

塩水楔の流速分布における Monin—Obukhov 理論の適用性について

日 野 幹 雄*・萩 原 克**

1. 序 論 (成層流の流速分布・密度分布に関する Monin—Obukhov 理論)

安定または不安定の接地境界層の乱流の流速分布・温度分布等に関する次元的考察に基づく理論が Monin—Obukhov¹²⁾ (1954) の相似理論 (similarity theory) である。この理論は最近に至り気象学の分野での多数の実測結果により広く支持されている。ただ、この理論は接地気層 (atmospheric surface layer) において成立する若干の仮定—剪断応力一定 (constant stress), 流れは水平方向に一樣 (homogeneous)—にもとづいており、他のスケールの小さい流れの場で検討されることは少なかった。その様な検討例としては、大気乱流を模擬した成層流風洞での乱流境界層流れ¹⁾, 土砂浮遊流^{4,10)}, 貯水池内の成層流²⁾などを挙げる事ができる。

a) Obukhov scale の導入: さて, Monin—Obukhov 理論では次元的考察に基づいて熱的成層の影響を表す長さのスケール L (scale height または Monin—Obukhov length と呼ばれる) が導入される。

$$L = -\frac{U_*^3}{\kappa g H / c_p \rho \theta} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに, $U_* = \sqrt{\tau/\rho}$: 摩擦速度 (=一定), τ : 剪断応力, κ : Karman 定数, g : 重力加速度, $H (=c_p \rho \omega' \theta')$: 鉛直方向の熱流束 (上向きを正とする), ρ : 空気密度, c_p : 定圧比熱, θ : 絶対 (ポテンシャル) 温度。

b) 風速分布の普遍関数

L は長さの基準スケールであり, 乱流場は無次元高さ z

$$\zeta = z/L \quad \dots\dots\dots (2)$$

に関して記述される。流速分布は

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{U_*}{\kappa z} \phi_M \left(\frac{z}{L} \right) \quad \dots\dots\dots (3)$$

あるいは, 上式を積分して

$$U(z) = \frac{U_*}{\kappa} \left\{ f \left(\frac{z}{L} \right) - f \left(\frac{z_0}{L} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

と表わされる。 z_0 は $U=0$ となる高さ roughness length

である。また, $f(\zeta)$ を普遍関数という。

温度分布は同様にして

$$\theta(z) = \theta(z_0) + \frac{\theta_*}{\alpha} \left\{ f \left(\frac{z}{L} \right) - f \left(\frac{z_0}{L} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに,

$$\theta_* = -\frac{1}{\kappa U_*} \cdot \frac{H}{c_p \rho} \quad \dots\dots\dots (6)$$

c) “log+linear” 則: さて, z の小さい範囲では $\phi_M(\zeta) = 1 + \beta \zeta$ と近似しうるから, 流速分布は

$$U(z) = \frac{U_*}{\kappa} \left(\ln \frac{z}{z_0} + \beta \frac{z - z_0}{L} \right) \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。いわゆる “log+linear” 則 である。 β は 1 のオーダーの係数で Monin—Obukhov 係数と呼ばれ, 大気中での種々の実測によれば, $\beta = 2 \sim 7$, である。また, “log+linear” 則の成立範囲は安定側に広く, 不安定側で狭い。

$$z/L \cong -0.03 \sim +1$$

$\zeta \geq 1$ の強安定域については, Monin—Obukhov 理論では, 直線則 ($f(\zeta) = c\zeta$) としていたが, 最近の実測によれば, むしろ “単純対数則”

$$\frac{U(z)}{U_*} = \frac{(1+\beta)}{\kappa} \ln z \quad \dots\dots\dots (8)$$

が成立するようである。

d) 密度流の場合の L の定義

密度流の場合には, 熱的成層流の場合の熱流束のかわりに, 浮力束 (buoyancy flux) $\bar{q} = \Delta \rho g / \rho \cdot W_e$ (W_e : 連行速度) を用い, これと剪断速度 U_* に関して, 長さの基準スケール (Monin—Obukhov 長さ) L が次のように定義される。

$$L = \frac{U_*^3}{\kappa \bar{q}} = \frac{\rho U_*^3}{\kappa \Delta \rho g W_e} \quad \dots\dots\dots (9)$$

しかし, 浮力束とくに連行速度 W_e は測定し難い量であるので, 全域的 Richardson 数 $Ri = \Delta \rho g h_1 / \rho U_*^2$ (h_1 : 上層 (または下層) 厚さ) に対応して

$$L' = \frac{\rho U_*^2}{\kappa \Delta \rho g} = L \cdot \frac{W_e}{U_*} \quad \dots\dots\dots (10)$$

* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部

** 正会員 工修 電源開発(株)土木試験所

を用いる。なお、連行係数 W_e/U_* は Richardson 数の関数であることが実験的に知られている。

2. 実験方法

a) 実験装置および計測

水路は長さ 3 m, 幅 5 cm, 高さ 20 cm のアクリル樹脂製の開水路である。なお、流れの断面内の 2 次流の発生を防ぐため幅を 3 cm として大部分の実験を行った。水道水を一度貯水槽に溜めつつ、ポンプで上流端水槽に汲み上げ一定水位を保つようにして水路に流した。

一方、水路下流端は断面積 $90\text{ cm} \times 90\text{ cm}$, 深さ 60 cm の塩水槽に連結し、上層流淡水の排水はこの塩水槽中央に設置したモーニング・グローリーにより行った (図-1)。モーニング・グローリーは排水量を多くするため V-ノッチを付し、また、上下にスライドし排水量の調節ができるようにしてある。塩水楔を定常状態に保つためには、水路下流端での塩水の巻き込みを防ぐことが必要で、このために塩水槽と水路下端の間に splitter plate を、モーニング・グローリーの周りにはエプロンを設置した。さらに塩水補給タンクを設置し、塩水槽内の塩水位を調節した。

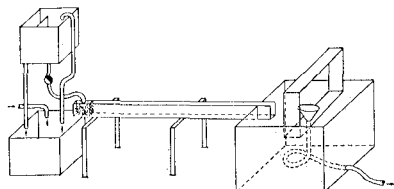


図-1

流速分布は熱膜流速計 (KANOMAX 製) と水素気泡流速計を用い、塩分濃度計は電気抵抗式塩分濃度計 (多点高速切換式) を用いた。

注射器に密度を調節し、着色したコンデンスド・ミルクを入れ、針先よりこれを射出して流れの状態、特に界面付近の可視化を行った。

3. 流速分布

(1) 平均流速分布・密度分布の相似性

流速分布 (と密度分布) の一例を図-2 (と図-4) に示す。

本実験の場合には、流れは密度界面を堺として下層部は層流的状态、上層部は乱流状態にあった。そこで、上下それぞれの層について平均流速分布を無次元的に表示すると、図-3 のようになり、流速分布の相似性がほぼ成立していると見做せる。なお、無次元化は下層については最大逆流速 U_m と流速零となる高さ $z(U=0)$ を基準スケールとしている。図中の実線は圧力勾配 $(-dp/dx)$ と上面剪断流速 U_h による放物線分布 (Couette—

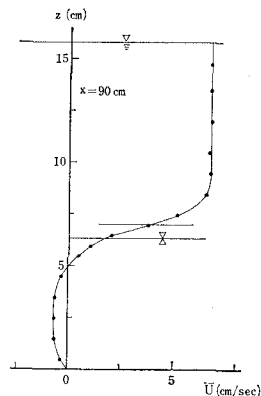
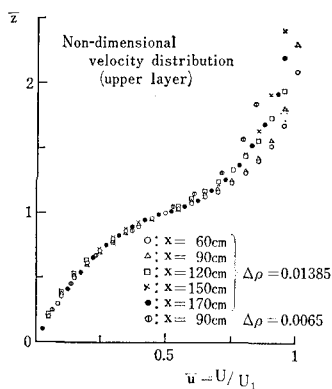
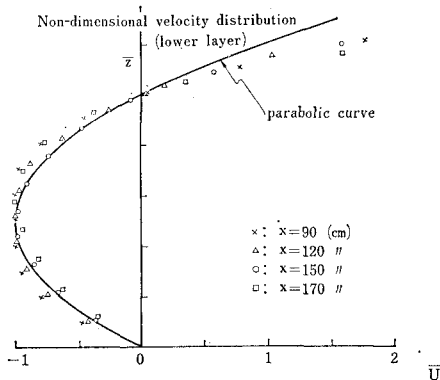


図-2



(a)



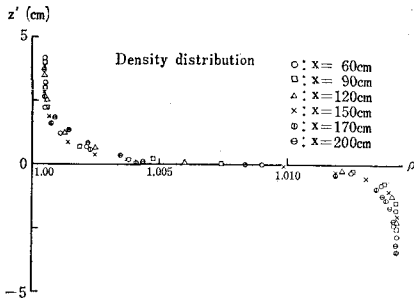
(b)

図-3

Poiseuille 流れ)

$$U(z) = \left(\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \right) z^2 - \left(\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \right) h z + \frac{z}{h} U_h \quad \dots\dots\dots (11)$$

である。無次元流速は零流速面から上でこの放物線よりはずれそれより速くなっている。また、上層流は最上層流速 (一定) と流速がその 1/2 となる零流速面からの高さをそれぞれ流速と長さの基準スケールに採り無次元化してある。



図—4

各断面での密度分布をそのままの尺度で重ねて示したのが図—4である。密度分布の場合、上下層の密度 ρ_1 , ρ_2 は、下層からの塩分の混入にもかかわらずほぼ一定であり、また中間密度層の厚さもほとんど不変であった。

(2) Monin—Obukhov の相似理論の適用性

さて、接地気層の場合と異り、塩水楔の場合に高さの原点を何処に採るかが確定できない。しかし、相似理論を適用する際の高さ z' の原点を密度界面 ($\partial\rho/\partial z$ が最大となる面) に採るのが最も妥当と思われる。というのは、熱膜流速計による流速変動はこの面を境にして上は乱流、下では集中渦による以外乱流変動はほとんどみら

れないからである。このようにして流速分布を片対数グラフにプロットしたのが図—5, 6である。この図から、流速分布について次の2つの見方ができる。

(i) 一つは、流速分布は“log+linear”則に従うと見做すことができる。

$$U(z') = \frac{U_*}{\kappa} \{ \ln z'/z'_0 + c(z' - z'_0) \} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 z'_0 は U を 0 とする基準面 (密度界面) からの高さで、roughness length, $c = \beta/L$ 。

(ii) あるいは、前述の強安定気層での実測結果のように、“log+linear”則に従う領域から、単純 log—law 域へと移ると見做すこともできる。

$$U(z) \begin{cases} = \frac{U_*}{\kappa} \left\{ \ln \frac{z'}{z'_0} + c(z' - z'_0) \right\} & (z'_0 \leq z' < z'_1) \\ = \frac{U_*(1+\beta)}{\kappa} \ln \frac{z'}{z'_0} & (z'_1 \leq z') \end{cases} \quad \dots\dots\dots (13)$$

なお、“log+linear” law は $z' \rightarrow z'_0$ の極限では普通の対数則となる。

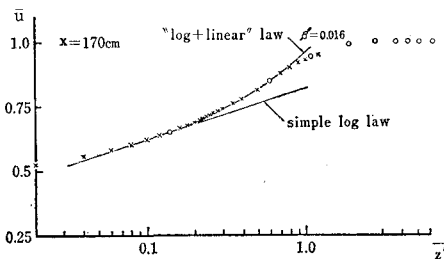
$$U(z') \rightarrow \frac{U_*}{\kappa} \log \frac{z'}{z'_0} \quad (z' \rightarrow z'_0) \quad \dots\dots\dots (14)$$

界面に近い部分を第一対数則領域、他を第二対数則領域と仮に呼び、この分布則を仮に“Bi-log” law と名付よう。

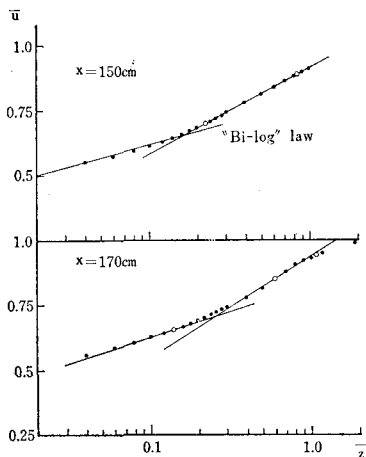
上のいずれの見方を採るにしても、実験室規模の小さなスケールの成層流であっても、単純な対数則は成立せず、成層効果がきいており Monin—Obukhov の相似理論が良く成立すると云えよう。

(3) 安定層の厚さ L'

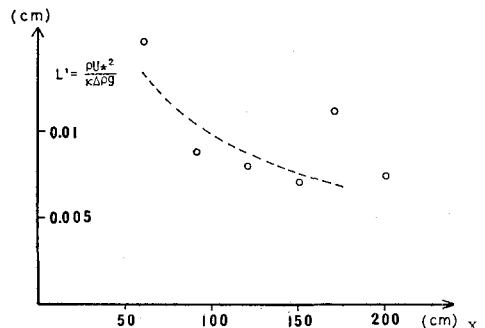
従来、Monin—Obukhov 長さ L は、相似理論の成立範囲の measure であろうということが云われて来た^{5,6,12)}。この点を検討するために、流速が一定値になる高さ z'_c (c : critical の意味) と L' の関係を調べたのが図—8である。 L' そのものは図—7に示すように、下流側に向かって大きくなっている。 z'_c/L' はバラツキは大きいがおに無関係にほぼ一定とみなせる (図—8)。



図—5



図—6



図—7

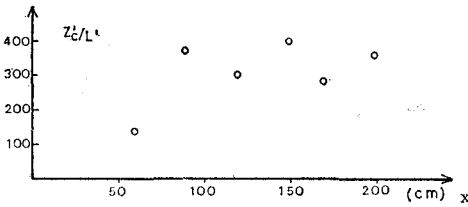


図-8

$$\frac{z_0'}{L'} = \text{const} \approx 350$$

L' をフラックスによる定義 $L = L' \cdot U_* / W_e$ に換算すると

$$\frac{z_0'}{L} = \text{const} \approx 4.8$$

となり、 z_0'/L が1のオーダーであろうという推論を支持している。

(4) Monin—Obukhov 係数 β : 係数 β の値は大気乱流の場合では2~7と実測例ごとのバラツキが大きい。実験室規模での塩水楔は場のスケールが大気乱流と全く異なるから β の値も大気の場合と著しく異ってもおかしくないと思われる。 β の計算には次のようにいくつかの方法が考えられる。

(i) log—linear 則より: 流速の片対数プロットの z' の小さい範囲の直線の勾配から、まず U_* / κ が求められる。次に、“log+linear” 則の領域から係数 $c' = cU_* / \kappa$ したがって $c = \beta' / L'$ あるいは $= \beta / L$ から β' 、 β が定まる。

$$\beta' = cL' = c \frac{\rho U_*^2}{\kappa \Delta \rho g}$$

$$\beta = cL = c \frac{\rho U_*^2}{\kappa \Delta \rho g W_e}$$

大気の場合と比較しうるのは、フラックスによる M—O 長さの定義による場合であるから、 $L = L' \cdot U_* / W_e$ により β を求めると、実測の連行速度 (測定法と結果については別に発表の予定; $W_e = 0.008$ [cm/s]) を用いて $\beta = 0.43$ が得られる。一方、 W_e の測定精度に少々疑問があるので、Kato & Phillips⁹⁾ の実験式から計算される $W_e = 0.0029$ [cm/sec] を用いると $\beta = 1.2$ となる。(最近の報告によれば、K—P 式の W_e は約 1/2 ほど小さい値になっていると云われ (Kantha et al.⁹⁾)、それを考慮すれば、 $W_e = 0.006$ [cm/sec]。したがって β はもう少し小さく 1/2 位の値 ($\beta = 0.6$) となるであろう。

(ii) 二つの対数域から推定する方法

一方、第一対数則領域と第二対数則領域をそれぞれ

$$U(z) = \frac{U_*}{\kappa} \ln \frac{z'}{z_0'} \quad (\text{第一対数則領域}) \cdots (15.a)$$

$$U(z) = \frac{(1+\beta)U_*}{\kappa} \ln \frac{z'}{z_0'} \quad (\text{第二対数則領域})$$

$$\cdots \cdots \cdots (15.b)$$

と考え、 U_* は二つの領域で同じ値であるとすれば、2つの対数則から求めた U_* あるいは抵抗係数 (後述) f_i' は一致しなければならない。したがって、後述の図-10の上の群の f_i' に $1/(1+\beta)^2$ を掛けたものが下の群の f_i' と一致しなければならない。これから、逆に Monin—Obukhov 係数 β を推定すれば、 $\beta = 1.3 \sim 1.5$ となる。

(iii) 上部対数則域から推定する方法

後述の内部抵抗係数 f_i' の図 (図-10) によれば、第一対数則領域から推定した f_i' は従来の他の実測結果と比較してかなり小さい。これは実際に第一対数則域と第二対数則域で U_* が急激に変化しているためなのか、あるいは高さ z' を測る基準面の採り方のアイマイさが対数則の勾配に影響しているためかと思われる。そこで、基準面の採り方のアイマイさの影響が小さいことから第二対数域の流速分布の片対数勾配 $(1+\beta)U_* / \kappa$ を採用し、これと多くの実測値と一致する金子⁷⁾ の実験式とを合致させることにより

$$\frac{f_i'(\text{第二対数則域})}{f_i'(\text{金子式による})} = (1+\beta)^2$$

β を求めると、 $\beta \approx 0.5$ となる。

(iv) フラックス・リチャードソン数 R_f と $\zeta (=z/L)$ の間には

$$R_f = \frac{z}{L} \frac{1}{(1+\beta)}$$

の関係がある。 R_f の臨界値は1であり、一方これに対応する ζ の臨界値を $\zeta_0 (=z_0/L)$ とすれば、 β は

$$\beta = \frac{\zeta_0}{(R_f)_c} - 1$$

したがって、 $(R_f)_c$ が普遍的に決り、 (ζ_0) を実験的に求めれば、 β の値も定められる (今回は求めず)。

いずれにしても、スケールの全く異なる実験室での塩水楔での β の値が、大気乱流の場合の実測値の下限に近い値となったことは驚きである。

表-1 種々の方法による β の値

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
β	1.2*)	1.5	0.5	—

*) Kato-phillips 式の W_e を用いた場合。もし、実測の W_e を用いれば $\beta = 0.43$, Kantha 他の実験式の W_e を用いれば $\beta = 0.6$ 。

4. 内部抵抗係数

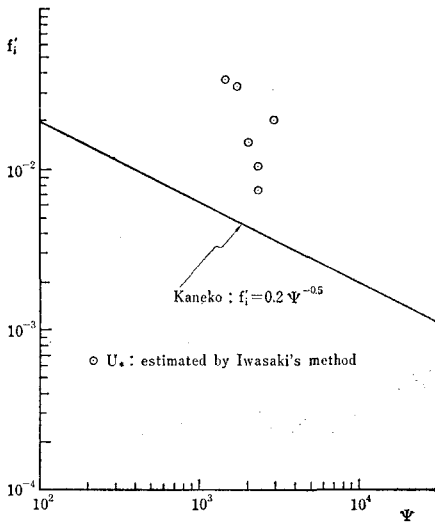
上下二層の界面に働く抵抗 (剪断応力) τ_i を $\tau_i = f_i' \rho (\bar{U}^2/2)$ と表わして内部抵抗係数 f_i' が定義される。

$$f_i' = 2 \left(\frac{U_*}{\bar{U}} \right)^2 \cdots \cdots \cdots (16)$$

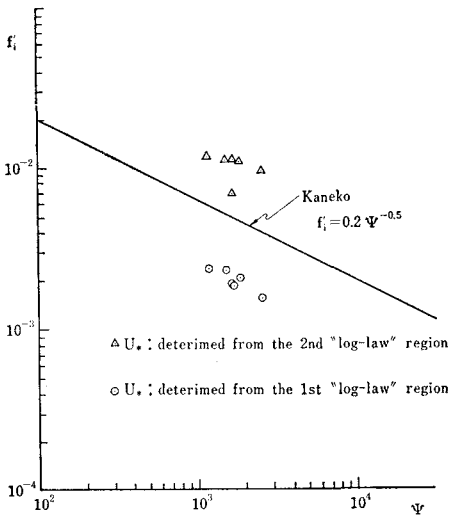
f_i' を求めるには、次の二方法によった。

(i) 運動量保存則による場合

上下各層の運動方程式ないしは運動量保存則式を組み合わせ、整理して f_i' を平均流速、上下層の水深・密度



図—9



図—10

差、底勾配等に関して表わす式を導く方法として浜田・堀口³⁾の方法や岩崎¹¹⁾の方法がある。図—9 (f_i' vs Ψ ($=R_g \cdot F_i'^2 = \bar{U}^3 / \{g \nu \Delta \rho / \rho\}$)) は岩崎の方法による我々の実験結果である。点のバラツキがやや大きく、従来の多くの実験値より過大な値となっている。もっとも、側壁の影響補正を行っていないので、これを行えば多少小さくなるであろう。ここでは、次に述べる流速分布法に較べて、点のバラツキが大きいこと、つまり誤差が大きいことに注意しておきたい。

(ii) 摩擦速度による方法

図—6 に示すように、流速分布は二本の log—law 域をもつ。界面に近い部分の第一対数則領域とこれから遠

い第二対数則領域の勾配から Karman 定数を $\kappa=0.4$ として U_* を求め、これより f_i' を計算した結果が図—10 である。ここでは、第二対数則領域も普通の対数則に従うとしたが、もし序論に述べた意味での “simple log” law なら $(1+\beta)$ 分の補正が必要である。すなわち、第二対数則領域から計算される f_i' は前述の値の $1/(1+\beta)^2$ 倍となり、第一対数則領域から求めた f_i' との差は少くなる。この点についてはすでに前節 3(4) で検討した。

また、第一対数則領域の f_i' が第二対数則領域の f_i' より $((1+\beta)$ の補正をしてもなお) 遥かに小さいことは界面近傍で剪断応力 τ_i は一定ではなく急激に変化していることを示唆しているとも考えられる。事実、別に発表予定の論文に示すように、 τ_i は界面近傍で急激に減少することが直接的な運動量保存則の適用から示される。

なお、対数分布則を支配する摩擦速度 U_* (あるいは摩擦応力 τ_i) はその位置で実際に働いている応力であるので、運動量保存則による (i) の場合のような側壁効果の補正は必要が無い。

参 考 文 献

- 1) Arya, S. P. S. & E. J. Plate: Modeling of the stably stratified atmospheric boundary layer, J. Atmosph. Sci. Vol. 26, pp. 656~665, 1969.
- 2) 芦田和男・江頭進治: 密度躍層のある場における濁水の挙動に関する研究 (3), 京都大学・防災研究所年報, 第20号, pp. 437~450, 1978.
- 3) 浜田徳一・堀口孝男: 塩水楔の性質について, 第7回海岸工学講演会講演集, pp. 163~171, 1960.
- 4) 林 泰造・山田 正: 浮遊粒子を含む開水路水流の乱流特性, 東大宇宙航空研究所・乱流シンポジウム講演集, pp. 27~34, 1976.
- 5) Hino, M., M. Honma & T. Senshu: Diffusion of smoke from a high stack, Proc. Int. Symp. on Boundary Layer and Turbulence, Phys. of Fluids, Suppliment, pp. S 267~269, 1967.
- 6) 日野幹雄: 密度流の流速分布および界面抵抗について, 第23回水理講演会論文集, pp. 347~353, 1979.
- 7) 金子安雄: 2層流境界面抵抗係数の一例, 第13回海岸工学講演会講演集, pp. 263~267, 1966.
- 8) Kantha, L. H., O. M. Phillips & R. S. Azad: On turbulent entrainment at a stable density interface, J. Fluid Mech., Vol. 79, pp. 753~768, 1977.
- 9) Kato, H. & O. M. Phillips: On the penetration of a turbulent layer into stratified fluid, J. Fluid Mech., Vol. 37, pp. 643~655, 1969.
- 10) 岸 力・板倉忠興・中山 隆: 浮遊砂を含む流れの水理特性, 土木学会年次学術講演会講演概要, II, pp. 318~320, 1975.
- 11) 岩崎敏夫・江原昌彦: 二成層二次元ジェットの界面抵抗について, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 519~523, 1977.
- 12) Monin, A. S. & A. M. Yaglom: Statistical Fluid Mechanics; Mechanics of Turbulence, Vol. 1. The MIT Press (English edition) pp. 417~526, 1971.