有限要素法による海洋構造物の波浪応答解析
――無限要素および境界積分要素の適用――

原　　平　八　郎*

1. まえがき

近年，海岸・沖合での石油や天然ガスの資源開発，波力発電の開発等に伴ない海洋上の構造物が受ける波浪外力の正確な把握が必要となってきている．J. R. Morison らは物体に作用する波の力は抗力と慣性力の和で表わされるという仮定を導入した．N. Hogben と R. G. Standing[1] は $D/H>0.2$ のとき抗力は無視できる事，$D/L>0.2$ のとき回析現象が重要になる事を示した．ここで D は円柱の直径，H は波高（山と谷の長さ），L は波長である．C. J. Garrison[2] は Source 分布法によって波浪外力，付加質量，減衰及び応答を求めている．一方構造解析の分野から発達してきた有限要素法もこの問題に利用できる．O. C. Zienkiewicz[3] によると，有限要素法は不均一な物質，任意形状，非線形特性をもつ場合にも適用できるほか，構造物と水の連成振動解析が容易なこと等の多くの長所を持っている．しかし海のような無限領域をもつ問題を「有限」要素法で解くには特殊な方法を用いる必要がある．Damper を有限の仮想境界に設ける方法，外部領域を解析解の級数で表わす方法のほか，最近，O. C. Zienkiewicz ら[4),5)] により無限要素や境界積分要素を用いる方法も開発されている．本論文ではこれらの方法のうち，今後有望と考えられる無限要素と境界積分要素の特徴を明らかにし，これらの要素を用いた有限要素法による海洋構造物の波浪応答解析の実用性を確める．

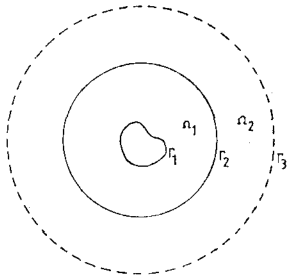
2. 基礎方程式

図―1 に示すように領域を内部領域 Ω_1（物体近傍の領域）と外部領域 Ω_2（内部領域の外側で無限遠方までの領域）に二分割して考える．内部領域では任意の形状の物体を扱えるようにするため三次元の方程式，外部領域では二次元の方程式を適用する．流体は非圧縮・非粘性とし，波は微小振幅波であると仮定する．

2.1 内部領域での基礎方程式

内部領域での問題は三次元の Laplace 方程式の境界値問題に帰着できる．

* 正会員　M. Sc.　三井造船(株)玉野研究所



Γ1 : Boundary of object
Γ2 : Boundary between Ω1 (inner domain) and Ω2 (exterior domain)
Γ3 : Boundary at infinity

図―1　内部領域 Ω_1 と外部領域 Ω_2

$$\Delta\phi=0 \quad \text{in} \quad \Omega_1 \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\partial\phi/\partial n=u_n \quad \text{on} \quad \Gamma_s \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\partial\phi/\partial z-(\omega^2/g)\phi=0 \quad \text{on} \quad \Gamma_t \cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\partial\phi/\partial n=0 \quad \text{on} \quad \Gamma_b \cdots\cdots\cdots(4)$$

ここで，Ω_1 は内部領域，Γ_s は物体と接する面，Γ_t は自由表面，Γ_b は海底，Δ はラプラシアン，ϕ は速度ポテンシャル，n は面に垂直なベクトル，u_n は物体の振動速度の n 方向成分，ω は波の振動数，g は重力加速度，x と y は水平面内の直交座標，z は鉛直方向の座標（自由表面の中立面で $z=0$）である．

2.2 外部領域での基礎方程式

J. C. W. Berkhoff の水深の変化を許容する二次元の方程式は

$$\mathrm{div}(c\cdot c_g \,\mathrm{grad}\,\Phi)+(c_g/c)\omega^2\Phi=0 \quad \text{in} \quad \Omega_2 \cdots(5)$$

である．ここで，Φ は自由表面での速度ポテルシャル，c は波速，c_g は群速度，ω は波の振動数である．もし水深が一定の場合には，式 (5) はよく知られた Helmholtz 方程式

$$\Delta\Phi+k^2\Phi=0 \quad \text{in} \quad \Omega_2 \cdots\cdots\cdots(6)$$

に帰着する．ここで k は波数である．無限遠方への Sommerfeld の放射条件は，二次元の空間の場合，

$$\lim_{r\to\infty} r^{1/2}\{\partial\Phi/\partial r+(\sqrt{-1}\omega/c)\Phi\}=0 \cdots\cdots\cdots(7)$$

で与えられる．ここで r は半径方向座標，c は音速（非圧縮性の場合 c は無限大となる）である．

3. 特殊な要素による外部領域のモデル化

3.2 無限要素[3),5)]

未知量Φを形状関数N_jと節点上の未知パラメータΦ_jで近似するとき，N_jに指数的に減衰する項を含める.

$$\Phi=\sum_j N_j\Phi_j \cdots\cdots(8)$$

$$N_j=\exp\left(\frac{S_j-S}{L}\right)\exp(\sqrt{-1}kS)\prod_{\substack{i=1\\ \neq j}}^{n-1}\left(\frac{S_i-S}{S_i-S_j}\right) \cdots\cdots(9)$$

ここで，Sは無限方向の座標，S_jはj番目節点の座標，Lは減衰の強さを決める長さ，kは波の波数，nは無限方向の節点数（n番目の節点は無限遠方にある）である．なお式 (9) のkを含む第2項は波動を表わし，S_iを含む第3項は Lagrange の補間多項式を表わしている.

3.3 直接法の境界積分要素[3),4),9),10)]

任意の関数Φとϕに対して Green の恒等式は次式で与えられる.

$$\int_\Omega(\phi\Delta\Phi-\Phi\Delta\phi)d\Omega=\int_\Gamma\left\{\phi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)-\Phi\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\right\}d\Gamma \cdots\cdots(10)$$

もしΦとϕが Helmholtz 方程式 (6) のある解とすると式 (10) の左辺は 0 となる．さらにϕとして式 (6) の特異解である Hankel 関数$H_0^{(1)}(kr)$をとり，境界Γから極Pを除いたものをΓ_cとすると，極PがΓ上にある場合には次式が成り立つ.

$$\int_{\Gamma_c}\left\{H_0^{(1)}(kr_{PQ})\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial n_Q}-\Phi\cdot\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial n_Q}(kr_{PQ})\right\}dS_Q+2\sqrt{-1}\,\Phi(P)=0 \cdots\cdots(11)$$

ここで境界Γはなめらかであると仮定している．さてΦは外部領域Ω_2での支配方程式 (6) をすでに満たしているので，最小にすべき汎関数は境界Γ_2上のみの積分

$$\Pi_2=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}\Phi(Q)\cdot\frac{\partial\Phi(Q)}{\partial n_Q}dS_Q \cdots\cdots(12)$$

で表わされる．ここでΓ_2は外部領域と内部領域の境界である．式 (11) より$\partial\Phi/\partial n_Q$を$\Phi$で表わすことができ，これを式 (12) に代入し，Π_2を最小にすると剛性マトリクスが得られる.

3.4 間接法の境界積分要素[4),6),7)]

Green の恒等式を用いて未知量Φを直接に求める直接法のほかに，Green の恒等式を用いないで特異点の強さμを未知量に選び，Φを間接的に求める間接法を考えることができる．未知量Φは Helmholtz 方程式と放射条件を満足する Hankel 関数$H_0^{(1)}(kr)$および特異点の強さμで表わされるとする.

$$\Phi(P)=\int_\Gamma H_0^{(1)}(kr_{PQ})\,\mu_Q dS_Q \cdots\cdots(13)$$

μは節点上の値μ_jと形状関数M_jで近似できるとすると，

$$\mu_Q=\sum_j M_j(S_Q)\,\mu_j \cdots\cdots(14)$$

とかける．式 (14) を式 (13) に代入すると，

$$\Phi(P)=\sum_j N_j(P)\,\mu_j \cdots\cdots(15)$$

$$N_j(P)=\int_\Gamma H_0^{(1)}(kr_{PQ})M_j(S_Q)dS_Q \cdots\cdots(16)$$

のように新しい形状関数$N_j(P)$を用いて$\Phi(P)$が表わされる．また$\partial\Phi/\partial n$を式 (13) から求めると，

$$\partial\Phi(P)/\partial n_P=-2\sqrt{-1}\,\mu_P+\int_\Gamma(\partial H_0^{(1)}(kr_{PQ})/\partial n_P)\cdot\mu_Q dS_Q \cdots\cdots(17)$$

となる．ここで境界Γはなめらかであると仮定している．式 (14) を式 (17) に代入すると$\partial\Phi(P)/\partial n_P$も離散化される．以下直接法の場合と同様に，汎関数

$$\Pi_2=(1/2)\int_{\Gamma_2}\Phi(P)\cdot(\partial\Phi(P)/\partial n_P)dS_P \cdots\cdots(18)$$

を最小にすることにより剛性マトリクスが得られる.

4. 浮遊物体の波浪応答解析[2)]

物体は剛体とし，振動は微小で周期的とするとき，浮遊物体の波浪応答は次の6自由度の連立一次方程式を解くことにより求められる.

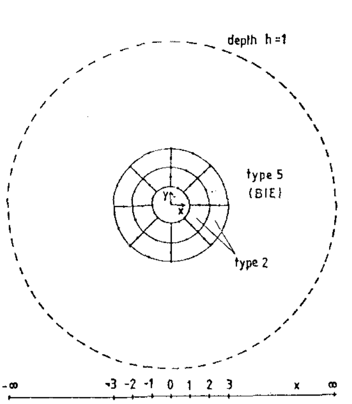
$$\sum_{j=1}^{6}\{-\nu(m_{ij}+M_{ij})-\sqrt{-1}\,\nu N_{ij}+K_{ij}\}(X_j/\eta_0)=C_i\quad(i=1,\cdots,6) \cdots\cdots(19)$$

ここで，νは無次元振動数 ($a\omega^2/g$)，aは物体の代表寸法，ωは振動数，gは重力加速度，m_{ij}は物体の無次元質量，M_{ij}は無次元付加質量，N_{ij}は無次元減衰，K_{ij}は浮力による無次元復原力，X_jは物体の一般化変位（$j=1,2,3$は変位；$j=4,5,6$は回転角），η_0は入射波の振幅，C_iは無次元波浪外力である.

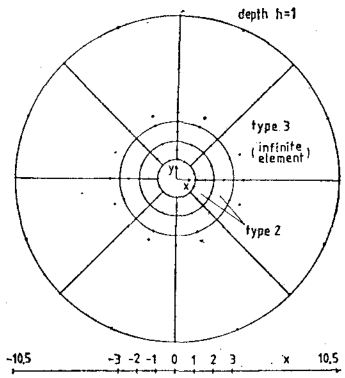
5. 数値計算例

5.1 円柱に作用する波浪外力

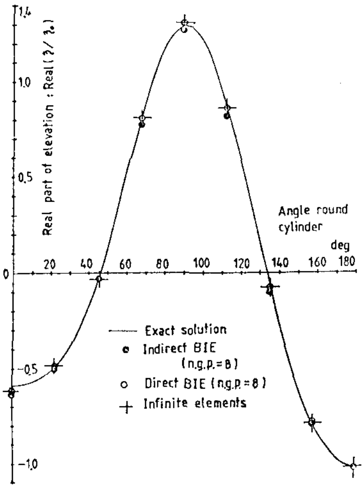
無限要素と境界積分要素（直接法と間接法）の計算精



図—2 2次元円柱問題の境界積分要素によるモデル化



図—3　2次元円柱問題の無限要素によるモデル化

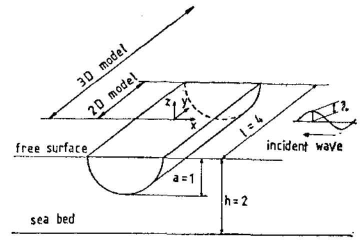


図—4　2次元円柱の周りの波高の計算値 Real (η/η_0)

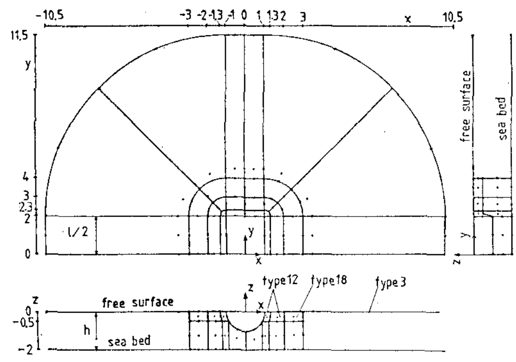
度と時間を比較するため，図—2 に示すような二次元の円柱（半径 1）に入射波（波数 2）が当たる問題を解いた．円柱の近傍（内部領域）は有限要素でモデル化し，外部領域は境界積分要素（図—2）および無限要素（図—3）でモデル化した．図—4 には円柱の周りの波高 η/η_0（η_0 は入射波の振幅）の実数成分が示されており，厳密解，無限要素，境界積分要素（直接法と間接法）共によい一致をみた．計算時間は無限要素の場合が最も短かく，次いで直接法，間接法の境界積分要素の順である．

5.2　浮遊している水平円筒の波浪応答

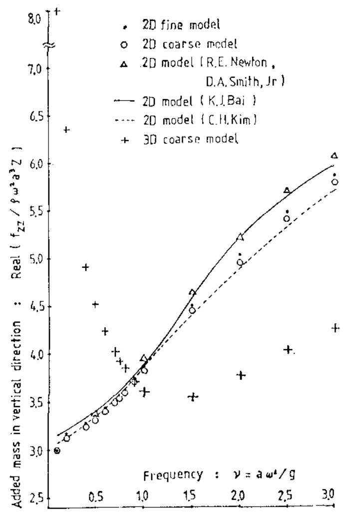
図—5 に示すように，円筒（半径 1，長さ 4）の半分が水中にあるとし，これに入射波がかかる場合の波浪応答問題を解く，内部領域には有限要素，外部領域には無限要素を用い，図—6 に示すように半分の領域のみをモデル化した．図—6（これを以下 3D coarse model と称す）のほかに，$0 \leqq y \leqq l/2$ の領域のみをモデル化した二次元モデル（2D coarse model と 2D fine model）も試みた．図—7 に無次元付加質量 $M_{zz}=\mathrm{Real}\ (f_{zz}/\rho\omega^2 a^3 Z)$，図—8 に無次元減衰 $N_{zz}=\mathrm{Imag.}(f_{zz}/\rho\omega^2 a^3 Z)$，図—9 に



図—5　浮遊している水平円筒問題の説明

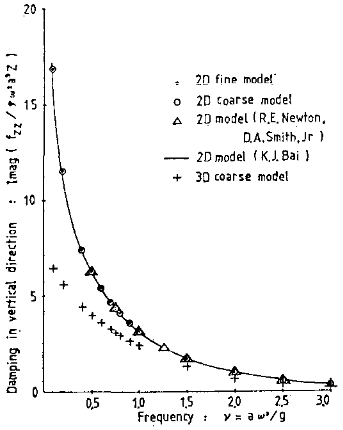


図—6　浮遊円筒問題の無限要素によるモデル化

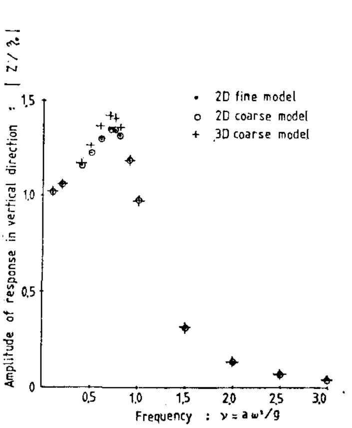


図—7　浮遊円筒の鉛直方向付加質量の計算値
Real ($f_{zz}/\rho\omega^2 a^3 Z$)

無次元応答振幅 $|Z/\eta_0|$ を，無次元振動数 $\nu=a\omega^2/g$ の関数として示している．ここで，ρ は水の密度，ω は振動数，a は円筒の半径，g は重力加速度，z は鉛直方向座標，Z は z 方向変位，f_{zz} は z 方向に物体が振動する時に水から受ける z 方向反力，η_0 は入射波の振幅である．計算精度を比較するため，R.E. Newton[8] らの計算結果（二次元モデル）も示しているが，いずれもよい一致をみている．



図—8 浮遊円筒の鉛直方向減衰の計算値 Imag. $(f_{zz}/\rho\omega^2 a^3 Z)$



図—9 浮遊円筒の鉛直方向応答振幅の計算値 $|Z/\eta_0|$

6. 結　　び

無限領域を有する流体中における物体の波浪応答解析を，無限要素や境界積分要素を用いた有限要素法により解く方法の実用性を確めた．数値計算の結果，

（1） 無限要素，境界積分要素（直接法と間接法）いずれも精度上問題なく適用できる．

（2） 無限要素は領域内積分を必要とするが，適切な数値積分公式を用いれば少ない積分点で精度よい結果が得られる．対称条件が容易に使用できる．

（3） 境界積分要素は領域内積分が不要であり，モデル化が容易である．特殊関数を用いるので必らずしも計算時間の短縮にはならない．

などの特徴が明らかになった．

謝辞： 本研究は筆者が University of Wales, Swansea（英国）の大学院にて行なったものであり，終始懇切なご指導，ご教示を頂いた Prof. O. C. Zienkiewicz と Dr. P. Bettess に深く感謝の意を表する．

参　考　文　献

1) Hogben, N. and R. G. Standing : Wave loads on large bodies, Proc. International Symposium on Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, Institution of Mechanical Engineers, London, 1974.

2) Garrison, C. J.: Hydrodynamic loading of large offshore structures ; three dimensional—source distribution method, Numerical Methods in Offshore Engineering, edited by O. C. Zienkiewicz et. al., Wiley, pp. 87～140, 1978.

3) Zienkiewicz, O. C., P. Bettess and D. W. Kelly : The finite element method for determining fluid loadings on rigid structures two- and three- dimensional formulations, Numerical Methods in Offshore Engineering, edited by O. C. Zienkiewicz et. al., Wiley, pp. 141～183, 1978.

4) Zienkiewicz, O. C., D. W. Kelly and P. Bettess : The coupling of the finite element method and boundary solution procedures, Interntional Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp. 355～375, 1977.

5) Bettess, P. and O. C. *Zienkiewicz* : Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp. 1271～1290, 1977.

6) Hara, H.: Coupled oscillation of bodies in fluid with a free surface and an infinite extent using finite elements and boundary integral elements. M. Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Wales, Swansea, 1978.

7) Hara, H., O. C. Zienkiewicz and P. Bettess : Application of finite elements to determination of wave effects on offshore structures, Department of Civil Engineering, *University of* Wales, Swansea, C/R/343/79, 1979.

8) Newton, R. E.: Finite element analysis of two-dimensional added mass and damping, Finite Elements in Fluids, edited by R. H. Gallagher et. al., Wiley, Vol. 1, pp. 219～232, 1975.

9) 原平八郎，岩城　嵩: Boundary-Integral Equation 法による定常熱伝導解析，日本機械学会 関西支部第 52 期定期総会講演会講演論文集，pp. 39～41，1977.

10) 原平八郎: Boundary-Integral Equation 法による Poisson 方程式の数値解析，日本鋼構造協会第 11 回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集，pp. 1～6, 1977.