

周辺積分と摂動展開法による非定常有限振幅波の数値解析

井 島 武 士*・永 田 修 一**

概 要

前論文^{1),2)}においては有限振幅波の数値解析法として、流体域の境界面において成り立つグリーンの公式（周辺積分）を用いて、自由表面上の速度ポテンシャルと水位の時間増加率を算出することにより、両者の時間変化を計算する方法を提案し、振動するタンク内や2次元水路における発生波などの計算例を示した。この方法は原理と計算手続きが簡単で、したがって計算時間が短くてすみ、また流体域が広い場合でも、領域分割を行うことにより容易に処理できるという特徴がある。

この方法の主要な計算はグリーンの公式を離散化した連立1次方程式を解くことで、前論文で示した方法（直接計算法）は、時間ごとに変動する自由表面形をもつ流体域について周辺積分を行うため、広い流体域と長時間の現象を計算するには、計算機容量と所要時間に問題が起ることになる。また数値解析法の根本問題は計算精度にある。

本論文はこの問題に対応するための方法を提案するもので、有限振幅波の解析に一般に行われている摂動法を自由表面条件式に適用し、固定した静水面に関する条件式に変換し、流体域の形を時間に関係なく一定とし、これについて周辺積分式を解くことにすれば、連立方程式の係数項（流体域の形だけで決まる）は不変であるため、計算時間は著しく短縮される。

現在までの有限振幅波の数値解析の多くは、摂動展開法によって得られたものである。したがって本論文の第1次、第2次等の近似解の精度は、数式解による同じ次数の解と比較することにより容易に明確となる。

本論文はこの摂動展開法の精度を高めるために周辺積分式の離散化法を検討し、更に Stokes 波の解析値と比較することにより、本方法による数値解の精度を検討したものである。本論文では第2次近似解までを検討するが、より高次解については今後研究を進める予定である。

1. 基礎式

前論文²⁾の式(1.9)で定義した記号を用いると、無次元化した流速と圧力および自由表面条件式は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{\Gamma} \phi_x, \quad w = \frac{1}{\Gamma} \phi_z \\ p &= -\phi_t - \frac{1}{2\Gamma} (\phi_x^2 + \phi_z^2) - z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_t &= -\zeta - \frac{1}{2\Gamma} (\phi_x^2 + \phi_z^2), \quad (z=\zeta) \\ \zeta_t &= \frac{1}{\Gamma} (\phi_z - \zeta_x \phi_x), \quad (z=\zeta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.2)$$

パラメーター ε を用いて ϕ と ζ を摂動展開し、

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \varepsilon^3 \phi^{(3)} \\ \zeta &= \varepsilon \zeta^{(1)} + \varepsilon^2 \zeta^{(2)} + \varepsilon^3 \zeta^{(3)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.3)$$

とおき、式(1.3)をテーラー展開によって静水面 $z=0$ での条件に直し、 ε の同次の項を整理すると次のようである。

第1次近似:

$$\zeta_t^{(1)} = \frac{1}{\Gamma} \phi_z^{(1)}, \quad \phi_t^{(1)} = -\zeta^{(1)} \quad (z=0) \dots\dots\dots(1.4)$$

第2次近似:

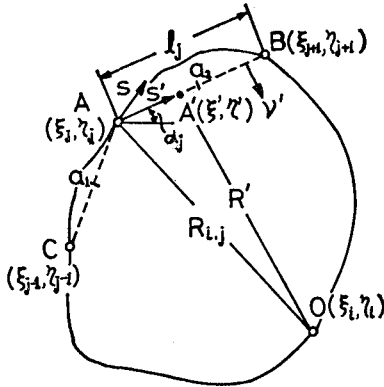
$$\left. \begin{aligned} \zeta_t^{(2)} &= \frac{1}{\Gamma} [\phi_z^{(2)} + \zeta^{(1)} \phi_{zz}^{(1)} - \zeta_x^{(1)} \phi_x^{(1)}] \\ \phi_t^{(2)} &= -\zeta^{(2)} - \zeta^{(1)} \phi_{zz}^{(1)} - \frac{1}{2\Gamma} [\phi_x^{(1)2} + 3\phi_z^{(1)2}] \end{aligned} \right\} (z=0) \dots\dots\dots(1.5)$$

2. 周辺積分式の離散化

前論文^{1),2)}では、周辺積分式は境界線を有限個の小線分に分割し、その中点におけるポテンシャル ϕ と法線微分値 ϕ_n （以下 $\bar{\phi}$ とする）は、当該線分上で一定と仮定して離散化している。流体域の境界線が滑かな閉曲線より成るときは境界の分割数を増して離散化誤差を必要なら小さくすることができるが、境界線が鋭角の隅角をもつ場合、誤差は無視できなくなる³⁾。これを避ける一つの方法として、分割された境界上の小線分上で ϕ と $\bar{\phi}$ は一定ではなく直線的に変ると仮定して離散化を行う

* 正 会 員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学科

** 学生会員 工修 九州大学大学院工学研究科 博士課程



图—1 Method of Discretization of Boundary Integral

こととする.

図-1 に示すように、境界線を点 A, B, C などで N ヶの小部分に分割し、周辺積分式を各部に関する積分の和として示すと、境界上の点 (ξ_i, η_i) に関しては次のようになる。

$$-\phi(\xi_i, \eta_i) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \oint_j \left[\phi(s) \cdot \frac{\partial \log R}{\partial \nu} - \bar{\phi}(s) \cdot \log R \right] ds \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

ここで $\oint_j [\quad] ds$ は第 j 番目の点 $A(\xi_j, \eta_j)$ を中心とする区間に関する線積分である. N を充分大きくとって線積分を直線に沿う積分に近似させ, 線分 BA, AC の中点を a_1, a_2 とすると

$$\left. \begin{aligned} \int_f \phi(s) \frac{\partial \log R}{\partial \nu} \cdot ds &\doteq \int_{a_1}^{a_2} \phi(s') \frac{\partial \log R'}{\partial \nu'} \cdot ds' \\ \int_f \bar{\phi}(s) \cdot \log R \cdot ds &\doteq \int_{a_1}^{a_2} \bar{\phi}(s') \cdot \log R' \cdot ds' \end{aligned} \right\}$$

上式右辺は境界に沿う積分，右辺は線分に沿う積分である。ここで右辺の $\phi(s')$ と $\bar{\phi}(s')$ を点 B と A ，点 A と C の間で s' に関して直線的に変わるとすれば， $\phi(j) = \phi(\xi_j, \eta_j)$ と $\phi(j+1) = \phi(\xi_{j+1}, \eta_{j+1})$ により， AC 上の ϕ は次式で表わされる。

$$\phi(s') = \left(1 - \frac{s'}{l_j}\right) \cdot \phi(j) + \frac{s'}{l_j} \cdot \phi(j+1),$$

$$(0 \leq s' \leq l_j, l_j = \overline{AC}) \quad \dots\dots(2.3)$$

BA 上の値は上式で j の代わりに $j-1$ とすればよく, $\bar{\phi}$ についても同様に表わされる.

直線 AC と x 軸のなす角度を α_j , AC 上の点 A' の座標を (ξ_1', η') , $OA' = R'$ とすると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log R'}{\partial \nu'} &= \frac{1}{R'} \cdot \frac{\partial R'}{\partial \nu'} \\ &= [(\xi' - \xi_i) \sin \alpha_j - (\eta' - \eta_i) \cos \alpha_j] / [s'^2 \\ &\quad + 2m_{ij}s' + R_{ij}^2] \dots\dots\dots (2.4) \end{aligned}$$

ここで

$$R_{ij}=[(\xi_j-\xi_i)^2+(\eta_j-\eta_i)^2]^{1/2},$$

$$m_{ij} = (\xi_j - \xi_i) \cos \alpha_j + (\eta_j - \eta_i) \sin \alpha_j$$

線分 BA 上の点 A' についても同様で、上式の j の代わりに $j-1$ とすればよい。式 (2.3), (2.4) を (2.2) の第 1 式に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \phi(s') \frac{\partial \log R'}{\partial \nu'} ds' \\ &= \bar{B}_{ij} \phi(j-1) + \bar{A}_{ij} \phi(j) + \bar{C}_{ij} \phi(j+1) \dots \dots (2.5) \end{aligned}$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_{ij} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{l_{j-1}} \left(1 - \frac{s'}{l_{j-1}} \right) \cdot \frac{\partial \log R'}{\partial \nu'} ds' \\ &= \left[\bar{a}_{i,j-1}(x) + \bar{b}_{i,j-1}(x) \right]_{m_{ij-1} j-1+(1/2) l_{j-1}}^{m_{i,j-1}+l_{j-1}} \\ \bar{C}_{ij} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{(1/2) l_j} \frac{s'}{l_j} \cdot \frac{\partial \log R'}{\partial \nu'} ds' \\ &= - \left[\bar{a}_{ij}(x) \right]_{m_{ij}}^{m_{ij}+(1/2) l_j} \\ \bar{A}_{ij} &= \left[\bar{a}_{ij}(x) + \bar{b}_{ij}(x) \right]_{m_{ij}}^{m_{ij}+(1/2) l_j} \\ &\quad - \left[\bar{a}_{i,j-1}(x) \right]_{m_{ij}+(1/2) l_{j-1}}^{m_{i,j-1}+l_{j-1}} \\ \bar{a}_{ij}(x) &= \frac{1}{\pi l_j} \left[m_{ij} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{x}{n_{ij}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} n_{ij} \log (x^2 + n_{ij}^2) \right] \\ \bar{b}_{ij}(x) &= \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{x}{n_{ij}} \right) \\ n_{ij} &= (\xi_j - \xi_i) \sin \alpha_j - (\eta_j - \eta_i) \cos \alpha_j \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.6)$$

$j=i$ のときは $R'=s'$, $\partial \log R'/\partial \nu'=0$ であるから

$$\bar{A}_{ii}=\bar{B}_{ii}=\bar{C}_{ii}=0 \dots\dots\dots(2.7)$$

同様にして式 (2.2) の第 2 式は次のようになる.

$$\frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \bar{\phi}(s') \cdot \log R' ds' = B_{ij} \bar{\phi}(j-1) + A_{ij} \bar{\phi}(j) + C_{ij} \bar{\phi}(j+1) \dots \dots \dots (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{ij} &= \left[a_{i,j-1}(x) + b_{i,j-1}(x) \right]_{m_{i,j-1} + (1/2)l_{j-1}}^{m_{i,j} + l_{j-1}} \\ C_{ij} &= - \left[a_{ij}(x) \right]_{m_{ij}}^{m_{ij} + (1/2)l_j} \\ A_{ij} &= \left[a_{ij}(x) + b_{ij}(x) \right]_{m_{ij}}^{m_{ij} + (1/2)l_j} \\ &\quad - \left[a_{i,j-1}(x) \right]_{m_{i,j-1} + (1/2)l_{j-1}}^{m_{ij} + l_{j-1}} \\ a_{ij}(x) &= \frac{1}{4\pi l_j} \left[x^2 - 4m_{ij}x \right. \\ &\quad \left. + 4m_{ij} \cdot n_{ij} \tan^{-1} \left(\frac{x}{n_{ij}} \right) \right. \\ &\quad \left. - (x^2 - 2m_{ij}x + n_{ij}^2) \log(x^2 + n_{ij}^2) \right] \\ b_{ij}(x) &= -x + n_{ij} \tan^{-1} \left(\frac{x}{n_{ij}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}x \log(x^2 + n_{ij}^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.9)$$

$j=i$ の場合には

$$\left. \begin{aligned} B_{ii} &= \frac{1}{8} l_{i-1} \left[\log \frac{l_{i-1}}{1} - \frac{1}{2} \right] \\ C_{ii} &= \frac{1}{8} l_i \left[\log \frac{l_i}{2} - \frac{1}{2} \right] \\ A_{ii} &= \frac{3}{8} \left[l_{i-1} \left\{ \log \frac{l_{i-1}}{2} - \frac{7}{6} \right\} \right. \\ &\quad \left. + l_i \left\{ \log \frac{l_i}{2} - \frac{7}{6} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.10)$$

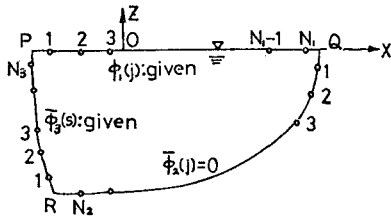


図-2 Definitions of Fluid Region

図-2でPQは静水面, QRは固定壁面, RPは鉛直流速が与えられる面とする。各々の面上に N_1, N_2, N_3 ケの点を設け, 各面上のポテンシャルを添字 1, 2, 3 を付して示し, PQ上で ϕ_1 は既知, $\bar{\phi}_1$ は未知, QR上で ϕ_2 は未知, $\bar{\phi}_2=0$, RP上で ϕ_3 は未知, $\bar{\phi}_3$ は既知とする。このとき周辺積分式は既知量を右辺にまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_1} G_{ij} \bar{\phi}_1(j) - \sum_{j=1}^{N_2} F_{ij} \phi_2(j) - \sum_{j=1}^{N_3} F_{ij} \phi_3(j) \\ &= \sum_{j=1}^{N_1} F_{ij} \phi_1(j) - \int_R^P \bar{\phi}_3(s) \cdot \log R \cdot ds \quad \dots\dots (2.11) \\ & (i=1 \sim N_1, 1 \sim N_2, 1 \sim N_3) \end{aligned}$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} F_{ij} &= \delta_{ij} + \bar{G}_{ij}, \quad \delta \text{ はクロネッカーのデルタ} \\ \bar{G}_{ij} &= \bar{B}_{i,j+1} + \bar{A}_{i,j} + \bar{C}_{i,j-1} \\ G_{ij} &= B_{i,j+1} + A_{i,j} + C_{i,j-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.12)$$

3. 解析式と実験による精度の検討

この方法による第2次近似までの計算精度を見るために, Stokes 波の解析値とこの方法での計算値を比較した。

(1) 波の性質による精度の変化

図-3に示すように, 長さ b が波長の約2倍の矩形流体域の左右側面AB, A'B'にStokes波の水平流速を与え, 初期条件として対応する水面波形とポテンシャル

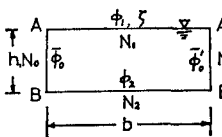


図-3 Fluid Region for Stokes Waves

を与え, 以後の時刻での波形を本方法で計算し, Stokes 波形と比較した。第2次近似におけるStokes波のポテンシャルと水面波形は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{a}{h} \left[\frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh} \sin(kx - \sigma t) \right. \\ &\quad \left. + ak \cdot \frac{3 \text{ch } 2k(z+h)}{8 \text{sh}^4 kh} \cdot \sin 2(kx - \sigma t) \right] \\ \zeta &= \frac{a}{h} \left[\cos(kx - \sigma t) \right. \\ &\quad \left. + ak \cdot \frac{1+2 \text{ch}^2 kh}{4 \text{sh}^3 kh} \cdot \cos 2(kx - \sigma t) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

計算点は静水面で $N_1=60$, (1波長につき30点) 水底で $N_2=30$, 側面で $N_3=N'_3=10$, 時間ステップは $\tau = T/60$ (T は周期)とし, $\zeta_i(n\tau)$ および $\phi_i(n\tau)$ による $\zeta((n+1)\tau)$ と $\phi((n+1)\tau)$ の計算にはCrank-Nicholsonの反復法を用い, $t=6T$ ($=360\tau$) までの計算を行い, $1/2 \cdot T$ 毎の水面波形をプロットした。計算した波は $I' (= \sigma^2 h/g) = 0.32, 0.62, 0.94$ および 1.20 で, すべて $a/h=0.20$ とした。故にそれぞれ $h/L=0.095, 0.1398, 0.1830, 0.2180$ で, かつ $H/L=0.038, 0.056, 0.073$ および 0.087 である。 $t=4T$ における計算波形と式(3.1)による波形を図-4~図-7に示した。黒点で示した線は式(3.1)による第1次近似と第2次近似の値で, 白点をもつ線は本計算法による値である。両者の一致の程度は第1次近似ではほぼ完全であるが, 第2次近似では, 多少のずれは見られるが, ほぼ満足すべき結果である。ただ,

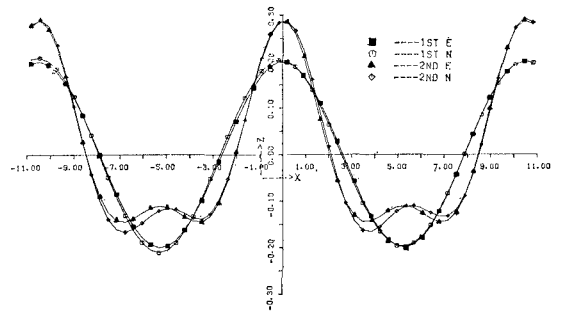


図-4 Surface Wave Profiles ($I'=0.32, a/h=0.20, N_1=60, t=4T$)

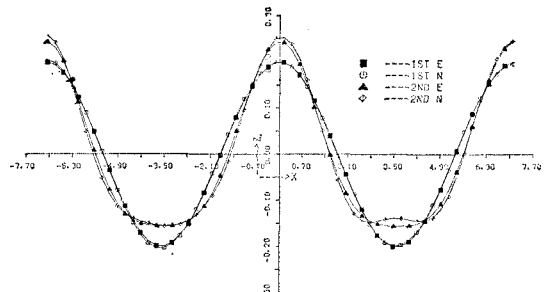


図-5 Surface Wave Profiles ($I'=0.62, a/h=0.20, N_1=60, t=4T$)

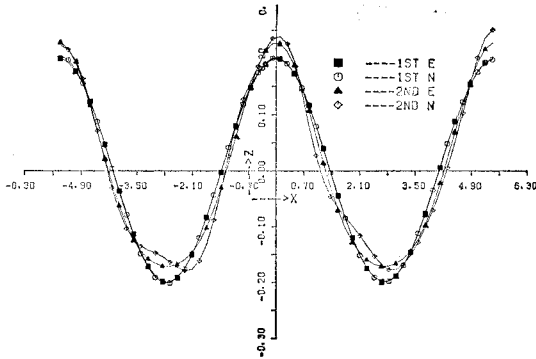


図-6 Surface Wave Profiles ($\Gamma=0.94$, $a/h=0.20$, $N_1=60$, $t=4T$)

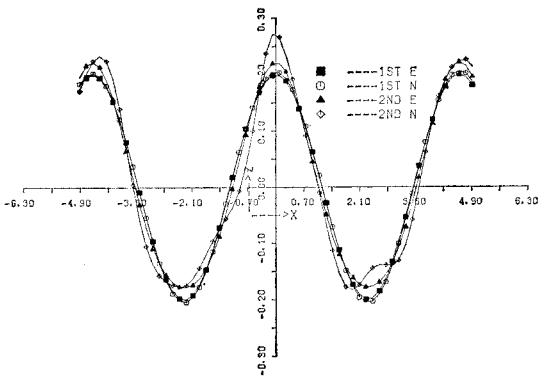


図-7 Surface Wave Profiles ($\Gamma=1.20$, $a/h=0.20$, $N_1=60$, $t=4T$)

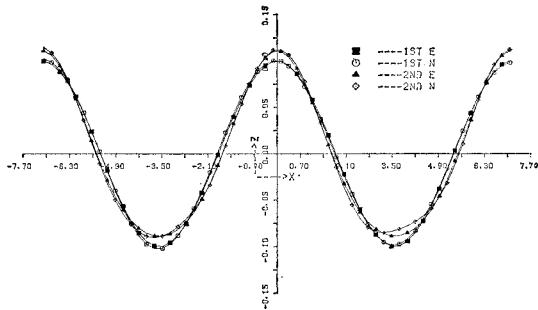


図-8 Surface Wave Profiles ($\Gamma=0.62$, $a/h=0.10$, $N_1=60$, $t=4T$)

$\Gamma=1.20$ (図-7) においては、ずれが大きい、これは H/L が大きいことに関係すると思われる。例えば図-8 は $\Gamma=0.62$ に対し $a/h=0.10$ ($H/L=0.028$) としたときであるが、図の縦尺が2倍になっていることを考慮すると、合致の程度は図-5 よりもかなり良いことが分かる。なお、この計算は九大型電算機センターの FACOM M-200 を用いて行ったが、各ケースでの $t=6T (=360\tau)$ までの計算時間は、計算点 110 ケに対し 90 秒である。これに対し、時間差分を Crank-Nicholson 法でなく、中央差分で行うと、所要時間は丁度 1/3 の 30

秒となり、且精度は殆んど変わらないことが分った。したがって、以下はすべて中央差分法による結果を示す。

(2) 離散化法の効果と計算点の必要数

本論文の計算結果はすべて前述の離散化法によるものであるが、別に従来の方法によった計算値とを比較して見ると、上記の場合は流体域の形が正しい矩形で、鋭角部がないため、ほとんど差は見られなかった。そこで試みに、図-5 の場合 ($\Gamma=0.62$) に側面と底面の計算点は一定にしておき、水面での計算点の数を $N_1=60$ から $N_1=40$ および $N_1=20$ と減少させた場合を計算し $t=3T (=180\tau)$ のときの水面波形を示すと、図-9 と 図-10 のようである。

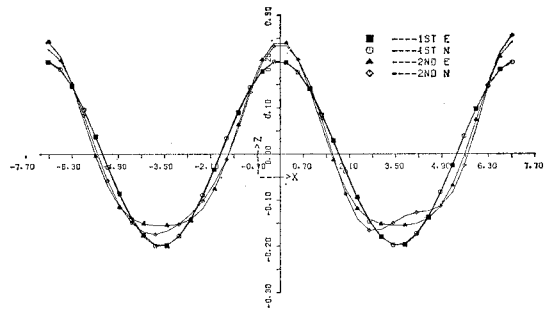


図-9 Surface Wave Profiles ($\Gamma=0.62$, $a/h=0.20$, $N_1=40$, $t=3T$)

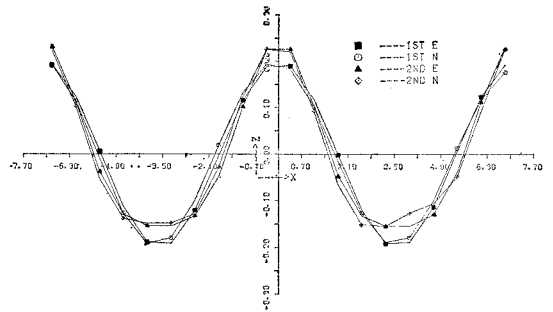


図-10 Surface Wave Profiles ($\Gamma=0.62$, $a/h=0.20$, $N_1=20$, $t=3T$)

図-9 によると、水面での計算点は 1 波長当り 20 点でも充分であり、図-10 によると極端には 10 点でも計算できないことはないことが推測される。計算時間は図-5 が 30 秒の場合 ($t=6T$ までの計算) 図-9 と 図-10 はそれぞれ 19 秒と 12 秒となっている。これらの結果から第 2 次近似までの計算には、所要の計算点は 1 波長について 20~30 点が妥当であることが分かる。

(3) 実験値との比較

図-11 は一様水深 ($h=40$ cm) の造波水路で、ピストン式造波板の半振幅 21.2 cm 周期 4.1 秒により発生した波 ($\sigma^2 h/g=0.096$, $h/L=0.050$) を造波板から 1 波長の地点で測定した値 (滝川⁴⁾ による) と本方法で第 3 次

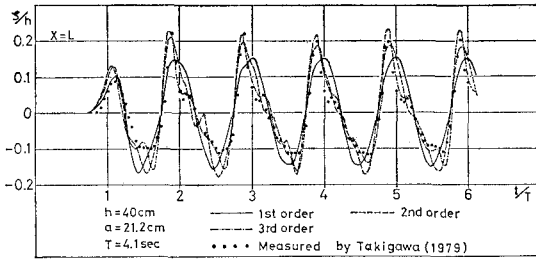


図-11 Computed and Measured Time History of Surface Elevation (by Piston-type Generator)

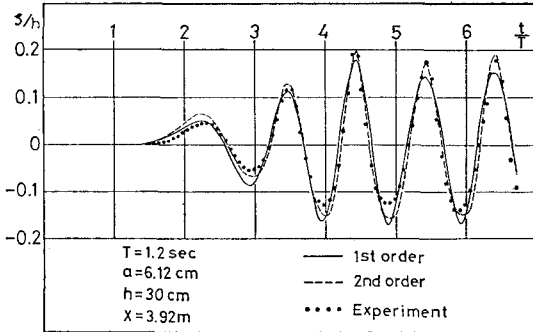


図-12 Computed and Measured Time History of Surface Elevation (by Flap-type Generator)

近似値までを計算した結果を示しており、図-12 は水深 30 cm の造波水路でフラップ式造波板 (半振幅 6.12 cm, 周期 1.2 sec) による発生波 ($\sigma^2 h/g = 0.84$, $h/L = 0.170$) の測定値と計算値を示したものである。実測値と計算値の一致はほぼ満足すべきものと思う。

4. 結 論

上記の Stokes 波との比較計算においては流体域境界面 (図-3 の AB , $A'B'$ 面) において与へる水平流速は、水底から静水面までの区間に限られ、Stokes 波の解析解におけるように自由表面までには及ばない。このため H/L の大きい波では不一致が大きくなる。このような条件差を考慮すると、図-4~図-10 および 図-11 の結果は、この摂動計算法が実用上有効であることを示すものと考えらる。

この方法による計算では、直接計算法に比べて所要時間が極めて短く、また解が常に安定で信頼性が高い。ただし第2次近似までの計算は容易であるが、第3近似に進むと式 (1.6) の右辺に ϕ と ζ の微分値を含む複雑な項が多く現われ、精度の良い計算を行うためには充分の注意を要することになる。この点について今後検討を進める予定である。

参 考 文 献

- 1) 井島武士・永田修一: グリーンの公式による非定常有限振幅波の数値解析, 九大工学集報, 52 巻 3 号, pp. 209~217, 1979.
- 2) 井島武士・永田修一: グリーンの公式による有限振幅波の数値解析, 第 26 回海講論文集, pp. 80~83, 1979.
- 3) Mattioli, F. and S. Tinti: Discretization of Harbour Resonance Problem, Proc. A.S.C.E., WW4, pp. 464~469, Nov. 1979.
- 4) 滝川 清・田淵幹修: 有限要素法による浅海域での波動解析について, 第 1 回流れの有限要素法解析シンポジウム, pp. 61~68, 1979.