

波動問題への有限要素法の適用

倉田 克彦*・井島 武士**

1. ま え が き

有限要素法は我が国の海岸工学の分野において比較的馴染みの薄いものであったが、第20回海岸工学講演会においてその適用例¹⁾が発表されて以来、多くの研究成果が報告されてきた^{2),3)}。この有限要素法を用いて円柱に働く波力を解析することが本論文の目的である。

円柱に働く波力に関する理論的研究として、波の回折問題としての取扱いがあり、波を微小振幅波とした場合については、1本の円柱⁴⁾だけでなく複数本の円柱がある場合⁵⁾についても検討されている。波を有限振幅波とした場合については、Stokes波の第2次⁶⁾あるいは第5次近似解⁷⁾を用いて、円柱に働く波力におよぼす波の非線形性の影響が調べられている。波を有限振幅波とした場合、その近似度を高めるにしたがって取扱われる項数が急激に増加するので、式の誘導の複雑さを考えると、これ迄の研究のように摂動法を用いることはあまり得策とは言えない。そのため、一種の近似解法であり、しかも計算量が膨大なものとなるが、計算そのものは代数的で簡単な有限要素法を用いた円柱に働く波力の解析を行った。

2. 汎 函 数

一様水深 h なる水中に、直径 D なる円柱が水底から水面上まで直立している。座標系は図-1に示すとおりで、入射波は x 軸の正方向に進行する波高 H 、周期 T

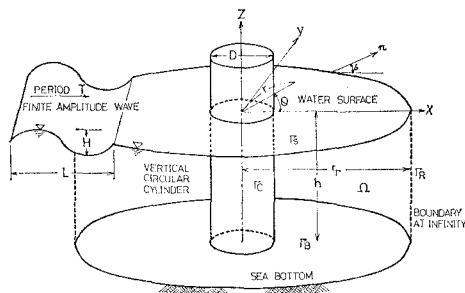


図-1 座標系と境界面

なる y 軸方向に一樣な波である。さらに、以下に示す假定を設ける。

- (1) 水は非粘性、非圧縮性であって、
- (2) 非回転運動をしている。
- (3) 円柱の側壁および水底は不透過である。
- (4) 円柱の高さは水面上十分に高い。

入射波と円柱からの散乱波とが重なりあった円柱周囲の波動の場における速度ポテンシャル ϕ は、円柱側壁面 Γ_C 、水底面 Γ_B および波面 Γ_S によって囲まれた領域 Ω において

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

円柱側壁面 Γ_C および水底面 Γ_B において

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

波面 Γ_S 上において

$$\eta + \frac{1}{2g} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (4)$$

を満足しなければならない。

ここで、 n : 境界面において外向きに立てた法線、 η : 波形、 t : 時刻、 g : 重力の加速度である。さらに、速度ポテンシャル ϕ は無限遠境界 Γ_R において後述の放射条件 (radiation condition) を満足しなければならない。

領域 Ω の内部において次式のように汎函数 Π を定める^{8),9)}。

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \iiint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \phi}{\partial t} + gz \right] dV - \iint_{\Gamma_C} \phi f_C dS \right. \\ & \left. - \iint_{\Gamma_B} \phi f_B dS - \iint_{\Gamma_R} \phi f_R dS \right\} \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

式中、 f_C, f_B, f_R : それぞれ $\Gamma_C, \Gamma_B, \Gamma_R$ 上における $\partial \phi / \partial n$ の値である。この汎函数 Π の停留条件は、 $f_C = f_B = 0$ とおけば、速度ポテンシャル ϕ が満足すべきラプラスの方程式、境界条件式 (式 (1)~式 (4)) および放射条件と一致する。すなわち、境界条件および放

* 正会員 工修 大阪市立大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工博 九州大学教授 工学部水土木工学科

射条件を満たすラプラスの方程式の解 ϕ を求めることは、式 (5) で示される汎函数 Π を停留させる ϕ を求めることと同じになる。

3. 放射条件

入射波と散乱波の速度ポテンシャルを ϕ_i, ϕ_s として、無限遠方 ($r \rightarrow \infty$) における速度ポテンシャル $[\phi]_{r \rightarrow \infty}$ が

$$[\phi]_{r \rightarrow \infty} = [\phi_i + \phi_s]_{r \rightarrow \infty} = [\phi_i]_{r \rightarrow \infty} + [\phi_s]_{r \rightarrow \infty} \quad \dots\dots\dots (6)$$

のように、 $[\phi_i]_{r \rightarrow \infty}$ と $[\phi_s]_{r \rightarrow \infty}$ との線型和で表わされるとすれば、放射条件によって f_R は

$$f_R = \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{r \rightarrow \infty} = \left[\frac{1}{2r} \phi - \frac{k}{\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2r} \phi_i - \frac{k}{\sigma} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} (\cos \delta - 1) \right]_{r \rightarrow \infty} \quad \dots\dots\dots (7)$$

のようになる。ここで、 $k=2\pi/L$: 波数、 L : 波長、 $\sigma=2\pi/T$: 角周波数、 δ : 境界面 Γ_R において外向きに立てた法線 n と x 軸とのなす角度である。

有限振幅波の場合、一般に波数 k (あるいは波長 L) は周期 T 、水深 h だけでなく波高 H の函数でもある。したがって、円柱より遠去かるにつれてその波高が小さくなる散乱波の波数は、場所によって異なった値をとるので、本来なら波数の場所による変化を考慮すべきであるが、式の誘導および計算の簡単化のため、ここでは散乱波の波数 k_s は入射波の波数 k と同じにとっている。

4. 有限要素法による解析

式 (5) に示した汎函数 Π は、式 (2) を拘束条件とすれば、次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dV \right. \\ & + \iint_{\Gamma_S} \left\{ \frac{g}{2} (\eta^2 - h^2) - [\phi]_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} dS \\ & \left. - \iint_{\Gamma_R} \phi f_R dS \right] \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

式 (8) 中の $\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Gamma_S} \frac{g}{2} h^2 dS$ なる積分値は、汎函数 Π を停留させる問題においては定数扱いできるため、以後の演算においては省略して差支えない。放射条件は無遠方において成立つものであるが、計算の都合上、図-1 に示すように $r=r_f$ なる仮想無限遠境界面 Γ_R 上において放射条件が成立つと考える。式 (3) および式 (4) を拘束条件として、さらに波面 Γ_S ($z=\eta$) 上における速度ポテンシャル $[\phi]_{z=\eta}$ を静水面 ($z=0$) における速度ポテンシャル $[\phi]_{z=0}$ の周りに Taylor 展開し、

$$[\phi]_{z=\eta} = [\phi]_{z=0} + \eta \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} + \frac{1}{2} \eta^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]_{z=0} + \dots \quad \dots\dots\dots (9)$$

式 (8) 中の $[\phi]_{z=\eta}$ に式 (9) を代入して、波面 Γ_S 上の積分を静水面 ($z=0$) 上の積分に変換する。領域 Ω の内部および仮想無限遠境界面 Γ_R 上における積分については、 z 方向の積分範囲を水底 ($z=-h$) から静水面 ($z=0$) までとする。

領域 Ω を 図-2 に示すような、四面体要素によって分割し、各要素内で速度ポテンシャル ϕ を次のように表わす。

$$\phi = a + bx + cy + dz \quad \dots\dots\dots (10)$$

また、入射波および円柱の周りの波の速度ポテンシャル ϕ_i および ϕ をそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \phi_i &= \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_{i,n}^c \cos n\omega t + \phi_{i,n}^s \sin n\omega t) \\ \phi &= \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n^c \cos n\omega t + \phi_n^s \sin n\omega t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

のように表わして、各要素毎に汎函数を計算し、それを領域 Ω 全体について重ね合わせれば汎函数 Π が求まり、その変分 $\delta \Pi = 0$ とおけば次式が得られる。なお、時間 t については一周期間にわたって積分している。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [A_n]_{\Omega+r_S+r_R} & [B_n]_{\Gamma_R} \\ -[B_n]_{\Gamma_R} & [A_n]_{\Omega+r_S+r_R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi_n^c\} \\ \{\phi_n^s\} \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} \{C_n\}_{\Gamma_R} + \{E_n\}_{\Gamma_S} \\ \{D_n\}_{\Gamma_R} + \{F_n\}_{\Gamma_S} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

式中、

$\{\phi_n^c\}, \{\phi_n^s\}$: 第 n 次の余弦波および正弦波成分に対する速度ポテンシャル ϕ_n^c および ϕ_n^s の各節点 ($k, l, \dots$) における値によって構成される列ベクトル、
 $[A_n]_{\Omega+r_S+r_R}, [B_n]_{\Gamma_R}$: Ω の内部、 Γ_S および Γ_R 上での $\phi^2, (\partial \phi / \partial t)^2$ あるいは $\phi(\partial \phi / \partial t)$ に関する積分より得られる第 n 次波に対する (正方) 係数行列、
 $\{C_n\}_{\Gamma_R}, \{D_n\}_{\Gamma_R}$: Γ_R 上の放射条件より入射波の第 n 次波成分の速度ポテンシャル $\phi_{i,n}$ に関して得られる列ベクトル、
 $\{E_n\}_{\Gamma_S}, \{F_n\}_{\Gamma_S}$: Γ_S 上における波の非線型条件より生じる列ベクトル

である。

式 (12) を解けば、速度ポテンシャル ϕ_n^c と ϕ_n^s 、すなわち ϕ が求まるので、次式によって円柱に働く波力を計算できる。

$$\begin{aligned} F = & \int_{-h}^{\eta} dz \int_0^{2\pi} \frac{w_0}{g} \left[-\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] \\ & \times \frac{D}{2} (-\cos \theta) d\theta \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

この場合にも、円柱側面 Γ_D を分割して、各要素毎に

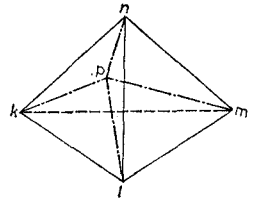


図-2 四面体要素

波力 ΔF を計算し、それを側壁面 Γ_0 全体について加え合わせればよい。

5. 簡略化された汎函数

入射波および円柱の周りの波の速度ポテンシャル ϕ_i および ϕ をそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \phi_i &= \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m^* \cosh mk(h+z)e^{-im\omega t} \\ \phi &= \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m^* \cosh mk(h+z)e^{-im\omega t} \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

のように表わした場合、汎函数 Π' を次のように定めることができる^{8),10),11)} (図-3 参照)。

$$\begin{aligned} \Pi' &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega'} \left\{ \left(\frac{\partial \phi_m^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_m^*}{\partial y} \right)^2 - (mk\phi_m^*)^2 \right\} dS \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma_R'} \left[\left\{ \frac{1}{2} \left(imk - \frac{1}{2r} \right) (\phi_m^*)^2 \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + imk(\cos \delta - 1) + \frac{1}{2r} \right\} \phi_{i,m}^* \phi_m^* \right]_{r=r_F} ds \right] \dots\dots(15) \end{aligned}$$

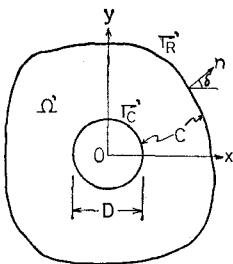


図-3 xy -平面上における領域 Ω'

入射波の速度ポテンシャル ϕ_i をベッセル函数を用いて

$$\begin{aligned} \phi_i &= -\frac{H}{2} \frac{\sigma}{k} \left\{ \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} i^{\lambda} J_{\lambda}(kr) e^{i\lambda\theta} \right\} \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} e^{-i\omega t} \\ &= \left\{ \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \phi_{i,\lambda}^* e^{i\lambda\theta} \right\} \cosh k(h+z) e^{-i\omega t} \dots\dots(16) \end{aligned}$$

のように表わし、円柱からの散乱波の速度ポテンシャル ϕ_s も同様に次式のように表わせば、

$$\phi_s = \left\{ \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \phi_{s,\lambda}^* e^{i\lambda\theta} \right\} \cosh k(h+z) e^{-i\omega t} \dots\dots(17)$$

ϕ_s の汎函数 Π'' は次式のように与えられる^{8),10),11)}。

$$\begin{aligned} \Pi'' &= \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \int_{D/2}^{r_F} \left\{ r \left(\frac{\partial \phi_{s,\lambda}^*}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\lambda^2}{r^2} - k^2 \right) (\phi_{s,\lambda}^*)^2 \right\} dr \right. \\ &\quad \left. - \left[\phi_{s,\lambda}^* r \frac{\partial \phi_{s,\lambda}^*}{\partial n} \right]_{r=D/2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\left(ik - \frac{1}{2r} \right) r (\phi_{s,\lambda}^*)^2 \right]_{r=r_F} \right] \dots\dots(18) \end{aligned}$$

式(15)のように定められた汎函数の停留条件には Γ_s 上での境界条件(式(3),(4))が含まれていないが、汎函数が簡略化されて、3次元の有限要素法解析が2次元解析に変換されているので、計算が容易で短時間で済む。

このような簡略化は波を高次の Stokes 波として取扱う場合には役立つ方法の1つと言える。

6. 数値計算

領域 Ω を図-4に示すように分割して、 $D/L=0.1 \sim 1.0$ の範囲で円柱に働く微小振幅波の波力を計算した結果を図-5および図-6に示す。なお円柱は x 軸に関して対称であるので領域 Ω として $y \geq 0$ なる範囲をとればよい。図-5は汎函数 Π を式(5)あるいは式(8)で与え、 z 方向に2分割した場合の結果で、 $\Delta\theta \leq \pi/12$, $\Delta r/D=0.125$, $r_F/D \geq 1.5$ であれば、見掛けの質量係数 C_A の3次元有限要素法解析による値と厳密解⁴⁾との違

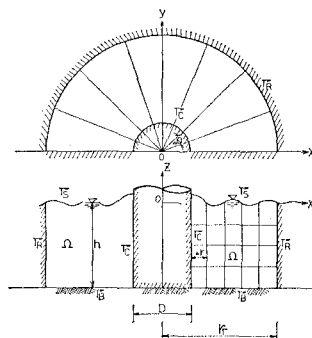


図-4 領域の分割

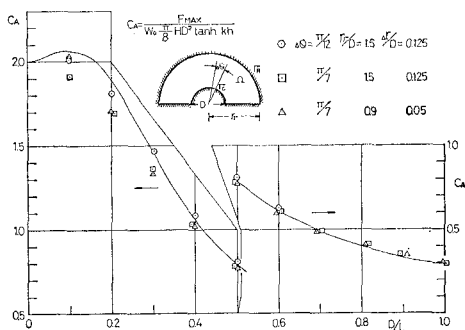


図-5 有限要素法解析による値と厳密解との比較(微小振幅波)

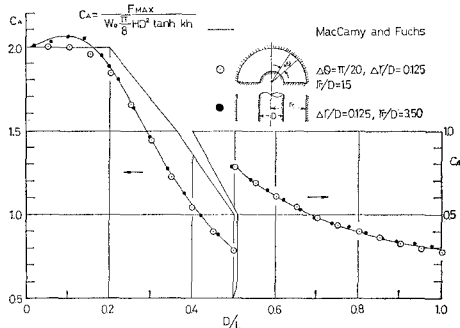


図-6 2次元および1次元有限要素法解析の結果(微小振幅波)

いはほぼ 5% 以下になる。図-6 は簡略化された汎函数を用いた場合の計算値を示したもので、2 次元有限要素法解析による値と厳密解との違いは、 $\Delta\theta \leq \pi/20$, $\Delta r/D = 0.125$, $r_1/D \geq 1.5$ であれば最大 3% 以下であり、1 次元解析では $\Delta r/D = 0.125$, $r_1/D \geq 3.5$ であれば両者の違いはほとんど見られない。この結果より“解析的方法：波動論あるいは数学的取扱い”の助けを借りれば、比較的容易な、短時間の計算で高い精度の解が得られることが判る。

入射波として Stokes 波の第 2 次近似解までを考えた場合の有限要素法による解析結果と摂動法⁹⁾による結果との比較の一例を図-7 に示す。領域の分割方法は微小振幅波の場合と同じである。図中の ⊙ 印および △ 印はそれぞれ 3 次元および 2 次元有限要素法解析による値であって、実線は摂動法による値である。図-7 によれば、3 次元の有限要素法解析による値は摂動法による値よりやや小さくなるが、2 次元の簡略解は比較的近い値を与えるようである。摂動法による解は波面上での境界条件を完全に満足しておらず⁶⁾、有限要素法は離散的な数値解析をおこなうものであるため、いずれも近似解と見做されるが、図-7 より $h/L = 0.1$ の場合波面における境界条件が完全に満足されていないことによる影響は比較的小さく、有限要素法解析は、領域の分割が比較的粗い場合にもほぼ満足し得る程度の精度を有していると言える。

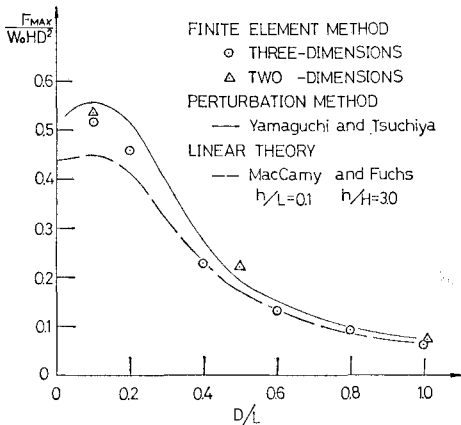


図-7 有限要素法解析による値と摂動法による値 (山口による) との比較 (Stokes 波の第 2 次近似解)

7. 結 言

有限要素法解析は、あまり大きな領域および細かい領域の分割でなくても、本論文中において示したように実用上ほぼ満足し得る精度で値を得ることができるが、その解析方法の性質上、大型電子計算機を用いても計算時間がかかる。今後、“解析的方法”との組合わせをも含

めて汎函数の定式化、領域の分割方法および計算手順の検討をおこない、高い精度の解をできるだけ短時間の計算で得られるように努めたい。

付記：本研究は、筆者の一人が大阪市立大学国内研究員として、九州大学工学部水工土木学教室海岸研究室に在籍していた時にその緒に付いたものである。このような研究の機会を得ることができたのは、大阪市立大学工学部三笠正人教授の御尽力によるところが大きく心から感謝の意を表します。また、研究をおこなっていくうえで御協力いただいた大阪市立大学工学部土木工学教室河海工学研究室および、九州大学工学部水工土木学教室海岸研究室の皆様、ならびにお世話になった両大学の関係者に厚くお礼申し上げます。

なお、本論文中の数値計算は九州大学および京都大学大型計算機センターの FACOM M-190 を用いておこなった。また、本研究をおこなうにあたり(財)實吉奨学会より研究助成金の援助を得た。ここに記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 坂井藤一・河合三四郎：波動解析への有限要素法の適用，第 20 回海岸工学講演会論文集，pp. 393~396，1973 年 11 月。
- 2) 例えば，ここ数年間の海岸工学講演会論文集に数篇づつの論文が見られる。
- 3) Zienkiewicz, O. C. et al.: The Finite Element Method for Determining Fluid Loadings on Rigid Structures Two- and Three-Dimensional Formulations, Numerical Methods in Offshore Engineering, edited by Zienkiewicz, O. C. et al., pp. 141~183, John Wiley & Sons, 1978.
- 4) MacCamy, R. C. and R. A. Fuchs: Wave Forces on Piles: A Diffraction Theory, Tech. Memo. No. 69, Beach Erosion Board, Corps of Engineers, Dec. 1954.
- 5) 大楠 丹：複数本の鉛直円柱に働く波力について，日本造船学会論文集，第 131 号，pp. 53~64，1972 年。
- 6) 例えば，山口 正隆：柱状海洋構造物に作用する波力，1975 年度 (第 11 回) 水工学に関する 夏期研修会講義集，B コース，土木学会，1975 年。
- 7) Chakrabarti, S. K.: Nonlinear Wave Forces on Vertical Cylinder, Journal of Hydraulics Division, HY11, Vol. 98, pp. 1895~1909, A.S.C.E., 1972.
- 8) 一色 浩：造波問題における変分法的取り扱い，第 2 回耐航性に関するシンポジウム，pp. 41~56，日本造船学会，1977 年 12 月。
- 9) Luke, J. C.: A Variational Principle for a Fluid with a Free Surface, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 27, Part 2, pp. 395~397, 1967.
- 10) 倉田克彦：有限振幅波によって円柱に作用する波力に関する簡略解について，土木学会第 34 回年次学術講演会講演概要集，第 II 部門，1979 年 10 月。
- 11) 藤野 勉：熱伝導と熱応力，pp. 24~29，コンピューターによる構造工学講座 II-4-B，日本鋼構造協会編，培風館，1975 年 5 月。