

内部抵抗係数に関する再考

須賀 堯 三*・高 橋 晃**

1. 本論の主旨

二層流の内部境界面に作用する内部抵抗係数については多くの研究があり、評価はほぼかたまりつつあるようにみられていた。しかし、実用面からみて、つぎの3点については未解決であり、検討を必要とする。すなわち、

a) 実験値や実測値（実測例は十分とはいえない）の評価が十分でなく、バラツキも多い。したがって、実用公式の実用上の誤差範囲も不明確であり、信頼性に問題がある。

b) 著者らが提案してきた実用公式¹⁾ (1975) は、内部抵抗係数 f_i が比較的大きな値となる実験水路ではほとんど問題はなく、また、 f_i の小さい値を示す実際の河川では、内部フルード数 F_1 の小さい範囲において十分な適合度を有している。しかし、河川において F_1 の大きい範囲（たとえば $1 < F_1 < 0.6$ ）では実際の現象を説明することが困難となり、定常流の塩水くさびにおいても、多くの場合河口付近の内部境界面形状を正確に計算しえない。

c) 塩水くさびの混合状態や二次元性が、実験水路に現われるような理論の仮定に近い理想状態から離れ、遠ざかるにしたがって、濃度分布や流速分布に変化をきたし、それにより内部抵抗係数が変化する²⁾。とくに、内部渦より下流の範囲や一部非定常効果の生じる場合などにおいて問題となる。

今回は、上記の a) および b) の問題をとりあげて、実験値について誤差の評価を行い、内部抵抗係数の問題点について再考した。そして、従来の提案式を再検討した結果、実用上に支障の生じない、かつ十分な精度を有する実用公式の提案を行った。

2. 内部抵抗係数についての問題点

ここでの取扱いは、内部抵抗係数に関する理論解析上の問題ではなく、実用公式の問題点とする。それらを大別すると、a) 内部境界面現象のレジームの抵抗関数形への反映、b) 実験ならびに測定誤差、c) 逆算式、およ

び d) 実在する塩水くさびの理想的な塩水くさびからのずれに対する補正問題などであろう。

内部抵抗係数の関数形では、抵抗の発生源となる現象として、a) 層流的粘性摩擦抵抗、b) 乱流混合によるレイノルズ応力、c) 波長の短い内部波の造波抵抗、および d) 連行現象による付加摩擦力などを考慮する必要がある。このうち、河川では a) の影響は無視しうるが、d) の効果が重要であり、検討する必要がある。内部波の性状については、たとえば室田・辻本・橋本³⁾らの研究があるが、実験値ならびに実測値でみるかぎり、c) については内部波のレジームの違いによる影響を明確に定量表示するまでに至っていない。

実験・実測誤差には各種のものが含まれる。測定量には、密度（濃度 C 、および水温 T ）、流速、および水位などがあり、条件設定量には流量 Q や潮位などがある。その他、測定点の位置の誤差や内部境界面位置決定上の誤差などが含まれる。界面位置は、下層の平均濃度を有する水塊が上層に連行されるという現象を重視した定義⁴⁾に基づいて定められている。自然河道では、大きい波長を有する内部波や内部渦が河口以外の河道に存在する場合が少なくなく、内部境界面の勾配を正確に読みとることが容易でないこともある。また、たとえ実験水路でも、完全な定常状態をつくり出すことは困難である。幅 80 cm の 100 m 直線水路において、50~60 m の塩水くさび（平均下層水深 $h_2 \approx 20 \sim 30$ cm）の実験では、くさび先端で周期 1~2 時間、長さ 2~3 m 程度の変動があるのが普通である。このとき、Schijf and Schönfeld の単純水路の場合の塩水くさび長さの式によれば、平均の抵抗係数 $\bar{f}_i$ に対して $1.5/60 = 2.5\%$ の誤差となる。側壁粗度の効果は、金子ら⁵⁾の評価によれば 10~20% 程度とあるが、著者らの実験では少し小さい。これは後に考察する。実験および実測値には以上のように種々の誤差が含まれるが、著者らの 861 箇の資料について、著者の以前の提案式からのずれの標準偏差 $\sigma \left\{ \sigma^2 = \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 / (n-1) \right\}$ を求めたところ、 $\log_{10} \sigma = 0.134$ であった。図-2 に示す両外側の直線には含まれる範囲に約 68% の資料が入ることになる。ここに、 z は両対数紙上において実用式からの最短距離である。

* 正会員 建設省土木研究所河川研究室長

** 正会員 建設省土木研究所河川研究室研究員

つぎに、逆算式についても再考の要がある。定常状態を考えるとすれば、連行量 $Q_{2,0} = \int_0^L B E dx$ に見合った流量 $Q_{2,0}$ が河口から遡上しているが、くさび長 L が大きくなければ u_2 は小さく、 F_1^2 は 1 に対して無視しうる。ここで、 α を 10^{-1} 以下のオーダーの定数として $u_2 = \alpha u_1$ とするならば、塩水くさび形状の表示式、ならびに摩擦項は、それぞれ

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon(1-F_1^2)} \left[-(i_{f1} - i_{f2}) + (1-F_1^2)\varepsilon \frac{E}{u_1} + \frac{u_1^2}{gB} \frac{\partial B}{\partial x} \right] \dots\dots\dots (1)$$

$$i_{f1} - i_{f2} = f_i \frac{\varepsilon}{2} (1-\alpha^2) F_1^2 \left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right) + f_b \varepsilon \alpha^2 F_1^2 \frac{h_1}{h_2} \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここで、 h は水深、 u は流速、 $\varepsilon = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ 、 ρ は密度、 i_f は摩擦勾配、 B は流路幅、 f_b は水路底の摩擦抵抗係数、および g は重力加速度であり、添字 1, 2 はそれぞれ上・下層の水理量を表わす。また、(2) 式では ε を 1 に対して無視している。連行係数 $E/u_1 = 2 \times 10^{-8} F_1^3$ とする⁹⁾とき、内部抵抗係数 f_i は (1) 式と (2) 式より求めるが、(2) 式において $f_i \gg \alpha^2 f_b$ とみなしうなるならば、

$$f_i \left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right) = - \frac{2(1-F_1^2)}{F_1^2} \frac{\partial h_1}{\partial x} + 2 \frac{h_1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} + 4 \times 10^{-8} (F_1 - F_1^3) \dots\dots\dots (3)$$

と表わされる。いっぽう、内部抵抗係数として一般に認容されている関数形は、クーリガン数 (あるいは岩崎数) $\phi = R_e \cdot F_1^2$ (ここに $R_e = u_1 h_1 / \nu$ で上層のレイノルズ数) により、

$$f_i = a \phi^{-n} \quad (a, n \text{ は定数}) \dots\dots\dots (4)$$

であり⁴⁾、著者らが提案してきた実用公式では、 $a = 0.35$, $n = 0.5$ である。この式は、実験水路内の塩水くさびはもとより、河川における塩水くさびに対しても、河口付近を除き、十分な適用性を有している。定常状態の塩水くさびでは、河口において内部ジャンプの発生がみられ、その渦の上流端では $F_1 \approx 1$ であるが、直線水路 ($\partial B / \partial x = 0$) のときには、(3) 式から明らかに $F_1 = 1$ で $f_i = 0$ になってしまうという矛盾がある。(3) 式で $\partial B / \partial x$ の項以外を考えると、小さい水路では右辺の第 3 項は無視しうるほどであるが、河川の場合には $\partial h_1 / \partial x$ も小さいので相対的に第 3 項の連行の項の影響が現われてくる。ところが、第 3 項は $F_1 = 0, 1$ で零であり、 $F_1 = 1/\sqrt{3} \approx 0.58$ を頂点として上に凸の曲線であり、 F_1 が 1 に近づくとき小さくなる性質を有している。これは、 ϕ とはほとんど無関係に、ほぼ

フルード数 F_1 のみに関係する事項である。実験水路の資料では (3) 式の右辺第 3 項は無視しうる程度であるから、 f_i は ϕ によって表示しうるが、河川の資料を用いる場合に第 3 項を無視するとすれば、粗雑になり過ぎることになる。実際には、河川の資料は少いので、別途の方法で (4) 式が修正されなければならないと思われる。

河川に存在する塩水くさびが理想のものとかけ離れていることに対する影響の程度については、長良川の検討⁶⁾において、なお問題は残されているものの、ほとんど緩混合状態で境界面の判定に苦しむ程度のもので、適用可能であることが指摘されている。なお、この検討例を通じて、付加摩擦力を考慮しないとよい結果が得られないこと、および非定常流の場合にも、定常流として求めた抵抗係数が適用可能であることが明らかにされている。

以上のように、内部抵抗係数についてはなお検討を要する問題を少しとしない。なかでも、内部抵抗係数 f_i がクーリガン数だけでは表現しきれず、付加摩擦力を加えると改善されること、および散乱している実験実測値の上下限まで考慮しなくてもすませるために、誤差については、さらに検討を加えておく必要があろう。

3. 側壁の影響

実験水路では流路幅の比が小さいため、粗度ならびに表面張力の効果により、流速分布は一樣とならず、かつ側壁付近で水位の盛り上がりがある。図-1 に水路幅 80 cm、全水深 $H = h_1 + h_2 = 55.07$ cm で、 $Q_1 = 15$ l/s、 ε

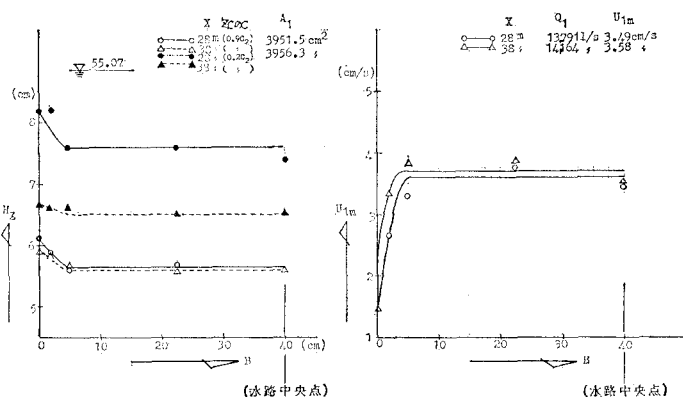


図-1 水位と流速の横断分布

$= 6.018 \times 10^{-3}$ の場合の実験例を示す。このような傾向は、側壁の粗度や ε などによって異なるが、ガラス面とし、実験水理量の範囲を考えると、おおよそ普遍性があるとしてよいであろう。

内部抵抗係数の逆算に際し、平均流速 $u_1 = Q_1 / (B h_1)$ としているが、実際の水理量に ' 印を付すと、 $u_1' = Q_1 / A' = Q_1 / (h_1 B')$ である。図-1 より、界面の側壁における上昇量を 0.4 cm、影響範囲を 5 cm として近似的に三角形を仮定すると、 $A' = h_1 B' = h_1 B - 2$ (cm 単位)、し

たがって、 $\Delta B = B' - B = -2/h_1$ である。いま簡単のため、(3)式の右辺第一項のみを考えると、 B のみによる誤差率は

$$\frac{\Delta f_i}{f_i} = 2 \frac{\epsilon g h_1^3 B}{Q_1^2} \Delta B \left(\frac{\epsilon g h_1^3 B^2}{Q_1^2} - 1 \right) \\ = \frac{-1}{1-F_1^2} \frac{4}{h_1 B} \quad (\text{cm 単位}) \dots\dots\dots (5)$$

となる。この結果によると、 F_1 が1に近づくと非常に大きくなるが、塩水くさびの大部分の範囲で $F_1=0.25 \sim 0.75$ であるから、たとえば $F_1=0.5$ のとき、誤差率 ($\Delta f_i/f_i$) は表-1 のようになる。小さい水路では 10% 程度の誤差となるが、土木研究所の $B=80$ cm の水路では 0.2~0.7% 程度の誤差であると判断される。

表-1 側壁による抵抗係数 f_i の誤差率 ($-\Delta f_i/f_i$: %)

h_1 (cm) \ B (cm)	5	10	20	40	80
10	10.6	5.3	2.7	1.3	0.7
20	5.3	2.7	1.3	0.7	0.3
30	3.6	1.8	0.9	0.4	0.2

4. 河床摩擦の影響

成層流の界面にせん断力が作用しており、たとえ u_2 が無視しようとしても流れは存在し、河床摩擦の影響はある。内部抵抗係数の逆算式である (3) 式の省略のない (ただ 1 に対して ϵF_2^2 を省略) もとの式に対して、

$$-(1-F_1^2-F_2^2) \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{h_1}{B} F_1^2 \frac{\partial B}{\partial x} \\ + \left(1-F_1^2 - \frac{u_1}{u_2} F_2^2 \right) \frac{E}{u_1} \\ - \frac{1-\alpha^2}{2} \left\{ 1 + (1-\epsilon) \frac{h_1}{h_2} \right\} F_1^2 f_i - \alpha^2 \frac{h_1}{h_2} F_1^2 f_b = 0 \\ \dots\dots\dots (6)$$

の関係が成り立つ。ここに、 $\alpha = u_2/u_1$ である。通常は第5項目の河床摩擦の効果を無視して f_i を逆算しているので、その影響について見当をつけておくことが必要である。定常流では α は 10^{-1} 以下のオーダーである。簡単のため、微少項を省略することすれば、第4項と第5項の比 β は

$$\beta = \alpha^2 f_b/f_i \dots\dots\dots (7)$$

である。通常の適用範囲として、 $f_i \approx 5 \times 10^{-3}$ 、 $f_b = 10^{-2}$ 、 $\alpha = 10^{-1}$ とすれば $\beta = 0.02$ で、 f_i に対し 2% 程度の寄与率となる。 α がさらに小さいときはほとんど無視しようということになる。

5. 連行量の影響

小型水路の場合は連行量の効果を無視して f_i が逆算されることが多い。(6)式において第3項と第4項の比を γ とし、微少項を省略すれば、

$$\gamma = 2 \times 10^{-3} (1-F_1^2) F_1/f_i \dots\dots\dots (8)$$

である。大河川のように R_e が增大すると f_i が小さくなるから γ は増大するが、 f_i が大きいときに γ は非常に小さくなることがわかる。ちなみに、 $f_i = 5 \times 10^{-3}$ のとき、 $F_1=0.1$ では 4%、 $F_1=0.3$ では 9% と F_1 の増大と共に誤差は増大するが、その後減少し、たとえば $F_1=0.9$ では 7% と減少する。しかし、連行量の効果は意外に大きく、河川の資料を用いる場合には、この項を無視して逆算すると 10% 程度の誤差は含まれると考えなければならない。

6. 付加摩擦力

すでにみてきたように、内部抵抗係数はクーリガン数のみによっては表現しえない。この程度はレイノルズ数の大きいほど顕著となる。ところが、河川の実測値が十分ないので、逆算の f_i の値から実用公式を求めることは困難である。そこで、現象から判断して実際の現象を説明しうる抵抗係数を求めることとする。現在の実用公式の基礎となる資料では、内部フルード数が大きく、したがって連行量の大きい範囲の資料が十分でなく、付加摩擦力を考慮していないといえる。河川の資料においても、河口付近で f_i が小さすぎて困るという事情もあり、 F_1 の大きい範囲にのみ影響のある付加摩擦力を加味させることは理にかなっている。このことは、内部フルード数が大きい範囲においても内部波のレジームの変化に基づく効果が顕著でないとし、線型性の仮定が成り立つとするものである。

付加摩擦力は、成層流の流速分布、ならびに密度分布によって異なるが、理想的な塩水くさびでは $2E/(u_1-u_2)$ であるから、すでに提案ずみの実用公式に加えることとすれば、(ただし、付加摩擦力を $2E/u_1$ と近似する)

$$f_i = 0.35 \psi^{-0.5} + 2E/u_1 \dots\dots\dots (9)$$

である。図-2 は F_1 により分けているが、流速と濃度の測定値のある約 150 の資料を用いたもので点の数は少

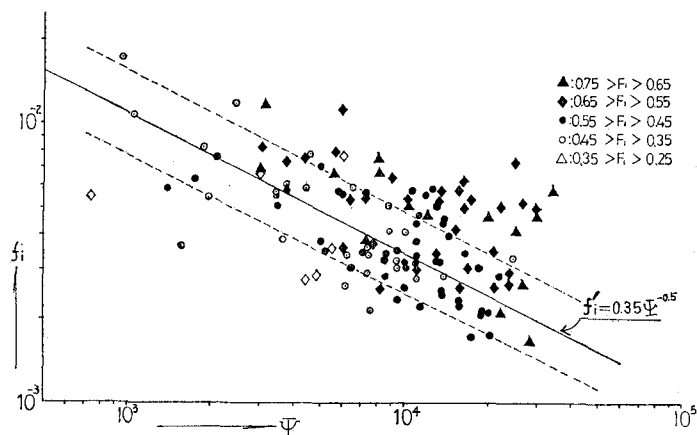
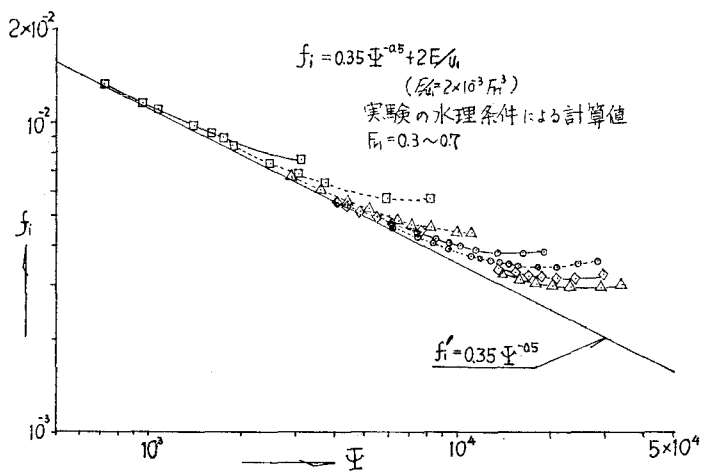


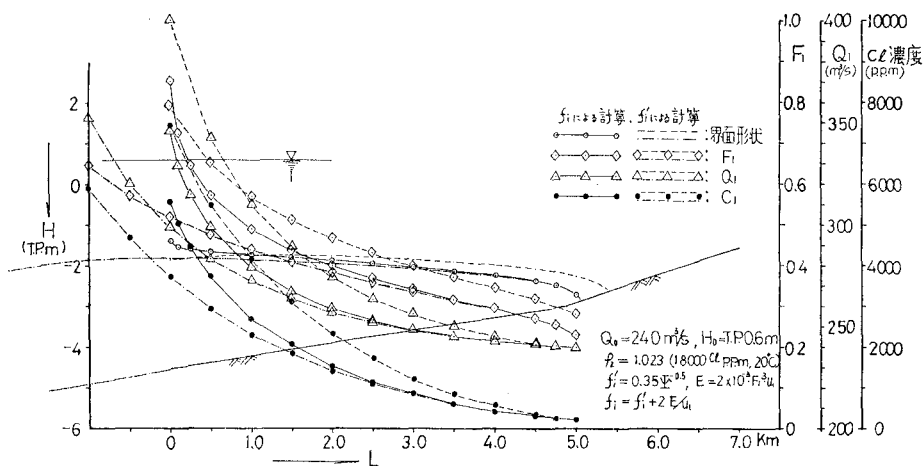
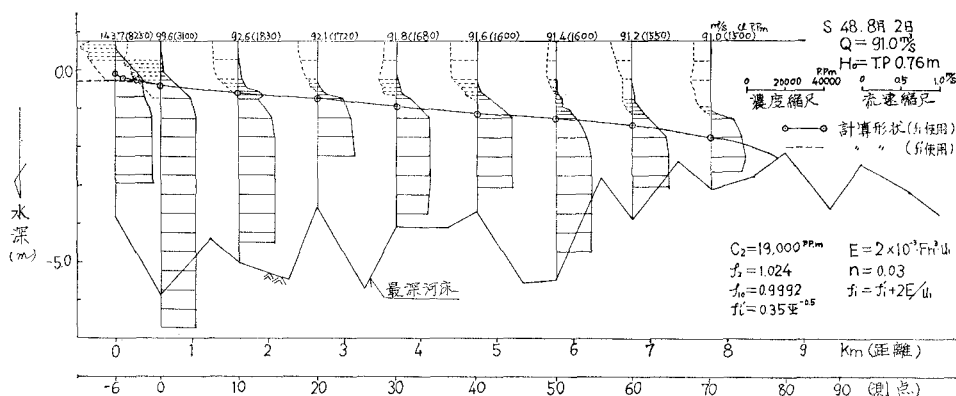
図-2 f_i におよぼす F_1 の効果と、誤差の標準偏差

図-3 付加摩擦力による f_i のクーラン直線からのずれ

く、以前のグラフよりバラツキも大きく、かつ点の位置が F_1 が大きいほど上方へ移動している。その $2E/u_1$ による以前の実用式 $0.35\psi^{-0.5}$ からの増分は F_1 の増大と共に顕著となり、その様子は 図-3 に示すようである。し

かしながら、実際の河川の塩水くさび形状を計算すると、最上川の計画断面の場合 (図-4) および阿賀野川の実測との対比 (図-5) の例にみられるように、これまでの実用式で安定して計算できなかったものが、(9) 式によるとほぼ正確に計算できることがわかる。すなわち、前者の公式では河口付近で F_1 が大きくなると、連行量の増大により Q_1 が増えて、その結果界面位置が実測値ほど上昇しない。仮りに上流から下流に向けて計算するとすると、塩水くさび先端付近で界面位置を少しあげ、河口よりむしろやや上流における内部ジャンプを期待しても、 F_1 が早目に大きくなるため、界面形状は

河口付近で逆に低下する結果となる。(9) 式によると、若干 f_i が大きくなるため、このような不都合な点は解消され、良い結果が得られる。また、長良川の二層不定流計算⁶⁾においても、付加摩擦力を考慮することにより、

図-4 f_i の旧式と新式の実例計算による比較 (最上川)図-5 f_i の旧式と新式の実測計算による比較 (阿賀野川)

満足すべき結果が得られている。

7. ま と め

二層流の内部抵抗係数として、 $f_i=0.35(R_e F_1^2)^{-0.5} + 2E/u_1$ とし、理想的な塩水くさびの場合の付加摩擦力 $2E/u_1$ を加えることにすると、実際の河川に矛盾なく適用でき、かつ実験水路の場合にも影響が現われないことが判明した。この結果、内部抵抗係数はクリーガン数のほか、内部フルード数の関数ということになる。これは現象面からも裏づけられることである。

いっぽう、資料のバラツキの原因は、現象の不安定性に基づくもの、界面位置判定の誤差、 Δx や逆算式に基づくもの、および実験誤差などであるが、今回、特に河床摩擦や水路側壁の影響などについての誤差の検討とそ

の評価を行った。そして、幅の広い水路を用いた著者らの実験結果の精度は十分期待しうることを示した。

参 考 文 献

- 1) 須賀寛三・高橋 晃：弱混合河川における内部抵抗係数，第30回年講概要集，第2部，pp. 470-471, 1975.
- 2) 須賀寛三・高橋 晃：河口流出流に関する実測に基づく考察，第24回海講論文集，pp. 539-543, 1977.
- 3) 室田 明・中辻啓二・橋本長幸：表層密度流の界面における乱れ構造について，第23回水講論文集，pp. 399-404, 1979.
- 4) 土木学会水理委員会密度流研究小委員会：成層密度流の界面現象に関する水工学的研究報告書，pp. 18, 1974.
- 5) 須賀寛三・高橋 晃：淡塩二層流の連行係数，第31回年講概要集，第2部，pp. 383-384, 1976.
- 6) 須賀寛三：一次元二層不定流の数値計算（その3），第26回海講論文集，1979.