

長波近似をもちいた波と流れの干渉

浜 田 徳 —*

1. ま え が き

かつて河口侵入波のとりあつかいにおいて、著者と加藤は垂直方向に放物線型の流速分布の定常な流れを進行する表面波の波速、波運動の性質、有限振幅波としての特性等を求め(文献 1), 2), †, 3)), その後著者はせん断流の中の進行波のエネルギー輸送(同 4))と波状底面上の流れによる定常な表面波の誘起(同 5))について計算し、加藤は定常な吹送流の中の進行波の計算(同 6), 7))を行った。その参考文献の主なものとしては文献 8), 9), 10), 11)や M. S. Longuet-Higgins の諸論文があげられる。M. S. Longuet-Higgins の Radiation 応力を含む計算のほかは、これらは垂直方向の流速の変化、粘性の効果の問題にしているが、水路や沿岸での波の運動では、流れの水平方向の流速分布の効果について考察する必要がある。水路や沿岸で持続距離の長い波の運動は通常波長の長いものであるから、この研究では長波近似をもちいて安定な線形波について考察する。

2. 基本的な取扱い

波の進行方向に x 軸を、それに直交に水平に z 軸をとり、一様水深を h とし、一般流 U は z のみの関数とする。

線形波の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial U}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} + h \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

安定な進行波であるから、 $\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$, etc. (c は実数) が成立する。

$$u = u_0 e^{ik(x-ct)}, \quad w = w_0 e^{ik(x-ct)}, \quad \eta = \eta_0 e^{ik(x-ct)} \quad (4)$$

とおけば、 k, c は実数であり、式 (1), (2), (3) より、 u, w の項を消去して、振幅 η_0 につきつぎの常微

分方程式が得られる。

$$\eta_{0zz} + 2 \frac{\partial U}{\partial z} \frac{1}{c-U} \eta_{0z} + \frac{(c-U)^2 - gh}{gh} k^2 \eta_0 = 0$$

$$c-U \neq 0 \text{ とする。} \quad (5)$$

一様水路で x 軸を水路中央にとり、両側壁を $z = \pm z_0$ とする。 $U = \alpha z$ で示される基本的な場合を考える。平均流速は 0 で、流速は $z=0$ に反対称となる。式 (5) と境界条件は

$$\eta_{0zz} + 2\alpha \frac{1}{c-\alpha z} \eta_{0z} + \frac{c^2 - 2c\alpha z + \alpha^2 z^2 - gh}{gh} k^2 \eta_0 = 0 \quad (6)$$

$$\eta_{0z} = 0; \quad z = \pm z_0 \text{ において} \quad (7)$$

$$\eta_0 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_6 z^6 + \dots \quad (8)$$

とすれば、式 (7) から

$$a_1 + 3a_3 z_0^2 + 5a_5 z_0^4 + 7a_7 z_0^6 + \dots = 0 \quad (9)$$

$$a_2 + 2a_4 z_0^2 + 3a_6 z_0^4 + 4a_8 z_0^6 + \dots = 0 \quad (10)$$

式 (8) を式 (6) に用いて

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2ghc} \{a_0 k^2 c(gh - c^2) - 2\alpha g h a_1\} \\ a_3 &= \frac{1}{6ghc} \left[2a_0 k^2 \alpha (2c^2 - gh) \right. \\ &\quad \left. + a_1 \left\{ \frac{2\alpha^2}{c} gh - k^2 c(c^2 - gh) \right\} \right] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

a_6 までを決定して、式 (9), (10) を用いる。 a_0 と a_1 の関係がきまり、 c の特性式がきまる。 a_6 まででは精度はそれ程高くなく、大きな流速の場合にはむかぬが、基本的な性質はわかる。

$$\frac{\alpha^2 z_0^2}{gh} = m^2, \quad k^2 z_0^2 = n^2 \quad (12)$$

とおけば、 n^6 まで含むこととなるが、 m^2 は十分小さいとし、 m^0, m^2 の項のみを考慮して

$$c = \pm (gh)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} m^2 \left(1 - \frac{8}{15} n^2 + \frac{7}{60} n^4 \right) \right\} \quad (13)$$

* 正会員 工博

† 文献 2) については正誤表が出ている。

表-1 $U=\alpha z$ に対する波速, 振幅

波 長 (m)	150	207.7977	300	450	600	$+\infty$
k^2	0.17545×10^{-2}	0.91428×10^{-3}	0.43864×10^{-3}	0.19495×10^{-3}	0.10966×10^{-3}	0.0
n^2	4.38647	2.28571	1.09661	0.48738	0.27415	0.0
c {式 (13)}	± 9.919	± 9.908	± 9.911	± 9.919	± 9.918	± 9.921
(+) $c+0.66666$	10.586	10.574	10.578	10.583	10.585	10.588
(-) $c+0.66666$	-9.253	-9.241	-9.245	-9.250	-9.252	-9.255
$(\eta_0)_{z=z_b}$ (順)	0.8168	0.9021	0.9524	0.9787	0.9880	—
$(\eta_0)_{z=z_b}$ (逆)	1.2144	1.1088	1.0513	1.0226	1.0126	—
上 2 者 の 差	0.3976	0.2067	0.0989	0.0439	0.0246	—

$h=10\text{m}$, $z_b=\pm 50\text{m}$, $\alpha z_b=\pm 0.66666\text{ m/sec}$, $\alpha_0=1$, $c_0=(gh)^{1/2}=9.89949\text{ m/sec}$, $m=0.067343$

$1-\frac{8}{15}n^2+\frac{7}{60}n^4$ は $n^2=2.28571$ で最小値 0.39047 を持ち, $n^2 \leq 1$ に限定する必要はない. 式 (13) の $(gh)^{1/2}=c_0$ は長波近似であり, 以下の諸式にもこれを用いるが, 波長が有限の場合は c_0 は水深 10m で, 次のようになる.

波 長 (m) 150 300 600
 長波に対する波速比 0.97230 0.99279 0.99817
 式 (13) の右辺かっこ内の第 2 項は m^2 に比例する. これに対比するものとして, 平均流速は 0 であるが, 垂直方向の流速分布が, 表面で u_{00} , 底面で $-u_{00}$, その間が直線分布である場合をみる. たとえば文献 4) 式 (22) を用いて, 長波に十分近い領域で

$$\left. \begin{aligned} c &= u_{00} \frac{(kh)^2}{3} + c_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{u_{00}^2}{c_0^2} \left(1 - \frac{2}{3} k^2 h^2 \right) \right\} \\ c_0 &= \pm (gh)^{1/2} \left\{ 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

式 (14) の右辺第 1 項は表面波の運動が水表面付近で底部より多少強いために生じて居り, 式 (13) にはこれはない. 式 (14) の右辺第 2 項は式 (13), (12) とよく似た性質をもつ. 一般流の速度勾配と波速との基本的な干渉を示している.

式 (13) を用い, 波形 η_0 は $(c_0=\pm(gh)^{1/2})$

$$\begin{aligned} \eta_0 &= a_0 \left\{ 1 - \frac{\alpha n^2}{c_0} \left(1 + \frac{1}{2} m^2 + \frac{9}{20} m^2 n^2 - \frac{4}{45} m^2 n^4 \right) z \right. \\ &\quad + \frac{m^2 k^2}{2} \left(1 + \frac{8}{15} n^2 \right) z^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{\alpha k^2}{c_0} \left(2 + m^2 - \frac{3}{5} m^2 n^2 - \frac{8}{15} m^2 n^4 \right) z^3 \\ &\quad - \frac{1}{12} \frac{k^2 m^2}{z_b^2} (3 + 2n^2) z^4 \\ &\quad + \frac{1}{20} \frac{\alpha k^4}{c_0} m^2 \left(3 + \frac{32}{45} n^2 \right) z^5 + \frac{1}{45} \frac{k^4 m^2}{z_b^2} z^6 \\ &\quad \left. + \dots \right\} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\eta_0)_{z=z_b} &= a_0 \left\{ 1 - m n^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} m^2 + \frac{2}{5} m^2 n^2 - \frac{32}{900} m^2 n^4 \right) \right. \\ &\quad \left. + m^2 n^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{11}{90} n^2 \right) \right\} \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

また式 (15) では $(\eta_{0z})_{z=z_b}=0$ が成立する. 式 (14) と (16) とを比較すれば, 振幅の変化は $m=\frac{\alpha z_b}{c_0}$ の位数で生じ, m^2 の位数の波速の変化より大きい. 式 (15) からそれは $z=0$ に反対称であり, 対称な m^2 の位数の項に卓越する. また負符号であるから, 流れが波に逆流する領域で振幅は増大し, 順流する領域で減少する. 式 (13), (16) の数値計算例を表-1 に示す. 波長 150m は水深 10m では長波近似としてはすこし精度が低い. 波長 207.7977m は式 (13) のかっこ内第 2 項の最小値を与える. $\alpha z_b=\pm 0.66666\text{ m/sec}$, $z_b=\pm 50\text{m}$ は後述する放物線型流速分布の場合の数値計算例に対応させるためである. $z=0$ の振幅を 1 としており, 波長が短くなるとこの程度の流速勾配でも大きな振幅差が現われる.

3. 放物線型の流速分布のとき

流心部の流速が大きい水路の単純なモデルとしては, 前節において α が正負のものを組合わせてつくることが出来るが, 通常水路の流心部の水平速度勾配はそれ程大きくないから, 実用に近づけるため放物線型流速分布 $U=a-bz^2$, 側壁 $z=\pm z_b$ で $U=0$ の流速分布をとる. 式 (5) と境界条件は

$$\begin{aligned} \eta_{0zz} - \frac{4bz}{bz^2+c-a} \eta_{0z} \\ + \frac{(c-a)^2 + 2bz^2(c-a) + b^2z^4 - gh}{gh} k^2 \eta_0 = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (17)$$

$$\eta_{0z}=0; \quad z=\pm z_b=\pm \left(\frac{a}{b} \right)^{1/2} \text{ において} \dots\dots\dots (18)$$

$z=0$ 近傍の解を求めるが, 対称な解と反対称な解とが考えられる. 前節の解を α を正負にとりつなぎあわせる解は対称解となる.

(1) 対称解の場合

$$\eta_0 = A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \dots + A_8 z^8 + \dots \dots\dots (19)$$

を用いて, 式 (17) より $A_2, A_4, \dots, A_8$ を決定し, 式 (18) により c の特性式は, $k^2/b=K$, $c_0^2=gh$ において

$$\frac{1}{5040} \frac{K^3}{c_0^6} a^3 (c-a) \{ c_0^3 - (c-a)^2 \}^4$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{K^2}{c_0^4} a^2 \{c_0^2 - (c-a)^2\}^2 \left[\frac{1}{120} (c-a) \{c_0^2 - (c-a)^2\} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{105} a \left\{ c_0^2 - \frac{17}{6} (c-a)^2 \right\} \right] \\
& + \frac{K}{c_0^3} a \{c_0^2 - (c-a)^2\} \left[\frac{1}{6} (c-a) \{c_0^2 - (c-a)^2\} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{5} a \left\{ c_0^2 - \frac{13}{6} (c-a)^2 \right\} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{7} a^2 \left\{ \frac{8}{45} \frac{c_0^2}{c-a} - \frac{67}{30} (c-a) \right\} \right] \\
& + \frac{1}{42} \frac{K}{c_0^2} a^3 (c-a) \{3(c-a)^2 - c_0^2\} \\
& + (c-a) \{c_0^2 - (c-a)^2\} + \frac{2}{3} a \{2c_0^2 - 3(c-a)^2\} \\
& + \frac{4}{15} a^2 \frac{c_0^2}{c-a} - a^2 (c-a) - \frac{4}{105} a^3 \frac{c_0^2}{(c-a)^2} = 0
\end{aligned}$$

.....(20)

式(20)の特徴として、 h, a を与えると、 K により c が決定せられる。表-2の数値計算例で $L=474.34$ m, $z_b=100$ m は $L=150$ m, $z_b=31.62$ m と同一の c を与える。波形についても同様である。式(20)の解法には $K=0$ ($L \rightarrow +\infty$) に対応する c と、 c_0 に平均流速 $\frac{2}{3}a$ を加算した $c_0 + \frac{2}{3}a$ を使い、波長が有限の特性値を内挿する逐次近似の数値計算を行う。表-2に数値計算例を示す。記入してない $a=2$ m/sec, $L=150$ m の場合は式(20)では精度が低い。

これに対する $a=1$ m/sec の時の横断方向の振幅の変化を図-1に示す。 $z=0$ の振幅を1としているが、たとえば $z=50$ m での振幅 ($L=150$ m で順流時 1.144, 逆流時 0.872) を単位として、 $z=0$ (同じく 1, 1), 100

表-2 放物線型流速分布のときの波速
(m/sec)

	順流	逆流	順流	逆流
a (m/sec)	1	1	2	2
c ($L=\infty$)	10.579	-9.246	11.283	-8.622
c (150 m)	10.539	-9.234		
c (474.34 m)	10.575	-9.244	11.269	-8.618
$c_0 + \frac{2}{3}a$	10.566	-9.232	11.232	-8.566

$h=10$ m, $z_b=\pm 100$ m, $c_0=\pm 9.89949$ m/sec

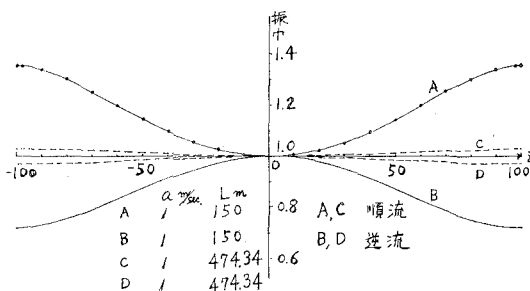


図-1 対称解の振幅

m (同じく 1.358, 0.720) との振幅差をとれば、前節の表-1と比較出来る。順流、逆流とも表-1よりも振幅差は小となるが、放物線型分布の時は側壁に近い領域で振幅差が大きくなる性質がある。

(2) 反対称解の場合

$$\eta_0 = B_1 z + B_3 z^3 + B_5 z^5 + \dots + B_9 z^9 + \dots \quad \text{.....(21)}$$

を用い、境界条件は

$$\begin{aligned}
& B_1 + 3B_3 \left(\frac{a}{b}\right) + 5B_5 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 7B_7 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 9B_9 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \\
& + \dots = 0 \quad \text{.....(22)}
\end{aligned}$$

式(20)と同様にして、同じ記号を用い、特性式は

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{40320} K^4 a^4 \frac{\{(c-a)^2 - c_0^2\}^4}{c_0^8} \\
& + K^3 a^3 \left[-\frac{1}{720} \frac{\{(c-a)^2 - c_0^2\}^3}{c_0^6} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a}{8} \frac{\{(c-a)^2 - c_0^2\}^2}{c_0^2 (c-a)} \left\{ \frac{5}{126} \frac{(c-a)^2}{c_0^4} - \frac{4}{315} \frac{1}{c_0^2} \right\} \right] \\
& + K^2 a^2 \left[\frac{1}{24} \frac{\{(c-a)^2 - c_0^2\}^2}{c_0^4} \right. \\
& \quad + \frac{a}{6} \frac{\{(c-a)^2 - c_0^2\}}{c_0^2 (c-a)} \left\{ \frac{11}{15} (c-a)^2 - \frac{3}{10} c_0^2 \right\} \\
& \quad \left. + \frac{a^2}{8} \frac{1}{c_0^2 (c-a)} \left\{ \frac{68}{63} \frac{(c-a)^3}{c_0^2} - \frac{14}{15} (c-a) + \frac{17}{315} \frac{c_0^2}{c-a} \right\} \right] \\
& + Ka \left[-\frac{1}{2} \frac{\{(c-a)^2 - c_0^2\}}{c_0^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{24} \frac{a}{c_0^2 (c-a)} \{28(c-a)^2 - 16c_0^2\} + \frac{13}{90} \frac{a^2}{(c-a)^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{26}{30} \frac{a^2}{c_0^2} - \frac{a^3}{8} \frac{1}{c_0^2 (c-a)} \left\{ \frac{28}{15} + \frac{4}{45} \frac{c_0^2}{(c-a)^2} \right\} \right] \\
& + 1 + 2 \frac{a}{c-a} + \frac{a^2}{(c-a)^2} = 0 \quad \text{.....(23)}
\end{aligned}$$

式(23)では $K=0$ ($L \rightarrow +\infty$) で $c=0$ となる。図-1で順流に対する対称波の振幅は流れのない両側の浅い水路の振幅と似ている(文献12))。反対称波では試行の長い数値計算ののち、式(23)から $h=10$ m, $a=1$ m/sec, $z_b=\pm 100$ m, $L=150$ m に対して、順流で $c=11.080$ m/sec が得られた。これは波速が c_0+a よりも大きな進行波である。文献13) pp. 447-450 に三角形型水路で

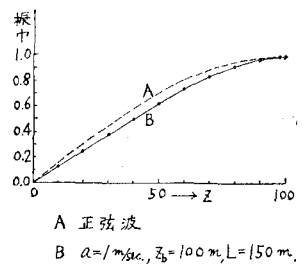


図-2 反対称解の振幅(順流)

の反対称波に似た性質が見られる。図-2にこの場合の振幅と、比較のため線形静振波としての正弦波の振幅を示す。

4. 側壁がかたがわだけの場合

この場合も波の進行方向は x 方向のみとする. $0 \geq z \geq -z_b = -\left(\frac{a}{b}\right)^{1/2}$ では $U = a - bz^2$, $+\infty > z \geq 0$ では $U = a$ とする. $U = a$ の領域のある幅の広い水路に対する近似と考えてよい.

(1) 順流の場合

$0 \geq z \geq -z_b$ では式 (17) に

$$\eta_{01} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots + A_8 z^8 + \dots \quad (24)$$

を用い, $+\infty > z \geq 0$ では r を実かつ正として

$$\eta_{011} = A_0 e^{-rz}, \quad r = k \left\{ 1 - \frac{(c-a)^2}{c_0^2} \right\}^{1/2} \quad (25)$$

を用いる. 境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \eta_{01} &= \eta_{011}, \quad (\eta_{01})_z = (\eta_{011})_z; \quad z=0 \text{ において} \\ (\eta_{01})_z &= 0; \quad z = -z_b \text{ において} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式 (26) から

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -r A_0 \\ A_1 - 2A_2 \left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} + 3A_3 \left(\frac{a}{b}\right) - 4A_4 \left(\frac{a}{b}\right)^{3/2} + \dots \\ &- 8A_8 \left(\frac{a}{b}\right)^{7/2} + \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

得られる特性式は項数が多いため省略するが, 式 (20), (23) の両特性式を組み合わせたかたちとなっており, $k^0, k^2, \dots$ の項は式 (23), $k^1, k^3, \dots$ の項は式 (20) から入っている. そして式 (23) からの各項に $(r/k)^i$ がかかっている. $h=10$ m, $a=1$ m/sec, $z_b=100$ m の条件で数値計算せられた波速は

L (m)	150	300	600
c (m/sec)	10.679	10.825	10.875

ただし $L=600$ m では波速の精度は相当おちる. 波速は表一2の対応する場合よりは大きく, 波長が長くなると, $c_0+a=10.899$ m/sec に近づく. この場合の振幅を

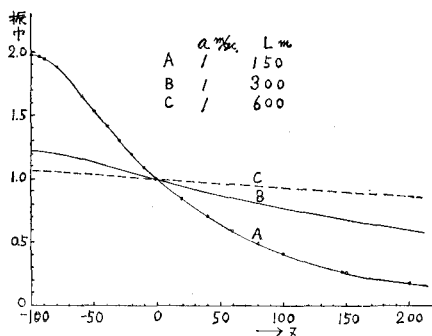


図-3 側壁がかたがわだけの場合 (順流)

図-3 に示す. 著者が文献 12) 図-4 で示した直壁のあるエッジ波の場合に類似している.

(2) 逆流の場合

この場合は式 (25) の r が虚数となる. $\eta_{011} = A_0' e^{-rz} + B_0' e^{rz}$ とおき若干の計算の後, 式 (24) の $A_1 = A_3 = A_5 = A_7 = 0$ となり前節の対称解が利用できる. $+\infty > z \geq 0$ では

$$\eta_{011} = A_0 \cos |r|z, \quad |r| = k \left\{ \frac{(c-a)^2}{c_0^2} - 1 \right\}^{1/2} \quad (28)$$

$-z_b \leq z \leq 0$ では, 図-1 の $z=0$ に向い振幅の増加する解がこれに接続し, 式 (28) は $U=a$ の領域で short-crested wave が形成せられることを示す. その z 方向の波長は 図-1 と同じ条件で

L (m)	150	474.34
z 方向の波長 (m)	571.32	1782.54

こうした short-crested wave の現象は波長の短かい波の場合にも河口等でよく見られ, 波項が碎けていることもある.

なおこの研究では長波近似を用いたため, 波速は非粘性で 2. に記した程度の不一致がある. また垂直方向の放物線流速分布に対する波の性質を研究した文献 1), 2), 3) では著者は理論計算を, 加藤は数値計算をおこなった.

参考文献

- 1) 浜田徳一・加藤 始: 流れをさかのぼる波についての一計算, 第8回海岸工学講演会講演集, pp. 25~29, 1961.
- 2) 浜田徳一・加藤 始: 流れの中の有限振幅波の計算, 第10回海岸工学講演会講演集, pp. 1~6, 1963 (正誤表あり).
- 3) 浜田徳一: 流れの中の有限振幅波—追補—, 第11回海岸工学講演会講演集, pp. 1~6, 1964.
- 4) 浜田徳一: せん断流の中の表面波の性質について, 第18回海岸工学講演会論文集, pp. 111~114, 1971.
- 5) 浜田徳一: 波状底面上の流れによる表面波, 第20回海岸工学講演会論文集, pp. 411~413, 1973.
- 6) 加藤 始: 放物線分布の吹送流に対する波速の計算, 第19回海岸工学講演会論文集, pp. 113~118, 1972.
- 7) 加藤 始: 対数分布の吹送流に対する波速の計算, 土木学会論文報告集, No. 239, pp. 37~46, 1975.
- 8) Burns, J. C. with an appendix by M. J. Lighthill: Long Waves in Running Water, Proc. Camb. Phil. Soc., pp. 695~706, 1953.
- 9) Hunt, J. N.: Gravity Waves in Flowing Water, Proc. Roy. Soc. A, Vol. 231, pp. 496~504, 1955.
- 10) Hidy, G. M. & E. J. Plate: Wind action on water standing in a laboratory channel, J. of Fluid Mech., Vol. 26, Part 4, pp. 651~687, 1966.
- 11) Benjamin, T. B.: Shearing flow over a wavy boundary, J. of Fluid Mech., Vol. 6, pp. 161~205, 1959.
- 12) 浜田徳一: エッジ波の応用, 第25回海岸工学講演会論文集, pp. 10~13, 1978.
- 13) Lamb, H.: Hydrodynamics, 6th edition, Cambridge, 1932.