

# Radiation Stress を考慮した有限要素流況解析

——秋田港周辺海域を中心として——

藤森 研一\* ・ 川原 睦人\*\*・ 長谷川 賢一\*\*\*  
稲垣 和男\*\*\*\*・ 高木 利光\*\*\*\*\*

## 1. 結 言

近年、有限要素法による閉鎖性浅水域の流況解析は、ますます、その有効性が認められるようになり、多くの解析例が発表されるに至っている。一般に、閉鎖性浅水域では、それを囲む陸岸の形状が複雑であるため、解析領域として、相当複雑な形状をもつ領域を扱わねばならない。この点、有限要素解析では、自由に、解析領域の形状を近似し得る利点を有している。従来の解析例は、水質汚濁の予測解析や、航路埋没の予測解析に、多く、応用されており、その解析は流況解析と拡散解析とにより構成されている。

有限要素法による流況解析の多くは、密度を一定とし、浅水長波の仮定によって、連続の方程式と運動の方程式とを連立させて解くことが一般的である。さらには鉛直方向の密度差の変化を考慮して、二層流れや多層流れとしての解析も行なわれるようになってきている。これらの解析は、定常解析・準定常解析・非定常解析などの別に分類することができる。

一方、これらすべての解析は、波と流れとは、完全に分離できるものとして解析が行なわれている。沿岸に近い海域では、いわゆる沿岸流が生じ、波による流れに対する影響が、きわめて大きくなることが指摘されている。これは、Longuet-Higgins により導入された、いわゆる Radiation-stress の概念によって、説明されている。この論文は、Radiation-stress を考慮した有限要素解析の一方法について提案するものである。

Radiation-stress を含む有限要素解析は、Liu・Lennon<sup>1)</sup> Skovgaard・Jonsson<sup>2)</sup> などにより、すでに論議されている。

ここで扱う有限要素法は、前記二論文とは、定式化を異にし、次の方法に従っている。まず第一に、Radiation stress を含む基礎方程式を、流速と水位を未知数として、重みつき残差方程式に変換しておく。第二に、流れ関数

の定義式をこの重みつき残差方程式に代入し、流れ関数に対する方程式を得る。第三に、流れ関数を適当な補間関数により近似し、有限要素方程式を得る。このようにすることにより、自然境界条件に、表面力を含む定式化が可能になり、より安定した有限要素解析を行うことが可能となる。

実際計算の例題として、Bowen によって解析的に解が求められている例題、佐藤らによる差分法によって計算された例題との比較を行う。また、秋田港周辺海域に適用された解析例を掲げることとする。

## 2. 基礎方程式

海岸線に直角方向に  $x$  座標を、平行に  $y$  座標を定めることにする。運動方程式ならびに連続の方程式は、次のように与えることができる。

$$\rho \left\{ \frac{\partial [u(h+\eta)]}{\partial t} + \frac{\partial [(h+\eta)u^2]}{\partial x} + \frac{\partial [(h+\eta)uv]}{\partial y} \right\} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = -\rho g(h+\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \rho \bar{c} u \dots (1)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial [v(h+\eta)]}{\partial t} + \frac{\partial [(h+\eta)uv]}{\partial x} + \frac{\partial [(h+\eta)v^2]}{\partial y} \right\} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} = -\rho g(h+\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} - \rho \bar{c} v \dots (2)$$

$$\frac{\partial (h+\eta)}{\partial t} + \frac{\partial [u(h+\eta)]}{\partial x} + \frac{\partial [v(h+\eta)]}{\partial y} = 0 \dots (3)$$

ここに、 $u, v$  は流速、 $h$  は平均海面より測った水深、 $\eta$  は同じく水位、 $\rho$  は密度、 $\bar{c}$  は線形化した海底の摩擦係数である。法線方向に、角度  $\theta$  で波が進入する場合 Radiation stress は、それぞれ、次のように定めることができる。

$$S_{xx} = \frac{3}{2} E - E c^2 \left( \frac{\sin \theta}{c} \right)^2 \dots (4)$$

$$S_{yy} = \frac{1}{2} E + E c^2 \left( \frac{\sin \theta}{c} \right)^2 \dots (5)$$

$$S_{xy} = E c \cos \theta \left( \frac{\sin \theta}{c} \right) \dots (6)$$

ここに、 $E$  は、波のエネルギーであり、 $c$  は波の速度を表わしており、それぞれ、次のように与えられるものとする。

\* 正 会 員 運輸省第一港湾建設局新潟調査設計事務所長

\*\* 正 会 員 中央大学助教授 理工学部土木工学科

\*\*\* 正 会 員 (株)ユニック 研究開発部

\*\*\*\* 正 会 員 (株)ユニック 研究開発部

\*\*\*\*\* 学生会員 中央大学大学院理工学研究科土木工学専攻

$$E = \frac{1}{2} \rho g a^2, \quad a = \frac{1}{2} \gamma (h + \eta) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$c = \sqrt{g(h + \eta)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $2a$  は波高である。式(4)~(6)を式(1),(2)に代入して、式(7),(8)の関係を用いて整頓すると、次のように書くことができる。表記方法は、添字つき記法を用い、通常の総和規約に従っている。

$$\rho u_j u_{i,j} + \rho g \eta_{,i} - A_l(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + \tilde{S}_{ij}(h + \eta)_{,j} + \rho \tilde{c} u_i = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\{(h + \eta) u_i\}_{,i} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、定常状態を扱うため、時間に対しては、独立であるとしている。また、 $A_l$  は乱流粘性項であり、 $\tilde{S}_{ij}$  は Radiation stress の項を代入することによって生じた項である。この論文で対象とした流況解析は、式(9),(10)によって記述されるものとしておく。

### 3. 有限要素法

さて、式(9),(10)に対して、有限要素法を適用することを考える。この場合に、流速と水位、 $u_i$  と  $\eta$ 、とを未知数とするか、流れ関数  $\varphi$  を導入して、これを未知数とするかが考えられる。この論文では、後者、すなわち、流れ関数  $\varphi$  を用いる方法について検討する。

式(9)の両辺に、重み関数  $u_i^*$  をかけ、任意の領域  $V$  について積分し、整頓すると、次の方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \int_V \{u_i^* (u_j u_{i,j})\} dV - g \int_V \{u_i^* \eta_{,j}\} dV \\ & + A_l \int_V \{u_i^* u_{i,j}\} dV + A_l \int_V \{u_i^* u_{j,i}\} dV \\ & = - \int_V \{u_i^* \tilde{c} u_i\} dV - \int_V \{u_i^* \tilde{S}_{ij}(h + \eta)_{,j}\} dV \\ & + \int_S \{u_i^* - g \gamma \delta_{ij} + A_l(u_{i,j} + u_{j,i})\} n_j dS \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここで、式(10)を自動的に満足するように、次のごとく、流れ関数  $\varphi$  を定義しておく。

$$u_i = \frac{1}{(h + \eta)} \epsilon_{ij} \varphi_{,j} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=1, j=2) \\ -1 & (i=2, j=1) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (13)$$

である。一方、重み関数に対しても、

$$u_i^* = \epsilon_{ij} \varphi_{,j}^* \quad \dots\dots\dots (14)$$

なる関係を仮定しておく。式(12),(14)を式(11)に代入して整頓すると、次式を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H^2} \int_V \epsilon_{ik} \epsilon_{jl} \epsilon_{im} (\varphi_{,k}^* \varphi_{,l} \varphi_{,m,j}) dV \\ & + \frac{A_l}{H} \int_V \epsilon_{ik} \epsilon_{im} (\varphi_{,k}^* \varphi_{,j} \varphi_{,m,j}) dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{A_l}{H} \int_V \epsilon_{ik} \epsilon_{jm} (\varphi_{,k}^* \varphi_{,j} \varphi_{,mi}) dV \\ & = - \frac{\tilde{c}}{H} \int_V \epsilon_{ik} \epsilon_{il} (\varphi_{,k}^* \varphi_{,l}) dV \\ & - \int_V \{ \epsilon_{ik} \varphi_{,k}^* \tilde{S}_{ij}(h + \eta)_{,j} \} dV \\ & + \int_S \epsilon_{ik} (\varphi_{,k}^* t_i) dS \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ここに、

$$t_i = \{-g \gamma \delta_{ij} + A_l(u_{i,j} + u_{j,i})\} n_j \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$H = (h + \eta) \quad \dots\dots\dots (17)$$

である。式(15)の計算において、分母に表われる  $H$  はその変化が小さいと考えられるため、定数とみなして計算している。

補間関数として、不完全三次多項式による関数を用いることにする。これは、三角形有限要素に立脚し、各節点について、流れ関数、流速  $u$ 、流速  $v$  の計3個の自由度をもち、合計9自由度となるものである。補間関数を、それぞれ、

$$\varphi = \Phi_a \varphi_a \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\varphi^* = \Phi_a \varphi_a^* \quad \dots\dots\dots (19)$$

のごとくに表わしておく、ここに、 $\varphi_a$ 、 $\varphi_a^*$  は、それぞれ、節点における自由度を表わすものとする。また、 $\Phi_a$  は、補間関数である。

式(18),(19)を式(15)に代入して整頓し、 $\varphi_a^*$  が、任意の値を取り得ることを考慮して、再び整頓すると、次の有限要素方程式を得ることができる。

$$K_{\alpha\beta\gamma} \varphi_\beta \varphi_\gamma + S_{\alpha\beta} \varphi_\beta - \hat{Q}_\alpha = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに、

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{H^2} \int_V \epsilon_{ik} \epsilon_{jl} \epsilon_{im} (\Phi_{\alpha,k} \Phi_{\beta,l} \Phi_{\gamma,m,j}) dV \\ S_{\alpha\beta} &= \frac{A_l}{H} \int_V \epsilon_{ik} \epsilon_{im} (\Phi_{\alpha,k} \Phi_{\beta,m,j}) dV \\ &+ \frac{A_l}{H} \int_V \epsilon_{ik} \epsilon_{jm} (\Phi_{\alpha,k} \Phi_{\beta,j} \Phi_{\gamma,mi}) dV \\ &+ \frac{\tilde{c}}{H} \int_V \epsilon_{ik} \epsilon_{il} (\Phi_{\alpha,k} \Phi_{\beta,l}) dV \\ \hat{Q}_\alpha &= \int_S \epsilon_{ik} (\Phi_{\alpha,k} \hat{t}_i) dS \\ &- \int_V \epsilon_{ik} (\Phi_{\alpha,k} \tilde{S}_{ij} \Psi_{\beta,j}) dV \cdot H_\beta \end{aligned}$$

式(20)を各有限要素について、たて、これら流れの場合全体について加え合わせると、流れの全体に対する有限要素方程式を得ることができる。この有限要素方程式は、非線形代数連立方程式となる。この連立方程式を解くためには、何らかのくり返し計算法を用いる必要がある。以下に述べる計算例では、ニュートン-ラプソン法によるくり返し計算法が用いられた。

## 4. 数値計算例

図-1~3 は, Bowen<sup>3)</sup> によって解析的に解かれた例題と比較する目的で行なわれたものである。図-1 に用いられた有限要素分割ならびに水深図が示されている。碎波帯近傍では, 細い分割を用い, 沖合では, より粗い分割を用いている。図-2 に示す波高分布を用いて, 有限要素解析が行なわれた結果, 図-3 の流れ図が得られ

ている。Bowen の結果と比較的良好一致を示している。

図-4, 5 は, 佐藤<sup>4)</sup>による差分法を用いた計算結果との比較を行ったものである。用いた有限要素分割を図-4 に, 計算された流速を図-5 に示す。差分法による計算とは, 基本的に境界条件が異ってはいるが, その部分を除き, 全体的に良好一致の傾向をみせている。

図-6~8 は, 秋田港周辺海域に, 適用した計算例で

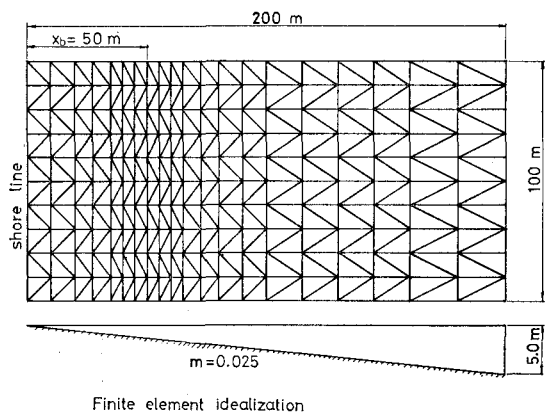
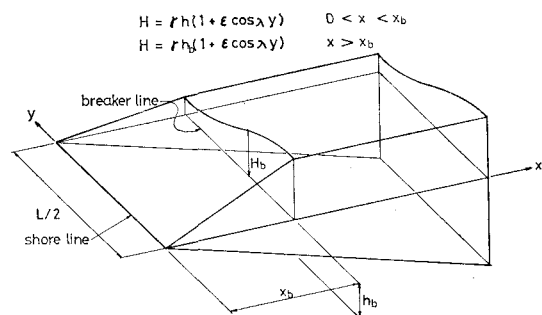
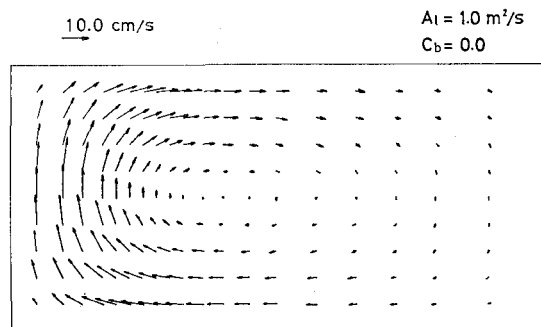


図-1



Distribution of wave height

図-2



Current velocity

図-3

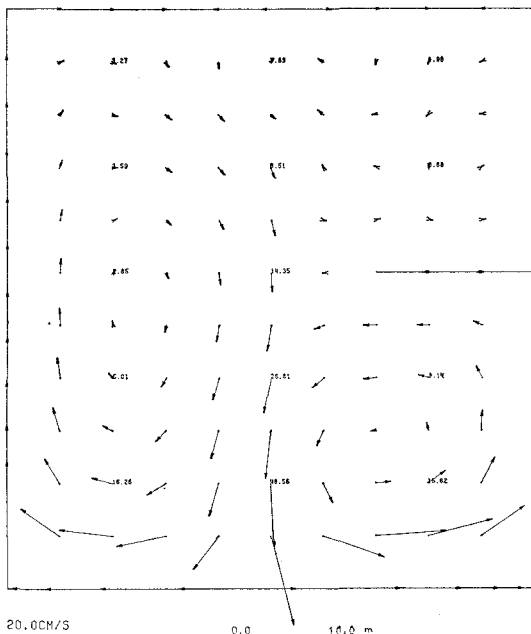


図-4

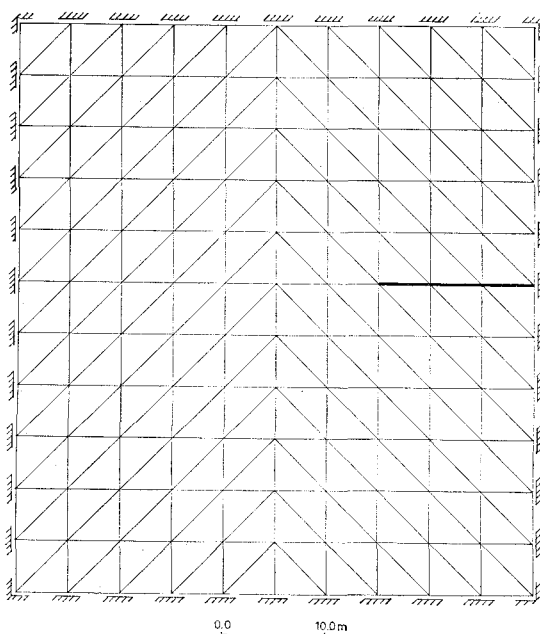


図-5

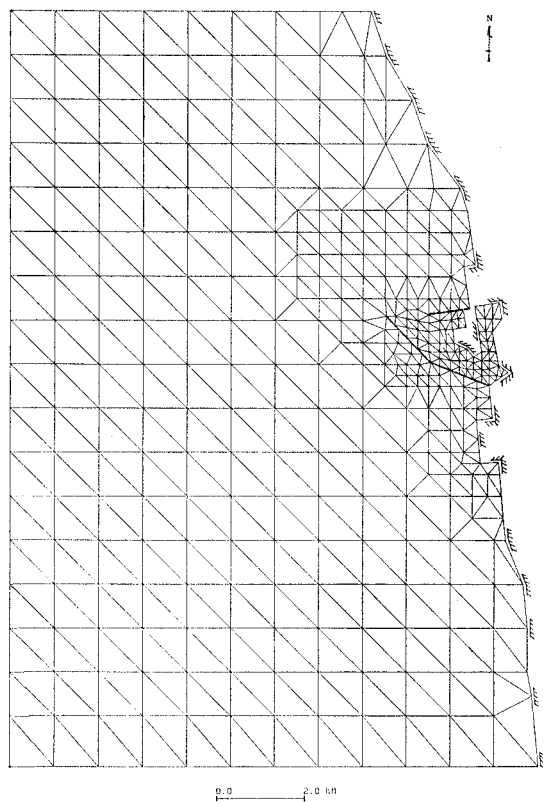


図-6

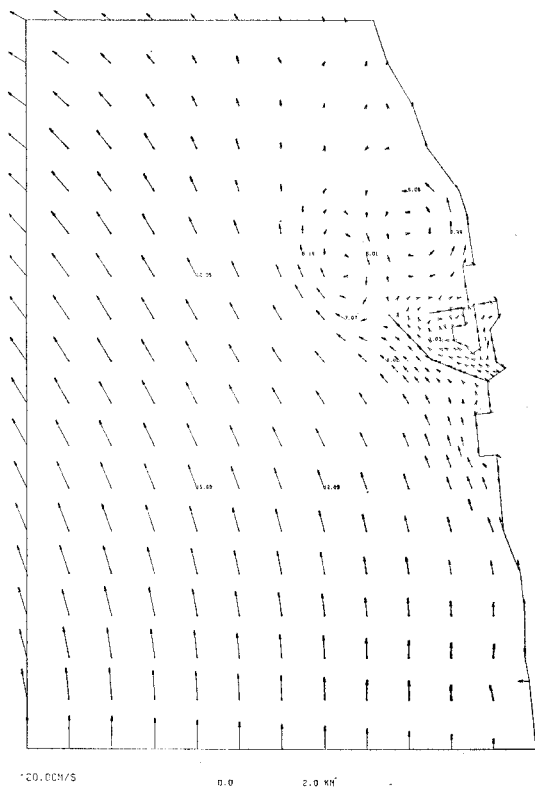


図-8

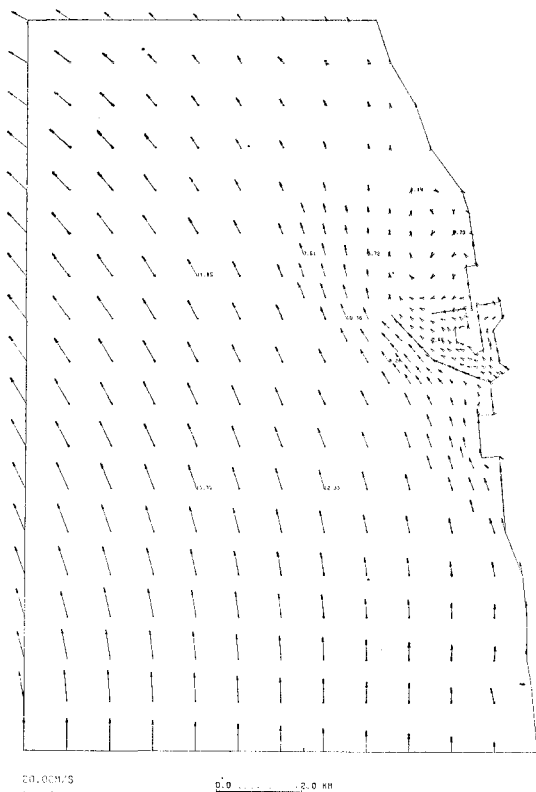


図-7

ある。図-6 は、用いられた有限要素分割を示す。図-7 は、Radiation stress を考慮しない場合の流速分布を示している。左端の境界線上に示す値は、境界条件として与えられた流速である。また、陸岸については、陸岸に垂直方向の流速を零としている。他の境界については、自然境界と考えて計算した。図-8 に、Radiation stress を考慮した計算結果を示す。波高分布は、別途行なわれた模型実験の結果より推定した。図-7 および 図-8 の結果を比較することにより、防波堤近傍においては、流れの様相が、きわめて大きく異なっていることが理解できる。さらに、防波堤近傍で、循環する流れが、計算されており、これは、水質汚濁や航路埋没などの予測解析に対して、無視し得ない影響があるものと考えられる。

#### 参 考 文 献

- 1) Liu, P. L. and G. P. Lennon: Finite element modelling of nearshore currents, Proc. ASCE, Vol. 104, No. WW2, pp. 175-189, 1978.
- 2) Skovgaard, O. and I. G. Jonsson: Current depth refraction using finite elements, Proc. 15th Conf. on Coast. Eng., Hawaii, pp. 721-737, 1976.
- 3) Bowen, A. J.: Rip current, J.G.R., Vol. 74, No. 23, pp. 5467-5490, 1969.
- 4) 佐藤昭二・永井紀彦・小笹博昭: 波による海浜流の数値計算の一例, 港湾技研資料, No. 290, June, 1978.