

播磨灘の潮流解析

春 名 誠 治*・松 梨 順 三 郎**

1. はじめに

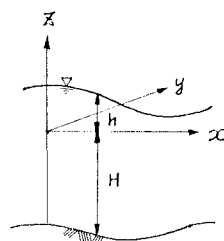
潮戸内海、東京湾等の閉鎖性海域の水質汚濁についての国民的関心も非常に高まりを見せ、環境影響事前評価制度の充実とその技術的アプローチをいかに行なうかが当面の大きな問題となっている。このような問題に対処するためには、その海域における汚濁物質の流入負荷、拡散輸送、沈殿、生化学的変化等、汚濁物質の収支についての動態を明確化することが工学的サイドからの研究の第一歩であると考えられる。筆者等は第 24 回、及び第 25 回の海岸工学講演会で発表した“大阪湾の汚濁解析”及び“港口附近における波の回折と物質の拡散”等の研究を通して、海洋における水質汚濁問題に取り組んできた。本研究は播磨灘をその対象海域として取上げ、内海における流入汚濁物質の拡散輸送を解析することを目標としているが、ここでは、その第 1 段階として、潮流に関する数値解析の一応の成果を得たのでその大要を報告する。

本研究における潮流計算は Galerkin 有限要素法を用いることにした。従来、このような有限要素解析においては一次の補間関数を有する三角形要素が広く用いられてきている。しかし、実際に複雑な海岸線を表現するためには、むしろ、このような三角形要素より高次の補間関数を有する曲辺要素の方が有効であると考えられる。一方、このような曲辺要素を用いた有限要素解析についてもかねてから研究がなされてきているが、Serendipity 族要素と数値積分法である Gauss-Legendre 法を併用した場合、計算コストの面で非常に不経済となることが指摘されている。そこで、本研究においては、要素として Lagrange 族二次要素、数値積分法として Simpson の 3 分の 1 公式を用いることにした。このような併用方式をとると、多少の精度の低下は免れないが、数値積分における計算効率が高くなり、また質量マトリックスの対角化が自動的に行われ、潮流解析に対して Leap-frog 法や 2 段階 Lax-Wendroff 法等の陽的な時間積分スキームの適用すれば、驚くべき高い計算効率で解析が可能とな

る。しかし、従来の有限要素解析では、陰的な時間積分法の方が精度や安定性の面で優れているということから、いわゆる連立方程式を解いて解を求める陰的な時間積分法が広く用いられていたが、この場合には連立方程式を解くための計算時間、および計算容量の面で非常に不経済となる。さらに、放物型方程式と違って双曲型方程式の場合には、適当な安定条件を与えることにより、陽的な解法を用いたとしてもうまく安定した解を得ることができるという事実を若干の数値実験により確かめることができた。そこで、本研究においては、時間積分法として Leap-frog 法を用いることにする。

2. 基礎方程式

図—1 に示す座標系をとる。Reynolds 運動方程式と連続方程式を水底から水面まで鉛直方向に積分すると、次の二次元系の基礎方程式を得る。



図—1 座 標 系

$$\frac{\partial H^*}{\partial t} + \frac{\partial(H^*U)}{\partial x} + \frac{\partial(H^*V)}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial(H^* - H)}{\partial x} \\ - fV + U \frac{g \sqrt{U^2 + V^2}}{C_f^2 H^*} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial(H^* - H)}{\partial y} \\ + fU + V \frac{g \sqrt{U^2 + V^2}}{C_f^2 H^*} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.3) \end{aligned}$$

ここで、 H ; 平均水深、 h ; 水位、 f ; Coriolis 係数、 g ; 重力加速度、 U, V ; x 及び y 方向の平均流速、 C_f ; Chezy 係数

* 正会員 工修 神戸市都市計画局計画課

** 正会員 工博 神戸大学教授 工学部土木工学科

さらに、 $H^*=H+h$ とすると、方程式を解く際の形式的な未知量は、 H^* 、 U 、 V となる。

次に、境界条件としては、固定境界における法線方向の流速を零とするのが通例のようであるが、各時間レベルごとに座標変換を行なうと非常に計算効率が悪くなる。そこで、全体的な流況を把握するのであれば、境界条件として境界節点の二方向の流速を共に零にすることで十分ではないかという考え方に立ち、そのような境界条件を導入した。

3. 有限要素法の適用

基礎方程式 (2.1), (2.2), (2.3) に Galerkin 法を適用し、空間方向に対する離散化を図る。対象とする計算領域を有限個の、図-2 に示すような 9 節点を有する部分領域に分割することにする。ここで用いる要素は Lagrange 族二次要素と呼ばれるもので、通常用いられる Serendipity 族二次要素とは内部節点の有無で特徴づけることができる。このような Lagrange 族二次要素に対する補間関数を局所的な自然座標系で表わすと次のようになる。

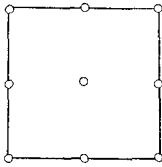


図-2 ラグランジュ族二次要素

$$(\xi_\alpha, \eta_\alpha) = (\pm 1, \pm 1) \text{ において} \\ N_\alpha = (\xi\xi_\alpha + \xi^2)(\eta\eta_\alpha + \eta^2)/4 \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

$$(\xi_\alpha, \eta_\alpha) = (\pm 1, 0) \text{ において} \\ N_\alpha = (\xi\xi_\alpha + \xi^2)(1 - \eta^2)/2 \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

$$(\xi_\alpha, \eta_\alpha) = (0, \pm 1) \text{ において} \\ N_\alpha = (\eta\eta_\alpha + \eta^2)(1 - \xi^2)/2 \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

$$(\xi_\alpha, \eta_\alpha) = (0, 0) \text{ において} \\ N_\alpha = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

次に、各要素内で次のような区分的に連続な近似関数を定義する。

$$\left. \begin{aligned} H_\alpha^* &= H_\beta N_\beta & h_\alpha &= h_\beta N_\beta \\ U_\alpha &= U_\beta N_\beta & V_\alpha &= V_\beta N_\beta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

近似関数 (3.5) を基礎方程式 (2.1), (2.2), (2.3) に代入し、さらに Galerkin 法を用いて基礎方程式を空間方向に離散化すると次のようになる。

$$\sum_e \{ M_{\alpha\beta} \dot{H}_\beta^* + K_{\alpha\tau\beta}^x U_\tau + K_{\alpha\tau\beta}^y V_\tau + K_{\alpha\tau\beta}^z H_\beta^* U_\tau + K_{\alpha\tau\beta}^w V_\beta H_\tau^* + K_{\alpha\tau\beta}^v H_\beta^* V_\tau \} = 0 \quad \dots\dots\dots(3.6)$$

$$\sum_e \{ M_{\alpha\beta} \dot{U}_\beta + K_{\alpha\tau\beta}^x U_\tau + K_{\alpha\tau\beta}^y U_\tau + K_{\alpha\tau\beta}^z U_\beta V_\tau + g N_{\alpha\beta}^x (H_\beta^* - H_\beta) - f M_{\alpha\beta} V_\beta + F_e^* U_\beta \} = 0 \quad \dots\dots\dots(3.7)$$

$$\sum_e \{ M_{\alpha\beta} \dot{V}_\beta + K_{\alpha\tau\beta}^x U_\tau V_\beta + K_{\alpha\tau\beta}^y V_\tau V_\beta + g N_{\alpha\beta}^y (H_\beta^* - H_\beta) + f M_{\alpha\beta} U_\beta + F_e^* V_\beta \} = 0 \quad \dots\dots\dots(3.8)$$

ここで、 $\sum_e$ は対象となる節点に寄与する全要素にわたる総和を、また $\dot{}$ は時間微分を表わすものとする。式 (3.6), (3.7), (3.8) において示される各係数は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \iint_{A_e} N_\alpha N_\beta dA_e \\ F_e^* &= \iint_{A_e} N_\alpha N_\beta \frac{g \sqrt{(U_\tau N_\tau)^2 + (V_\tau N_\tau)^2}}{C_f^2 H_\tau^* N_\tau} dA_e \\ K_{\alpha\tau\beta}^x &= \iint_{A_e} N_\alpha N_\tau \frac{\partial N_\beta}{\partial x} dA_e \\ K_{\alpha\tau\beta}^y &= \iint_{A_e} N_\alpha N_\tau \frac{\partial N_\beta}{\partial y} dA_e \\ N_{\alpha\beta}^x &= \iint_{A_e} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial x} dA_e \\ N_{\alpha\beta}^y &= \iint_{A_e} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial y} dA_e \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.9)$$

以上の操作により、基礎方程式を空間方向に対して離散化することが可能となった。ただ、ここで問題となるのは式 (3.9) で示される積分をどのように実行するかということである。従来用いられてきた一次の補間関数を有する三角形要素を用いた場合、数学的に厳密な積分が可能となるが、一般的に高次の多項式を補間関数として有する曲辺要素の場合においては、特殊な場合を除いてほとんど不可能であり、数値積分によらざるを得ない。しかし、一般的には、このような数値積分を用いたとしても、それによって大きな不利を招くようなことはなく、また大きな誤差を生ずることもあまりないことが知られている。このような種類の数値積分法としては、その精度の良さから Gauss-Legendre 法が広く用いられてきた。しかし、この方法を用いた場合、すべての積分点についての被積分関数の値を求めなければならず、特にここで取扱うような非定常問題においては、その計算に要する計算コストが非常に大きな問題となる。このような問題を解決するために、本研究ではその代替案として、Newton-Cotes 法の一つである Simpson の 3 分の 1 公式を採用した²⁾。この方法は Gauss-Legendre 法のように最良の近似になるように積分点を選ぶのではなく、等間隔に積分点を選んで、その点を通る多項式に対して厳密な積分を行なおうとするものである。すなわち、 ξ 及び η で示される自然座標系において領域を n 個ずつの積分点で分割すれば、両方向について全部で n^2 個の積分点を得られることになり、これらの積分点で、 ξ 及び η についてそれぞれ $(n-1)$ 次の多項式を評価することになるわけであり、 n が 3 となる場合が Simpson の 3 分の 1 公式となる。図-3 にその積分点の位置を示すこ

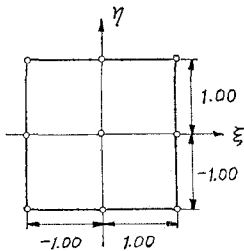


図-3 積分点 (Newton-Cotes 求積)

とにする。このような積分点を用いた場合の Simpson の 3 分の 1 公式は各積分点における重みの値も考慮して次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
 &= \{f(-1, 1) + 4f(0, 1) + f(1, 1) \\
 &\quad + 4f(-1, 0) + 16f(0, 0) + 4f(1, 0) \\
 &\quad + f(-1, -1) + 4f(0, -1) + f(1, -1)\} / 9 \\
 &\quad \dots\dots\dots (3.10)
 \end{aligned}$$

以上のように有限要素法を用いて基礎方程式の離散化を図るために、要素として Lagrange 族二次要素を用い、さらに数値積分法として Simpson の 3 分の 1 公式を用いると、重要な一つの事実をみだすことができる。すなわち、図-2 及び 図-3 からわかるように、一つの要素における節点の位置と積分点の位置が全く一致するということである。このような一致は数値積分を行う上で驚くべき簡略化をもたらす。すなわち、補間関数 N_α は積分点 α では 1、他の積分点はすべて零となり、式 (3.10) を適用する際には零以外の関数値だけを計算すれば良いことになる。このことを考慮すれば式 (3.9) で求めた各係数における積分は次のように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned}
 M_{\alpha\beta} &= \begin{cases} \det[J^e]_\alpha W(\alpha) & (\alpha=\beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \\
 F_e^* &= \frac{g \sqrt{U_{\alpha,k}^2 + V_{\alpha,k}^2}}{C_f^2 H_{\alpha,k}^*} \det[J^e]_\alpha W(\alpha) \\
 K_{\alpha\tau\beta}^x H_\tau^* &= H_{\alpha,k}^* \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \Big|_\alpha \det[J^e]_\alpha W(\alpha) \\
 K_{\alpha\tau\beta}^x U_\tau &= U_{\alpha,k} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \Big|_\alpha \det[J^e]_\alpha W(\alpha) \\
 K_{\alpha\tau\beta}^y H_\tau^* &= H_{\alpha,k}^* \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \Big|_\alpha \det[J^e]_\alpha W(\alpha) \\
 K_{\alpha\tau\beta}^y V_\tau &= V_{\alpha,k} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \Big|_\alpha \det[J^e]_\alpha W(\alpha) \\
 N_{\alpha\beta}^x &= \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \Big|_\alpha \det[J^e]_\alpha W(\alpha) \\
 N_{\alpha\beta}^y &= \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \Big|_\alpha \det[J^e]_\alpha W(\alpha)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.11)$$

ここで、 $\det[J^e]$ は各要素において、直交座標系から自然座標系に変換する際のヤコビアン行列式の値を示

し、 $W(\alpha)$ は式 (3.10) に示す各積分点の重みの値を示すものとする。このようにして、本来、各係数の積分値はその関数値をすべての積分点にわたって加え合わさなければならないわけであるが、式 (3.11) からわかるように 1 つの積分点についてのみ加え合わせるだけで良いことになるわけである。さらに、質量マトリックスについては、対角項については何らかの値をもち、非対角項は自動的に零となり、特殊な変換を行わなくても対角マトリックスとなるので、時間微分についての離散化を行う方法として陽解法を用いるには非常に有利であることがわかる。

そこで、陽解法の一つとして一般に広く用いられている Leap-frog 法を時間微分の項に適用すると、求めるべき最終的な基礎方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 H_{\alpha,k+1}^* &= H_{\alpha,k-1}^* - 2\Delta t \sum_e \left\{ \left[(H_{\beta,k}^* U_{\alpha,k} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + H_{\alpha,k}^* U_{\beta,k} \right) \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \Big|_\alpha \right. \\
 &\quad \left. \left. + (H_{\beta,k}^* V_{\beta,k} + H_{\alpha,k}^* V_{\beta,k}) \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \Big|_\alpha \right] \right\} \\
 &\quad \cdot \det[J^e]_\alpha W(\alpha) \Big/ \left\{ \sum_e \det[J^e]_\alpha W(\alpha) \right\} \\
 &\quad \dots\dots\dots (3.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{\alpha,k+1} &= U_{\alpha,k-1} - 2\Delta t \sum_e \left\{ \left[U_{\alpha,k} U_{\beta,k} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \Big|_\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + V_{\alpha,k} U_{\beta,k} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \Big|_\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + g(H_{\beta,k}^* - h_{\beta,k}) \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \Big|_\alpha - f V_{\alpha,k} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + U_{\alpha,k} \frac{g \sqrt{U_{\alpha,k}^2 + V_{\alpha,k}^2}}{C_f^2 H_{\alpha,k}^*} \right] \right\} \\
 &\quad \cdot \det[J^e]_\alpha W(\alpha) \Big/ \left\{ \sum_e \det[J^e]_\alpha W(\alpha) \right\} \\
 &\quad \dots\dots\dots (3.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{\alpha,k+1} &= V_{\alpha,k-1} - 2\Delta t \sum_e \left\{ \left[U_{\alpha,k} V_{\beta,k} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \Big|_\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + V_{\alpha,k} V_{\beta,k} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \Big|_\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + g(H_{\beta,k}^* - h_{\beta,k}) \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \Big|_\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + f U_{\alpha,k} + V_{\alpha,k} \frac{g \sqrt{U_{\alpha,k}^2 + V_{\alpha,k}^2}}{C_f^2 H_{\alpha,k}^*} \right] \right\} \\
 &\quad \cdot \det[J^e]_\alpha W(\alpha) \Big/ \left\{ \sum_e \det[J^e]_\alpha W(\alpha) \right\} \\
 &\quad \dots\dots\dots (3.14)
 \end{aligned}$$

4. 数値計算

有限要素法に基づく計算式 (3.12), (3.13), (3.14) を用いて播磨灘における潮流解析を行なった。対象領域は図-4 に示すとおりであり、自由境界線は宇野—高松

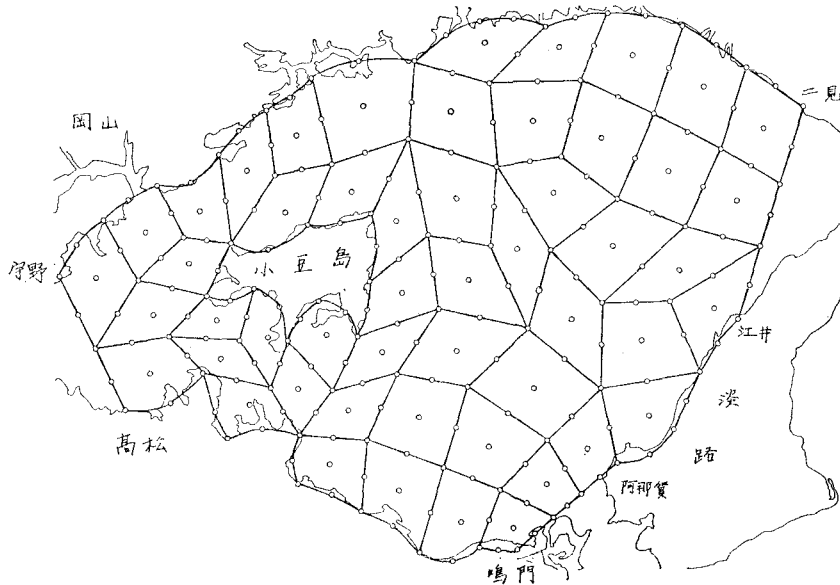


図-4 要素分割図



図-5 流況図 (32 時間後)

線、鳴門—阿那賀線、二見—江井線とした。このような領域を 49 要素、244 節点に分割した。ここで、節点間隔は最大で 6 km、最小で 3 km 程度となっている。初期条件としては、領域内のすべての節点における流速、及び水位を零とし、海面が全くの静水状態にあるものとした。また、境界条件としては、固定境界線上の節点における二方向の流速成分を零とし、自由境界線上の節点においては次に示すような関数形によって水位を与えた。

$$h = H_m \sin(\sigma t - k_m) \dots\dots\dots (4.1)$$

ここで、 H_m は大潮時 ($M_2 + S_2$) の時の振幅、 σ は M_2 潮の角速度、 k_m は遅れ角を示す。時間積分法としての Leap-frog 法に対する安定条件としては、 $\Delta t < 4S / \sqrt{gH}$ (Δt は隣接節点間隔を示す) を基準にし、時間間隔を 60 秒とした。さらに、Chezy 係数については若干過小評価したきらいがあるが $20 \text{ m}^{1/2}/\text{秒}$ とした。図-5、6 はその計算結果の一部で、平均水深を全域にわたって一定とした場合のものである。代表的な節点における水位、及び



図-6 流況図(28時間後)

流速の時間的变化は、計算開始の静水状態から3時間程度の期間は初期条件の影響を非常に強く受けるために、その時間変化が一定していないが、24時間以降になるとほぼ完全に定常的に周期的な変化を繰返しており、周期も自由境界線上で与えた入力波の周期と一致している。この解析結果については実際の観測結果との比較はまだ行っていないが、解の安定性を高めるために比較的大きな海底摩擦を与える結果になっているものと考えられる。しかし、播磨灘における流況パターンの概略を定性的にえているものとする。

5. 結 語

有限要素法による潮流解析の一手法として Lagrange 族二次要素と Simpson の3分の1公式を併用する方法の概要を述べた。この手法を播磨灘に適用し、計算効率

が非常によいことが判明した。また、この併用法を用いた場合若干の精度の低下が問題になりそうであるが、いくつかの数値実験の結果、あまり問題にならないことが確認されている。また安定性については、時間間隔の取り方以外に、Chezy 係数の取り方、水深を領域内の平均水深とするか、しないかによっても大きく左右され、今後検討しなければならない項目である。この解析にあたっては、京大大型計算センターの M190 を用いた。

参 考 文 献

- 1) Taylor C. and J. Davis: Tidal and long wave propagation—A finite element approach, Computers & Fluid, Vol. 3, pp. 125~148, 1975.
- 2) Gray W.G.: An efficient finite element scheme for two-dimensional surface water computation, Finite Elements in Water Resources, Edited by W.G. Gray, G. F. Pinder, and C. A. Brebbia, 1976.