

風波のスペクトルの増幅率について

光 易 恒*

1. 緒 言

風波の発達機構に関する Phillips (1957) 理論¹⁾ならびに Miles (1957) 理論²⁾の妥当性が疑わしくなつて以来、それらにかかわるべき信頼できる理論はまだ提出されていない。このため、実際の波浪予報等においては、風波のスペクトルの増幅率として、(1) Phillips-Miles 理論を観測結果をもとにして修正したもの (Inoue 1967)³⁾、あるいは、純粋な実験式 (Snyder & Cox 1966⁴⁾, Barnett 1968⁵⁾) が使用されているのが現状である。

しかしながら、一様な風域内で発達過程にある風波に関しては、その全エネルギー E ならびにスペクトルのピークの周波数 f_m 等、波浪スペクトルのスケールをきめるパラメータと風速および吹送距離との間には、極めて規則的な関係があることが見出されている。そして、これらの関係を表現するかなり精度の高い実験式が得られている (Mitsuyasu 1968⁶⁾, Liu 1971⁷⁾, Hasselmann et al. 1976¹¹⁾)。一方、このような発達過程にある風波のスペクトル形自体に関しては、極めて安定した相似形が保たれることが見出されている (Colonel 1966⁸⁾, 光易外 1973¹⁰⁾, Hasselmann et al. 1976¹¹⁾)。

今回の研究は、上述のような風波のスペクトルのスケールパラメータに関する実験式 (Mitsuyasu 1968)⁶⁾ と風波の一次元スペクトルの相似形 (光易外 1973)¹⁰⁾とをもとにして、風波のスペクトルの増幅率 β に関する一般的な表現式を導き、さらに、特定のスペクトル形に対して β の具体的形を求めたものである。

2. 風波のスペクトルの増幅率の導入

2.1 風波のスペクトルの相似形

風波の一次元スペクトル $\phi(f)$ のエネルギーの大部分が含まれるいわゆる主要周波数領域の形を次のように規格化して表現すると、極めて安定した相似形が保たれることが見出されている。

$$\frac{\phi(f)f_m}{E} = \phi\left(\frac{f}{f_m}, \frac{gX}{u_*^2}\right) \quad (1)$$

ここに、 E は波浪スペクトルの全エネルギーすなわ

ち、 $E = \int_0^\infty \phi(f)df$, f_m はスペクトルのピークの周波数、 g は重力加速度、 X は吹送距離、 u_* は風の摩擦速度である。すなわち、規格化されたスペクトル $\hat{\phi} \equiv \phi f_m / E$ の主要部は、近似的に無次元周波数 $\bar{f} (\equiv f/f_m)$ および無次元吹送距離 $\bar{X} (\equiv gX/u_*^2)$ の普遍的な関数として表現できる。

関数 ϕ の形の無次元吹送距離 $\bar{X}$ に対する変化は極めてわずかであるので、 $\bar{X}$ の範囲を極端に広くとらない限り、式 (1) は次のように近似することも可能である。

$$\frac{\phi(f)f_m}{E} = \phi_1(f/f_m) \quad (2)$$

多くの研究者により報告されているように、風洞水槽の風波のスペクトルは、式 (2) の形の相似形を極めてよく保っている (Hidy & Plate 1965¹²⁾, Colonel 1966⁹⁾, 光易外 1973¹⁰⁾)。

2.2 風波のスペクトルのスケールパラメータ

風域内で発達過程にある風波のスペクトルのスケールをきめるパラメータ E および f_m が次のような式あるいは類似の式で表現できることは、多くの研究者により見出されている (Mitsuyasu 1968⁶⁾, Liu 1971⁷⁾, Hasselmann et al. 1973⁸⁾)。

$$\frac{g^2 E}{u_*^4} = k_1 \left(\frac{gX}{u_*^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{u_* f_m}{g} = k_2 \left(\frac{gX}{u_*^2} \right)^{-1/3} \quad (4)$$

ここに k_1 および k_2 はそれぞれ無次元常数で、Mitsuyasu (1968)⁶⁾ によると、 $k_1 = 1.72 \times 10^{-4}$, $k_2 = 1.00$ である。式 (3) および (4) を式 (1) に代入すると次式が得られる。

$$\phi(f) = (k_1/k_2) g^{-5/3} u_*^{7/3} X^{4/3} \phi(\bar{f}, \bar{X}) \quad (5)$$

2.3 増幅率 β の導入

ここで、風波のスペクトルの対数増幅率を次式で定義する。

$$\beta = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{c_g}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{g}{4\pi f} \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial X} \quad (6)$$

ここに c_g はスペクトル成分の群速度で第一近次として次式で与えられる。

$$c_g = \frac{g}{4\pi f} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(5)を式(6)に代入すれば、風波のスペクトルの対数増幅率 β に関する一般式を次のように導くことができる。

$$\frac{\beta}{f} = \frac{4\pi}{3} \dot{X} \left(\frac{u_*}{c} \right)^{-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \bar{f} \frac{\phi_{\bar{f}}}{\phi} + \frac{3}{4} \dot{X} \frac{\phi_{\dot{X}}}{\phi} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに c はスペクトル成分の位相速度で第一近似として次式で与えられる。

$$c = g/2\pi f \quad \dots\dots\dots (9)$$

また式(8)では便宜的に次のような表現が用いられている。

$$\phi_{\bar{f}} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{f}}, \quad \phi_{\dot{X}} = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{X}} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(8)は、式(4)を使用して変形すれば次のように表現することもできる。

$$\frac{\beta}{f} = \frac{1}{3\pi} \dot{X}^{-1/3} \bar{f}^{-2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \bar{f} \frac{\phi_{\bar{f}}}{\phi} + \frac{3}{4} \dot{X} \frac{\phi_{\dot{X}}}{\phi} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

この式(8)あるいは(11)が、風域内で吹送距離とともに発達過程にある風波のスペクトルの対数増幅率に関する一般式である。

2.4 波浪スペクトルに対するエネルギーの出入

時間的に定常状態にある風波のスペクトルのエネルギー平衡方程式(一次元)は、次式で与えられる(Hasselmann et al. 1973³⁾)。

$$c_g \frac{\partial \phi}{\partial X} = S \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(6)、(7)および(11)を考慮すると、上式における右辺のエネルギーの出入を表現する関数 S は、次のようになる。

$$\frac{S}{E} = \frac{1}{3\pi} \dot{X}^{-1/3} \bar{f}^{-1} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \bar{f} \frac{\phi_{\bar{f}}}{\phi} + \frac{3}{4} \dot{X} \frac{\phi_{\dot{X}}}{\phi} \right\} \phi \quad \dots\dots\dots (13)$$

これより、もしも $\phi(\bar{f}, \dot{X})$ の具体的な形が与えられるならば、スペクトルのエネルギーの出入を表わす関数 S の形が具体的に求まることになる。ただし、この S は、エネルギーの入力 S_{in} 、損失 S_{as} 、および成分波間の非線型伝達 S_{nl} の総和

$$S = S_{in} + S_{as} + S_{nl} \quad \dots\dots\dots (14)$$

を表わすもので、必ずしも風からの入力のみではない。

3. スペクトルの増幅率 β の具体的な表現

先ず最初に簡単のため ϕ が $\dot{X}$ に依存しない場合

$$\phi_{\dot{X}} = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{X}} = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

を考える。前述のように、この近似は多くの場合ゆるされる。この場合、 β に対するいくつかの具体例を示す。

3.1 スペクトルのピークの周波数成分の増幅率

スペクトルのピークにおいては、

$$\bar{f} = 1, \quad \phi_{\bar{f}} = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

であるので、 β/f の表現式は次のように簡単になる。

$$\frac{\beta}{f_m} = \frac{1}{3\pi} \dot{X}^{-1/3} = k_2^{-1} \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{u_*}{c_m} \right) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに最後の式は、式(4)を利用して求めたもので c_m はスペクトルのピークの周波数成分の波速で、次式で与えられる。

$$c_m = g/2\pi f_m \quad \dots\dots\dots (18)$$

式(17)から β/f_m がスペクトル形には無関係に、無次元吹送距離 $\dot{X}$ の増大に従って減少すること、あるいは無次元風速 (u_*/c_m) とともに β/f_m が直線的に増大することがわかる。

3.2 スペクトルのピークより低周波側の成分波の増幅率

風波のスペクトルのピークより低周波側の形は、近似的に次のように表現することができる(例えば、郭, 光易 1978¹³⁾)。

$$\phi(\bar{f}) = a \bar{f}^m \quad \dots\dots\dots (19)$$

式(19)を式(11)に代入すると、 β/f は次のようになる。

$$\frac{\beta}{f} = \frac{1}{3\pi} \left\{ 1 + \frac{m}{4} \right\} \dot{X}^{-1/3} \bar{f}^{-2} \quad \dots\dots\dots (20)$$

あるいは式(4)を用いて次のように表現することもできる。

$$\frac{\beta}{f} = \frac{1}{6\pi^2 k_2} \left\{ 1 + \frac{m}{4} \right\} \bar{f}^{-3} \left(\frac{u_*}{c} \right) \quad \dots\dots\dots (21)$$

式(20)および(21)から次のようなことがわかる。

(1) m が大きいほど、(スペクトル形の低周波側のたちあがり急なほど) β/f は大きな値をとる。(2) 無次元吹送距離 $\dot{X}$ の増大とともに β/f は減少する。(3) 低周波側に向って($\bar{f}$ の減少とともに) β/f は増大する。(4) 無次元風速 u_*/c が増大するに従って β/f は直線的に増大する。

ここで、

$$m = 6, \quad k_2 = 1, \quad \bar{f} = 0.7$$

とおけば(21)は、

$$\frac{\beta}{f} = 0.12 \left(\frac{u_*}{c} \right) \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる。この式は、Snyder & Cox (1966)⁴⁾ や Barnett (1968)⁵⁾ によって求められた風波の増幅率の式に極めて近い。

Sydney & Cox の式や Barnett の式においては、 $\bar{f} = f/f_m$ について何もふれられてないが、それは今回の研究結果からみると適切でない。むしろ式(21)の方がより一般的で、その特別の場合が Sydney & Cox 等の式である。

3.3 スペクトルのピークより高周波側の成分の増幅率

スペクトルのピークより高周波側の形は、範囲を主要周波数領域に限れば近似的に次のように表現される(郭, 光易 1978¹³⁾).

$$\phi(\tilde{f}) = b\tilde{f}^{-n} \quad \dots\dots\dots(23)$$

これを(11)に代入すると、次式が得られる.

$$\frac{\beta}{f} = \frac{1}{3\pi} \left\{ 1 - \frac{n}{4} \right\} \hat{X}^{-1/3} \tilde{f}^{-2} \quad \dots\dots\dots(24)$$

あるいは(4)を用いて次のように表現することもできる.

$$\frac{\beta}{f} = \frac{1}{6\pi^2 k_2} \left\{ 1 - \frac{n}{4} \right\} \tilde{f}^{-3} \left(\frac{u_*}{c} \right) \quad \dots\dots\dots(25)$$

式(24)あるいは(25)で極めて興味ある点は、増幅率の符号が n によって変化することである.

すなわち、

$$\left. \begin{array}{ll} n > 4 \text{ ならば} & \beta < 0 \text{ (減衰)} \\ n = 4 \text{ ならば} & \beta = 0 \text{ (平衡)} \\ n < 4 \text{ ならば} & \beta > 0 \text{ (増幅)} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(26)$$

例えば $n=5$ とすれば、(24)は

$$\frac{\beta}{f} = -\frac{1}{12\pi} \hat{X}^{-1/3} \tilde{f}^{-2} \quad \dots\dots\dots(27)$$

となり、波は減衰する.

風洞水槽の風波のスペクトルにみられるように、 $n=10$ と、スペクトルの高周波側が非常に急峻な場合には、

$$\frac{\beta}{f} = -\frac{1}{2\pi} \hat{X}^{-1/3} \tilde{f}^{-2} \quad \dots\dots\dots(28)$$

と非常に大きな減衰率を与える. これは、図-1 に示されるような、風洞水槽の風波のスペクトルの発達特性と

矛盾しない. すなわち、スペクトルのピークより高周波側には大量のエネルギーが失われる周波数領域があることに対応している.

また、以上のような考察からすると、もし波浪スペクトルの高周波側に普遍平衡領域が存在するとすれば、

$$\phi(f) = bf^{-4} \quad \dots\dots\dots(29)$$

の形を有することになり、これは非常に興味ある事実である.

3.4 スペクトル形 ϕ が吹送距離に依存する場合の増幅率

吹送距離に依存するスペクトル形の一例として、筆者等が以前求めた次式 (Mitsuyasu 1968⁹⁾) の場合についてその増幅率を検討する.

$$\phi(f) = 5.86 \times 10^{-13} g^2 f^{-5} \exp [22.1 \hat{X}^{0.312} \hat{f}] \quad \dots\dots\dots(30)$$

$$0.3 f_m < f < f_m$$

ただし、 $\hat{f} = u_* f / g$ である.

このスペクトル形は、最近 Ramamonjiarisoa (1973)¹⁴⁾ によっても確かめられている.

式(30)を直接式(6)に代入することによって、スペクトル成分の増幅率の表現は次のように求められる.

$$\frac{\beta}{f} = 3.45 \hat{X}^{-0.688} \left(\frac{u_*}{c} \right)^{-1} \quad \dots\dots\dots(31)$$

あるいは式(4)を用いて次式となる.

$$\frac{\beta}{f} = 0.087 \hat{X}^{-0.022} \tilde{f}^{-2} \left(\frac{u_*}{c} \right) \quad \dots\dots\dots(32)$$

式(32)で与えられる増幅率は、極めてわずかに無次元吹送距離に依存し、 $\tilde{f}$ に対する依存関係を別とすると、まえに求めた式(21)と非常に類似している. また式(31)は、 $c = g/2\pi f$ を考慮して変形すると、次のように表現することもできる.

$$\frac{u_* \beta}{g} = 0.549 \hat{X}^{-0.688} \quad \dots\dots\dots(33)$$

この表現によると、風波のスペクトルのピークの周波数 f_m より低周波側の成分の増幅率が、風速と無次元吹送距離によって一義的にきまるという一見、奇妙な結果となる. しかし、この式の適用範囲は、スペクトルのピーク周波数より低周波側の主要領域に限定されていること、ピーク周波数 f_m が風速と無次元吹送距離で一義的にきまること、などを考慮すれば或程度予想される結果である.

図-2は、式(33)で与えられる増幅率に関する式を風洞水槽における実測結果と比較したものである. データは、筆者等が以前行なった風波の高周波スペクトルに関する実験 (Mitsuyasu & Honda 1974)¹⁵⁾ において得られた実測スペクトルを解析して得られたもの、ならびに Mitsuyasu & Rikiishi (1978)¹⁶⁾ に記載されたデータのうち、空間的発達から求めた増幅率である. これより、

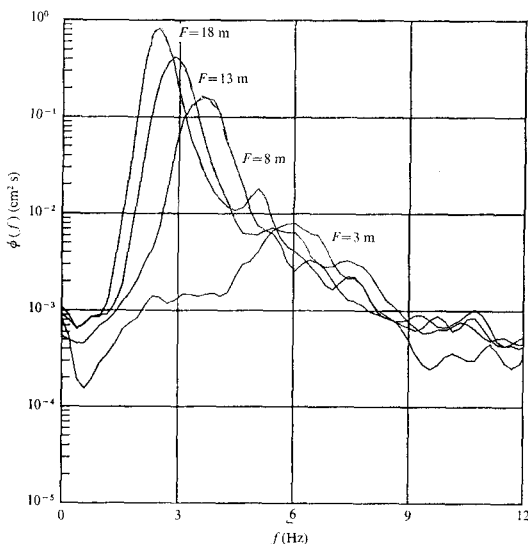


図-1 風洞水槽における風波のスペクトルの発達
 u_* : 30.6 cm/s, 吹送距離 F : 3, 8, 13, 18 m
 [Mitsuyasu & Rikiishi (1978)¹⁶⁾ より]

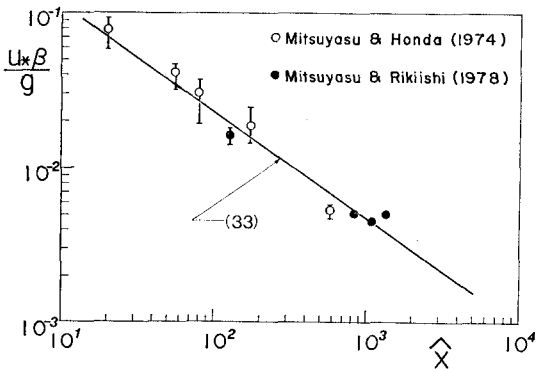


図-2 風波のスペクトルの増幅率

式 (33) と実測値との比較、実測値の変動幅が縦線で記入されている。

式 (33) と実測結果とは比較的良好一致を示すことがわかる。

4. 結 語

今回導いた波浪スペクトルの増幅率に対する表現は、ある意味では、スペクトルの相似形を増幅率という形に書き直したものに外ならない。しかしながら、このような表現を利用して、スペクトル密度の増減とスペクトル形との間に存在する普遍的な関係をはっきりさせることができる。また、今回導いた増幅率は、3. でも述べたように風から供給されたエネルギーに基づくもののみではなく、エネルギーの消散ならびに成分波間のエネルギーの非線型伝達等を総合したものである。しかしながら、普通に波のスペクトルの変化を測定して求められるスペクトルの増幅率もこれと同様な内容のものである。したがって、有限吹送距離において時間的に定常状態に達した風波のスペクトルの総合的な増幅率としては、十

分一般性のあるものである。ただ、スペクトルの相似形をもとにしているため、うねりと共存したりして非常に複雑な形状のスペクトルを有する波の増幅率を推定するには適していない。したがって、このような場合の増幅率については今後、検討が必要である。

参 考 文 献

- 1) Phillips, O. M.: J. Fluid Mech., Vol. 2, pp. 417~445, 1957.
- 2) Miles, J. W.: J. Fluid Mech., Vol. 3, pp. 185~204, 1957.
- 3) Inoue, T.: Report TR 67-5, Geophys. Sci. Lab., New York Univ., NY., 64 p., 1967.
- 4) Snyder, R. L. and C. S. Cox: J. Mar. Res., Vol. 24, pp. 141~178, 1966.
- 5) Barnett, T. P.: J. Geophys. Res., Vol. 73, pp. 513~530, 1968.
- 6) Mitsuyasu, H.: Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ., Vol. 16, pp. 459~482, 1968.
- 7) Liu, P. C.: J. Phys. Oceanogr., Vol. 1, pp. 249~257, 1971.
- 8) Hasselmann, K. et al.: Deutsche Hydrogr. Z. Suppl. A (8), No. 12, 95 p., 1973.
- 9) Colonel, J. M.: Tech. Rep. No. 65, Dept. Civil Eng., Stanford Univ., 134 p., 1966.
- 10) 光易 恒・外: 九州大学応用力学研究所所報, 39号, pp. 183~210, 1973.
- 11) Hasselmann, K. et al.: J. Phys. Oceanogr., Vol. 6, pp. 200~228, 1976.
- 12) Hidy, G. M. and E. J. Plate: Phys. of Fluids, Vol. 8, pp. 1387~1389, 1965.
- 13) 郭 一羽・光易 恒: 第25回海岸工学講演会講演集, pp. 170~174, 1978.
- 14) Ramamonjisoa, A.: Mém. Soc. Roy. Sci. Liège 6, pp. 47~66, 1973.
- 15) Mitsuyasu, H. and T. Honda: J. Oceanogr. Soc. Japan, Vol. 30, pp. 185~198, 1974.
- 16) Mitsuyasu, H. and K. Rikiishi: J. Fluid Mech., Vol. 85, pp. 705~730, 1978.