小さく、この場合には定形波理論の適用は可能であろう。このことは、斜面上の波の内部特性に及ぼす斜面勾配自体の直接的影響は小さく、むしろ浅水化に伴う波形変化の影響が重要であり、波形と内部特性の間に顕著な対応のあることを示すものと言えよう。すなわち、速度ポテンシャルの表示式が水面変動のみの関数として表されることがからも明らかなように、たとえ斜面上の波であっても、波形が定形波のものに一致すれば、内部特性についても一様水深場での定形波理論の適用が十分に可能である。しかし、前報<sup>9)</sup>で定義した非線形斜面勾配比が小さくなって斜面勾配の影響が顕著となる場合には、波形の変形も著しく、水粒子速度に関しても定形波との相違も大きくなり、このような波への定形波理論の適用は明らかに問題があろう。また、波形が定形波に一致しない場合でも、波形さえ何らかの形で与えることができれば、内部特性の究明に関しては一様水深場での理論である流れ関数法の適用が十分に可能であろうと考えられ、これは岩垣<sup>4)</sup>によってすでに試みられた。

ついで、水平水粒子速度の1周期変化の水面 ( $z/h=1$ ) および水底 ( $z/h=0$ ) における相違を考察すれば、 $H_0/L_0 = 0.0008$  の場合にはほとんど相違は見られないが、 $H_0/L_0 = 0.01$  の場合には、水底において波峰付近で双峯型

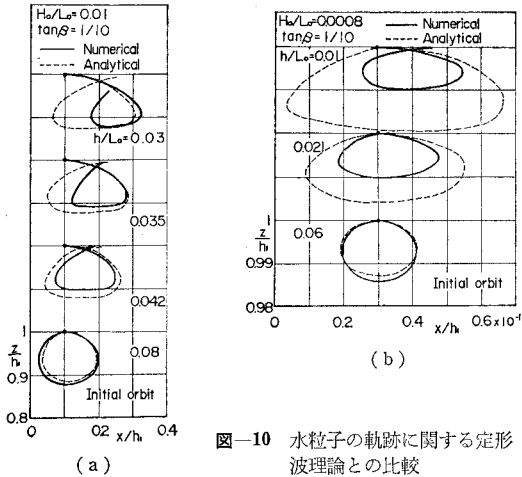
の流速変化が生じ、水面におけるものと大きく相違することがわかる。こうした波形の曲率の影響が水面と水底で逆になる傾向は、定形波の場合には見られず、斜面上の特定の波に現れる特殊な現象とも考えられるが、なお今後の検討が必要である。

## (2) 水平水粒子速度の鉛直分布

図-9 は、浅水化に伴う水平水粒子速度の鉛直分布の変化を定形波との比較で示したものである。なお、この場合も  $u/\sqrt{gh}$  における  $h$  としては各地点での値を用いている。これから、図-4 の岩垣らの実験結果や図-8 においても見られたように、斜面上の波は全体に負側に卓越した傾向を示し、正方向の一様流を加えれば、絶対値は定形波のそれにほぼ一致する傾向にあることがわかる。確かに、浅水化に伴って波の峯での鉛直分布の前傾が強くなっているが、前述の1周期変化の場合に比べて定形波との相違は小さく、水粒子速度の鉛直分布に関しては、浅水化に伴う波形変化の影響はあまり顕著ではないことがわかる。この理由としては、碎波直前の波を除けば、波の峯および谷のいずれにおいても、平均水面からの水位差およびそこでの水面の曲率などに関して斜面上の波と定形波との間で余り大きな相違のないことが考えられる。したがって、斜面上の波のように波形の変形が問題となる場合には、波の峯での水粒子速度の鉛直分布に関する検討のみによって、定形波理論の適用性を論ずることは問題であろう。

## (3) 水粒子の軌跡

図-10 は、浅水化に伴う水粒子の軌跡の形状変化を定形波との比較によって示したものである。沖波波形勾配  $H_0/L_0 = 0.0008$  の場合は、浅水化に伴って定形波の軌跡が大きくなるのに対し、斜面上の波においてはその大きさはほとんど変化せず、定形波との相違が顕著となる。また、 $H_0/L_0 = 0.01$  の場合も、斜面上の波の方が定形波よりも小さくなっており、両者の相違は明らかとなっている。このように、水粒子の軌跡は、水粒子速度の1周期変化に大きく依存するため、浅水化に伴う波形変化の影響が軌跡に顕著に現れ、斜面上の波への定形波理論の



図—10 水粒子の軌跡に関する定形波理論との比較

適用が難しいものになっている。

## 5. 結 語

以上、本研究によって明らかとなった主な事項は、つぎのように要約される。

1) 角谷の手法と速度ポテンシャルに対する仮定を用いることによって、水面変動のみに依存する斜面上の波に対する速度ポテンシャルの表示を導くことができた。その水粒子速度の計算結果は岩垣らの実験結果ともよく対応しており、十分な精度を持つものと判断された。

2) ここで示した手法を用いれば、斜面上の波の変形と同時に内部特性の変化も容易に知ることができる。

3) 水平水粒子速度の1周期変化および水粒子の軌跡は水面形状に大きく依存し、波形と水粒子速度場の間に顕著な相関のあることが認められた。

4) 斜面上の波であっても、 $K_{ns}$  の値が小さく、定形波の波形との相違の小さい波に対しては、その内部特性に対しても十分に定形波理論の適用が可能である。

5) 波の峯における水平水粒子速度の鉛直分布に関しては、波形変化の影響をあまり受けないため、砕波直前の波を除いて定形波との相違は小さい。

## 参 考 文 献

- 1) 安田孝志・山下隆男・後藤貞太郎・土屋義人: K-dV 方程式による斜面上の波の変形, 第26回海講論文集, pp. 21~25, 1979.
- 2) Adeyemo, M. D.: Velocity fields in the wave breaker zone, Proc. 12th Conf. on Coastal Engg., pp. 435~460, 1970.
- 3) 岩垣雄一・酒井哲郎・川島 毅: 斜面上の波の水粒子速度の鉛直分布について, 第18回海講論文集, pp. 93~96, 1971.
- 4) 岩垣雄一・酒井哲郎: Stream Function Theory による斜面上の砕波の水粒子速度の表現について, 第21回海講論文集, pp. 27~32, 1974.
- 5) Kakutani, T.: Effect of an uneven bottom on gravity waves, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 30, No. 1, pp. 272~276, 1971.