

有限要素法による波動解析について

——運動する境界面を有する場合——

滝 川 清*・田 淵 幹 修**

1. はじめに

先に著者は、任意海底形状を有する浅海域での波動問題について微小振幅および有限振幅波動の解析方法¹⁾を示した。本報告は、これを、運動する任意形状の境界面を含む場合に対して拡張したものである。すなわち、浅海域における任意形状の物体の波による運動あるいは物体の運動による波の発生等、波と物体との運動系に対して、微小振幅運動および有限振幅運動の各場合についての有限要素法による解析方法を示し、若干の適用計算例と検証実験結果について報告するものである。

本研究の有限振幅非定常運動の計算方法は、物体の没水表面での速度ポテンシャルを物体の未知な有限変位量の関数形として取り扱い、これに物体運動の条件と物体没水表面の幾何学的条件とを同時に満足する解を逐次求めて行く非定常な連成運動系（物体運動に応じた境界値問題）としての計算方法である。

2. 有限振幅非定常運動解析

(1) 基礎式

図-1 に示すように、浅海域に繫留または浮遊した任意形状の物体があるとき、この流体域での運動について考える。解析

領域 $V(\eta)$ は表面変動量 η の関数である、流体は速度ポテンシャル $\Phi(x, y, t)$ を有するとし

て、時間を t 、重力の加速度を g とすると流体運動の支配方程式は各境界領域で以下の様に表現できる。

$$\text{解析領域 } V(\eta) ; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{自由表面 } S_1 ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = n_y \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} + g\eta = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{不透過境界 } S_2 ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{仮想境界 } S_3 ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{物体没水表面 } S_4 ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 n は外向法線方向、 n_y は n の y 軸方向余弦である。式 (5) の $\bar{\Phi}$ は解析領域外部での速度ポテンシャルを意味し、式 (6) の右辺は物体没水表面の速度の法線方向成分である。

(2) 運動する物体と波動の解析

運動する境界面を含む有限振幅波動の基礎式は式 (1) から式 (6) で示される境界値問題である。これに対して式 (7) のような汎関数 χ を考える。これの第 1 変分を取り結果のみを示すと式 (8) のようである。

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} \int_{V(\eta)} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dV + \frac{g}{2} \int_{S_1} \eta^2 dS_1 \\ & + \int_{S_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \eta dS_1 - \int_{S_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \Phi dS_1 \\ & - \int_{S_3} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) \Phi dS_3 - \int_{S_4} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right) \Phi dS_4 \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \chi = & - \int_{V(\eta)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \delta \Phi \cdot dV \\ & + \int_{S_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - n_y \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \delta \Phi \cdot dS_1 \\ & + \int_{S_1} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} + g\eta \right] \delta \eta \cdot dS_1 \\ & + \int_{S_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta \Phi \cdot dS_2 + \int_{S_3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) \delta \Phi \cdot dS_3 \\ & + \int_{S_4} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right) \delta \Phi \cdot dS_4 \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

変分を受ける独立量は Φ, η であって、 $(\partial \Phi / \partial t), (\partial \eta / \partial t), (\partial \bar{\Phi} / \partial n), (\partial \Phi' / \partial n)$ は変分を取るに際しては定数と見做される。これより、式 (7) の汎関数を停留にする条件として流体運動の基礎式がすべて得られる。

ここで、ある時刻での解析領域 V を三角形要素群に

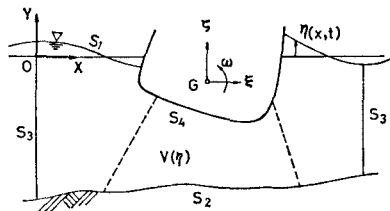


図-1 解析領域

* 正会員 熊本大学助手 工学部環境建設工学科

** 正会員 熊本大学講師 工学部環境建設工学科

分割して、1つの要素 i, j, m 内の速度ポテンシャル Φ をその節点値 $\Phi^T = [\Phi_i, \Phi_j, \Phi_m]$ で表現すると Φ は x, y の一次式で近似され次式で表わされる。

$$\Phi = [N_i, N_j, N_m]\Phi = [N]\Phi \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \Phi = B^T \Phi \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \Phi = C^T \Phi \quad \dots\dots\dots(11)$$

また、境界 S_1, S_2, S_3, S_4 での諸量は次式のように三角形要素の境界上節点 i, m での値を用いて表現する。

$$\begin{aligned} \Phi &= [N_s]\Phi, & \eta &= [N_s]\eta \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= [N_s^*] \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\}, & \frac{\partial \eta}{\partial t} &= [N_s^*] \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= [N_s^*] \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\}, & \frac{\partial \eta}{\partial n} &= [N_s^*] \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial n} \right\} \quad \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

ここに、 $[N_s] = [N_i, N_m]$, $[N_s^*] = [N_i^*, N_m^*]$ であり、*印は変分を受けない量であることを意味する。これ等を用いると、式(7)の汎関数は有限個の節点値で表現でき、さらにこれに変分原理を適用すると、 $\delta\Phi, \delta\eta$ に関する停留条件より次の式(13)、式(14)を得る。

$$\begin{aligned} \sum_V (BB^T + CC^T)\Phi \cdot \Delta - \sum_{S_1} S^* \left\{ n_y \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} \\ - \sum_{S_3} S^* \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} - \sum_{S_4} S^* \left\{ \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots(13) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sum_V \Phi^T (BB^T + CC^T) \Phi \cdot \Delta \right] \\ + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sum_{S_1} \eta^T S \eta \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sum_{S_1} \eta^T S^* \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \right] = 0 \\ \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

ここに、 $S = \int_e [N_r]^T [N_s] dS$, $S^* = \int_e [N_s]^T [N_s^*] dS$ である。

しかしながら、解析領域は独立な変関数 η の関数であり、また、物体没水表面は物体運動により決定される変位量の関数である。したがって、境界 S_1 および S_4 に関する要素の形状係数にはこの未知な変位量が含まれ、このままでは非線形な多元連立方程式を解かねばならない。そこで、増分法を導入して、これの線形化を図る。すなわち、ある時刻 t での第 n 近似解が既知であると、その第 $n+1$ 近似解を次のように表わす。

$$\begin{aligned} \Phi^{n+1} &= \Phi^n + d\Phi \equiv \Phi_0 + d\Phi \\ \eta^{n+1} &= \eta^n + d\eta \equiv \eta_0 + d\eta \quad \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

これによって、式(13)、式(14)中の非線形な形状係数 B, C, S, S^* は次式のように書き改められる。

$$\begin{aligned} B &= B_0 + B_1 d\eta, & C &= C_0 + C_1 d\eta \\ S &= 1/3 \cdot (l_0 + L_1^T d\eta) (S_0 + N_1 d\eta S_1 \\ &\quad + N_1 d\eta N_1 d\eta S_0) \\ S^* &= l_0/3 \cdot (S_0 + N_1 d\eta S_1 + L_1^T d\eta S_0/l_0) \quad \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

ここに、 $N_1 = [c_i, c_m]$, $L_1^T = b_j/l_0 \cdot [-1, 1]$, l_0 は線分 im

の第 n 近似長さである。なお、上式を式(13)および式(14)に代入して得られる方程式群において $d\Phi$ および $d\eta$ に関する2次以上の項は省略している。また時刻 t での状態量 $(\partial\Phi/\partial t), (\partial\eta/\partial t)$ に関しては時間差分による展開を行ない、また、境界 S_3 (式(13)の左辺第3項) に関しては、ポテンシャル接続法²⁾を利用した開境界処理¹⁾を用いて計算を行なっている。以上より、没水表面 S_4 (式(13)の左辺第4項) での Φ' が求まると初期の Φ_0, η_0 を与えて計算を行なう事ができる。以下には境界 S_4 での Φ' の表現について説明する。いま、運動する物体の重心の静止位置での座標を $\bar{G}(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ 、静止位置からの水平、鉛直および回転の各変位をそれぞれ ξ, ζ, ω とする。没水表面の座標 (x', y') はこれ等変位量の関数であり、一般に次式の形で表現できる。

$$\Phi'(x', y', t) = \Phi'(f(\xi, \omega), g(\zeta, \omega), t) \quad \dots\dots\dots(17)$$

物体の強制運動による波の発生問題を解析する場合には上式中の ξ, ζ, ω 等が既知であるので、物体の移動位置に応じて $(\partial\Phi'/\partial n)$ が与えられ、前述の手法を用いてこれを解析する事ができる。

一方、波と物体との連成した運動系の場合には以下の様になる。

図-2に示すように、没水表面に接する要素の表面上節点 i, j が第 n 近似解から dx, dy

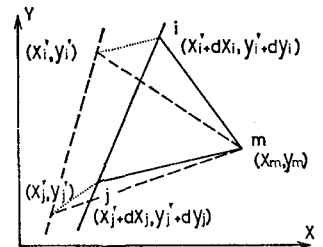


図-2 物体没水表面要素

だけ変位するとき、三角形 i, j, m の面積 Δ の増分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_0 + 1/2 \cdot [b_i^0, b_j^0, b_m^0] dx \\ &\quad + 1/2 \cdot [c_i, c_j, c_m] dy \quad \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

ここに、 $dx^T = \{dx_i, dx_j, 0\}$, $dy^T = \{dy_i, dy_j, 0\}$ である。この増分を考慮すると $\partial\Phi'/\partial n$ は次式から計算される。

$$\begin{aligned} \partial\Phi'/\partial x &= B^T \Phi' \\ &= (B_0^T + dx^T B_1^T + dy^T B_1^T) (\Phi_0' + d\Phi') \\ \partial\Phi'/\partial y &= C^T \Phi' \\ &= (C_0^T + dx^T C_1^T + dy^T C_1^T) (\Phi_0' + d\Phi') \\ &\quad \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{-1}{(2\Delta_0)^2} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_m \\ b_m b_i & b_m b_j & b_m b_m \end{bmatrix}, & C_1 &= B_1 \\ &\quad \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

式(19)中 dx, dy は物体の変位量で決まる量である。いま、物体静止のとき重心から $(\bar{x}, \bar{y})$ だけ離れた点は、物体運動によって点 (x', y') に移動すると、これは、

$$\begin{aligned}x' &= \bar{x}_G + \xi + \bar{x} \cos \omega - \bar{y} \sin \omega \\y' &= \bar{y}_G + \zeta + \bar{x} \sin \omega + \bar{y} \cos \omega \quad \dots\dots\dots(21)\end{aligned}$$

これに、増分法を用いて、第 $n+1$ 近似解を第 n 近似解 ξ_0, ζ_0, ω_0 とその増分量 $d\xi, d\zeta, d\omega$ で表現すると結局次式を得る。

$$\begin{aligned}dx &= d\xi - (\bar{x} \sin \omega_0 + \bar{y} \cos \omega_0) d\omega \\dy &= d\zeta + (\bar{x} \cos \omega_0 - \bar{y} \sin \omega_0) d\omega \quad \dots\dots\dots(22)\end{aligned}$$

上式と式 (19) によって、没水表面での Φ' と物体の有限な移動量との関係を得ることができる。また、物体の幾何学的条件は $x' = x'_0 + dx, y' = y'_0 + dy$ とする事によって同時に満足される。

一方、図-1 に示すように繋留された物体の運動方程式は、 M を物体質量、 I を物体の重心に関する慣性率率とすると、次式で表わされる。

$$\begin{aligned}M \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \int_{S_4} p_H dS_4 - (k_{xx} \xi + k_{xy} \zeta + k_{x\theta} \omega) \\M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \int_{S_4} p_V dS_4 - (M_g + T_V) \\&\quad - (k_{yx} \xi + k_{yy} \zeta + k_{y\theta} \omega) \\I \frac{d^2 \omega}{dt^2} &= \int_{S_4} p_M dS_4 - (k_{\theta x} \xi + k_{\theta y} \zeta + k_{\theta \theta} \omega) \quad \dots\dots\dots(23)\end{aligned}$$

ここで、 $k_{xx}, k_{xy}, \dots$ 等は、繋留索の各方向変位量に対応するバネ定数であり、 T_V は静止状態での索張力の鉛直方向成分である。 p_H, p_V は物体に作用する流体圧の水平および鉛直方向成分、 p_M は流体圧の物体重心に作用するモーメントである。ここに流体圧 p は次式に示すように三角形要素の節点値を用いて計算される。

$$p = -\rho \left[[N] \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} + \frac{1}{2} \Phi^T (BB^T + CC^T) \Phi + gy \right] \quad \dots\dots\dots(24)$$

ここに、 ρ は流体密度である。しかるに、これを用いて式 (23) の運動方程式も速度ポテンシャルおよび物体の変位量を用いて表現できる。また、これに増分法を導入し、先に求めた流体運動方程式とを連成させると、結局 $d\Phi, d\eta, d\xi, d\zeta, d\omega$ を未知量とした多元連立方程式が導かれる。これを解く事によって、各種入射波に応じた有限な物体の移動量と、有限振幅の波を同時に計算することができる。また、繋留されていない浮遊した物体の運動は式 (23) 中のバネ定数 $k_{xx}, k_{xy}, \dots$ 等を 0 とする事によってまったく同様に計算できる。

3. 微小振幅定常運動解析

微小な運動の物体と波動の解析に際して、解析領域 V は固定され、流体運動は式 (3) の非線形項が無視される。そこで、この場合の汎関数は次式のように考えられる。

$$\begin{aligned}\chi &= \int_V \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dV \\&\quad + \frac{1}{g} \int_{S_1} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \Phi dS_1 - \int_{S_3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \Phi dS_3\end{aligned}$$

$$- \int_{S_4} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right) \Phi dS_4 \quad \dots\dots\dots(25)$$

この汎関数を停留にする条件として、微小振幅運動の流体域での条件式がすべて同時に得られる。ただし、変分を受ける独立量は Φ のみであって、 $(\partial^2 \Phi / \partial t^2), (\partial \Phi / \partial n), (\partial \Phi' / \partial n)$ は変分をとるに際しては定数と見做される。そこでこれに有限要素法を用いると汎関数の停留条件として結局次式を得る。

$$\begin{aligned}\sum_V (BB^T + CC^T) \Phi \cdot \Delta + \frac{1}{g} \sum_{S_1} S \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} \\- \sum_{S_3} S \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} - \sum_{S_4} S \left\{ \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots(26)\end{aligned}$$

運動の周期性を考えると、 $\Phi = \phi e^{i\omega t}, \bar{\Phi} = \bar{\phi} e^{i\omega t}, \Phi' = \phi' e^{i\omega t}$ なるポテンシャル関数を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned}\sum_V (BB^T + CC^T) \phi \cdot \Delta - \frac{\sigma^2}{g} \sum_{S_1} S \phi - \sum_{S_3} S \left\{ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \right\} \\- \sum_{S_4} S \left\{ \frac{\partial \phi'}{\partial n} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots(27)\end{aligned}$$

ここで、左右仮想境界 S_3 での条件 $(\partial \bar{\phi} / \partial n)$ についての詳細は文献 1) に示している。

以下には、簡単のため図-3 に示す矩形断面をもつ物体の場合を例として物体没水表面 S_4 での $(\partial \phi' / \partial n)$ の表示および物体運動について説明する。

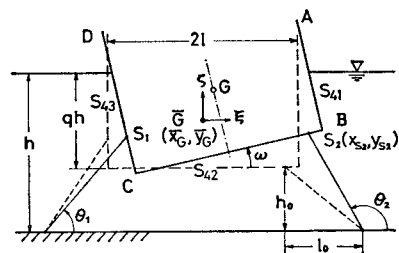


図-3

として物体没水表面 S_4 での $(\partial \phi' / \partial n)$ の表示および物体運動について説明する。

物体重心 G の静止位置 $\bar{G}(\bar{x}_G, \bar{y}_G)$ からの水平変位、鉛直変位および回転角の複素振幅をそれぞれ ξ, ζ, ω とすると没水表面での運動学的条件は

$$\begin{aligned}x &= \pm l \text{ (AB 面, CD 面);} \\ \frac{\partial \phi'}{\partial n} &= l_x \frac{\partial \phi'}{\partial x} = l_x \cdot i \cdot \sigma \{ \xi - \omega(y - \bar{y}_G) \} \\ y &= -qh \text{ (BC 面);} \\ \frac{\partial \phi'}{\partial n} &= l_y \frac{\partial \phi'}{\partial y} = l_y \cdot i \cdot \sigma \{ \zeta - \omega(x - \bar{x}_G) \} \quad \dots\dots\dots(28)\end{aligned}$$

ここに、 l_x, l_y は考える面での外向法線方向の x 軸および y 軸方向余弦を意味する。

物体の各種強制運動による波動を求める場合には、この式 (28) に従って $\partial \phi' / \partial n$ を与え式 (27) を解けばよい。

一方、物体運動方程式は式 (23) で示されているが、図-3 に示す矩形断面物体の場合には、

$$M = 2\rho' \cdot qh \cdot l, \quad I = \nu^2 \frac{2}{3} \rho' \cdot qh \cdot l^3 \quad \dots\dots\dots(29)$$

ρ' は物体密度、 ν^2 は物体固有定数である。また、流体

圧 p は物体没水表面上節点での値を用いて表現すると式 (30) で示される。これを用いると、この場合の流体圧の各方向成分は式 (31) の様に計算される。

$$p(x, y) = -\rho \left[[N_s] \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} + g y \right] \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\begin{aligned} \int_{S_4} p_H dS_4 &= -\rho \left(\sum_{S_{43}} \bar{S} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} + \sum_{S_{41}} \bar{S} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \right) \\ \int_{S_4} p_V dS_4 &= -\rho \sum_{S_{42}} \bar{S} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} - 2\rho g l \cdot \gamma e^{i\omega t} \\ \int_{S_4} p_M dS_4 &= -\rho \left[\sum_{S_{41}} (\bar{P} - \bar{S} \cdot \bar{y}_G) \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{S_{43}} (\bar{P} - \bar{S} \bar{y}_G) \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{S_{42}} (\bar{S} \bar{x}_G - \bar{Q}) \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \right] \\ &\quad + 2\rho g l \left\{ \frac{1}{2} q h (q h + 2 \bar{y}_G) - \frac{l^2}{3} \right\} \omega e^{i\omega t} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここに、 $\bar{S} = \int_e [N_s] dS$, $\bar{P} = \int_e [N_s] y \cdot dy$,

$$\bar{Q} = \int_e [N_s] x \cdot dx$$

また、索の反力について、いま、物体が N 本の引張りバネで繫留されているとし、そのバネ定数を K_n ($n=1, 2, \dots$) とする。このとき、取付点 S_n の物体重心の静止位置からの座標を $(\bar{x}_n^s, \bar{y}_n^s)$ 、索の取付角度 (x 軸から反時計方向を正) を θ_n とすると、バネ定数 $k_{xx}, k_{xy}, \dots$ 等は次のようになる。

$$\begin{aligned} k_{xx} &= \sum_{n=1}^N K_n \cos^2 \theta_n \\ k_{xy} &= \sum_{n=1}^N K_n \cos \theta_n \cdot \sin \theta_n = k_{yx} \\ k_{x\theta} &= \sum_{n=1}^N K_n (\bar{x}_n^s \sin \theta_n - \bar{y}_n^s \cos \theta_n) \cdot \cos \theta_n = k_{\theta x} \\ k_{yy} &= \sum_{n=1}^N K_n \sin^2 \theta_n \\ k_{y\theta} &= \sum_{n=1}^N K_n (\bar{x}_n^s \sin \theta_n - \bar{y}_n^s \cos \theta_n) \cdot \sin \theta_n = k_{\theta y} \\ k_{\theta\theta} &= \sum_{n=1}^N K_n (\bar{x}_n^s \sin \theta_n - \bar{y}_n^s \cos \theta_n)^2 \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

また、一本の索に作用する力 F_n は次式で計算できる。

$$\begin{aligned} F_n &= K_n \cdot \cos \theta_n \cdot \xi + K_n \cdot \sin \theta_n \cdot \zeta \\ &\quad + K_n (\bar{x}_n^s \sin \theta_n - \bar{y}_n^s \cos \theta_n) \omega \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

以上から計算される物体運動方程式と式 (27) を連成して解く事により、各種入射波による微小運動の物体と波とを同時に求めることができる。また、自由運動をする場合には上記のバネ定数を 0 として計算すればよい。

4. 適用計算例

図-3 に示すような矩形断面をもつ自由浮体および交差した繫留索をもつ浮体の反射率について、本文 3. の方法で計算した結果を図-4 (a) および (b) に示す。要素の分割は水深方向に 10 分割し、 x 軸方向には浮体底面を 20 分割、浮体の両側にそれぞれ 50 分割している。図-4 (a) 中の破線は井島の方法³⁾による計算結果である。

図-5 (a) および (b) は、同じく 3. の方法で、矩形物体が回転および鉛直方向の強制運動をするときの造波率 (移動振幅に対する発生波振幅の比) を計算したもので図-5 (b) は実験結果も示している。実験は、両端に消波装置をつけた水槽 (長さ 38 m, 高さ 1 m, 幅 1 m) の一端から 6 m の位置で幅 $2l=80$ cm の矩形断面を有する箱を振幅 2.3 cm で種々の周期の場合について運動させた。なお、運動する箱の振幅 2.3 cm は、箱の運動およ

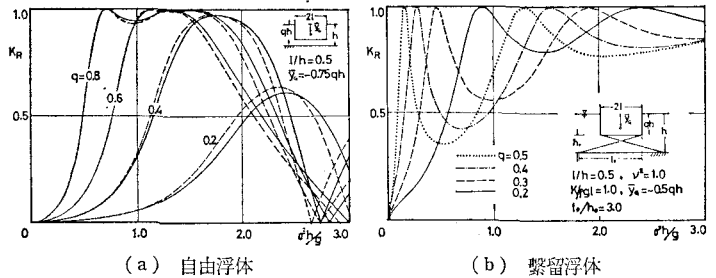


図-4 反射率

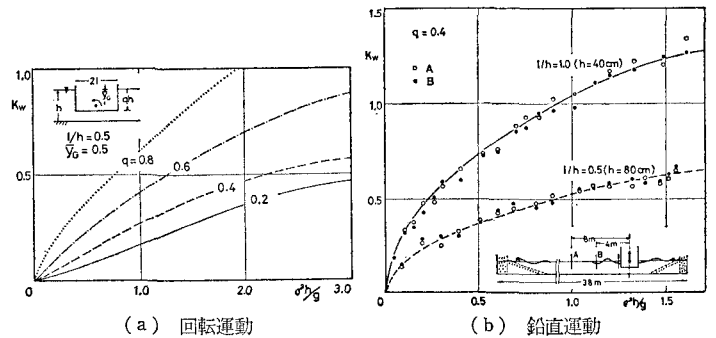


図-5 強制運動造波率

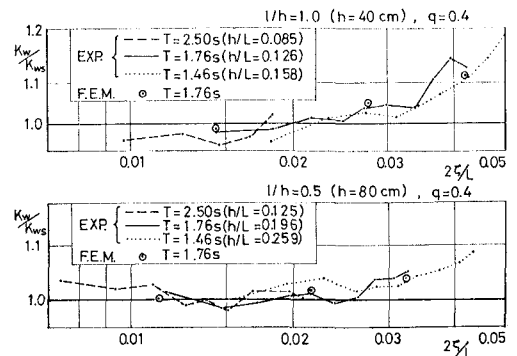
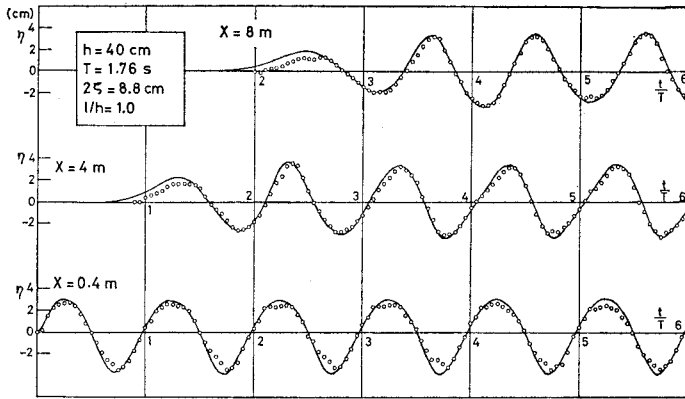
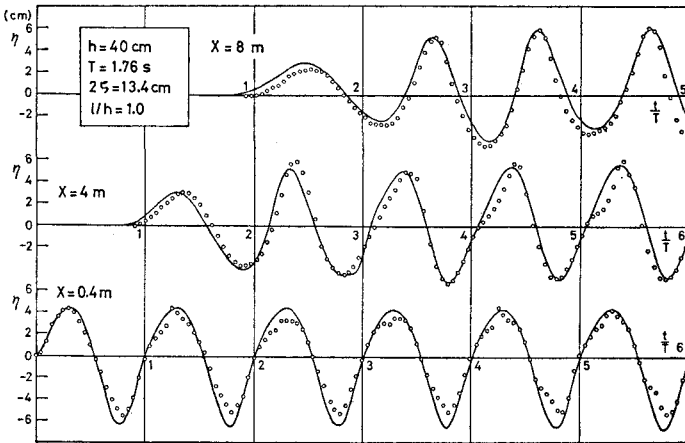


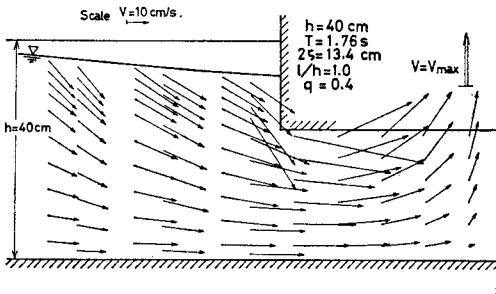
図-6 強制鉛直運動造波率



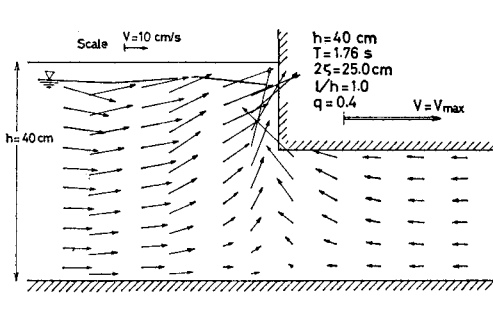
(a)



(b)

図-7 強制鉛直運動時間波形 ($q=0.4$)

(a) 強制鉛直運動



(b) 強制水平運動

図-8 流速分布

び波形ともに線形現象の範囲である事を確かめている。

この非線形効果の 1 例を図-6 に示す。図中の横軸は物体の無次元運動振幅 ($2\xi/L$; L は波長), 縦軸は線形造波率 Kws に対する造波率の比を示す。図中○印は実験結果の実線 (周期 $T=1.76$ 秒) に対応する本文 2. の有限振幅非定常解析による結果である。この計算例より波形および物体回りの流速分布を図示して、図-7, 図-8 に示す。図-7 には対応する実験波形を○印で示している。なお本文 2. の計算に際して要素の分割は水深方向に 10 分割, x 軸方向には, きざみ $\Delta x/L=1/20$ として物体の両側にそれぞれ 70 および 40 分割し, 物体底部は 10 分割とした。また, 時間きざみ $\Delta t/T=1/20$ で, 各時刻内での最大くり返し計算は 3 回とした。

ところで, 図-6 に見られる造波特性で, 物体の鉛直運動の振幅 $2\xi/L$ が増大する程, 造波率が増加する傾向は, 運動する物体の波に対してなす仕事量が, 物体の運動振幅に関し線形でない事を意味し, これは, 造られた波の波形が物体近傍では波の峯が扁平で谷が急峻な同じ波高ならより多くのエネルギーを持つ形をとっている事からも分る。(図-6 の実験範囲では, 有限振幅ストークス波の 3 次項の寄与による波高増加は 1% 以下で, 同図の造波率にほとんど影響しない。)

とっている事からも分る。(図-6 の実験範囲では, 有限振幅ストークス波の 3 次項の寄与による波高増加は 1% 以下で, 同図の造波率にほとんど影響しない。)

5. あとがき

微小振幅解析法の結果は井島の方法³⁾ による結果および実験結果とも良好な一致を見, また, 有限振幅非定常解析による結果も運動が小さい時は微小振幅解析法に一致し, 運動振幅が増大する時, 物体運動および水面波形の双方の非線形性が現われるが, 本計算法による結果はこれ等についてもよく実験結果と一致している。以上のことから, 本解析法が十分有効であると結論される。

参考文献

- 1) 滝川 清・田淵幹修: 有限要素法による波動解析について, 第 25 回海講論文集, pp. 28~32, 1978.
- 2) 井島武士: 最近の波浪理論における境界値問題とその応用, 1971 年度水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会.
- 3) 井島武士・田淵幹修・湯村やす: 有限水深の波による矩形断面物体の運動と波の変形, 土木学会論文報告集, 第 202 号, 1972.