

グリーンの公式による非定常有限振幅波の数値解析

井 島 武 士*・永 田 修 一**

概 要

有限振幅波の解析における最大の困難は自由表面条件式¹⁾の非線型性の取扱いに在る。これを処理するため、数式解析では摂動展開法が用いられ、数値解析では MAC 法²⁾が開発され、また有限要素法³⁾も試みられている。本文は数値解析法に關し、著者の 1 人³⁾が定常微小振幅波に対する境界値問題の解析のために開発した“グリーンの公式による数値解析法”を非定常有限振幅波の解析に拡張する方法を述べるものである。

MAC 法と有限要素法は流体運動の一般的解析に用いられるが、計算法はかなり複雑で、摂動法に対応する近似の程度は不明である。

一般の波運動においては、微小振幅と有限振幅とにかかわらず速度ポテンシャルの存在を仮定することができる。そしてグリーンの定理によれば流体域の境界面上の速度ポテンシャルとその法線微分値によって流体内部の運動が確定する。したがって流体域内部の運動をすべて未知数として解く MAC 法や有限要素法に比べて境界面上の値だけを取扱うグリーンの公式による解法がより有利であることは容易に推察される。

本文に述べる方法は、(i) 自由表面上の昇速度は速度ポテンシャルの法線微分値と水面勾配で与えられ、(ii) 自由表面上の速度ポテンシャルの時間増加率は水面変動量とポテンシャルの法線および切線微分値で与えられ、(iii) 流体域の境界上のポテンシャルの法線微分値は、グリーンの公式により、ポテンシャルの値により一意的に決まる、ことに基づいて展開される。この方法の特徴は、自由表面そのものの上でのポテンシャルとその法線微分値を計算するもので、グリーンの公式は本質的に線型であり、自由表面条件式の非線型性は計算上何等障礙とならないことである。計算は簡単で、近似の程度も摂動展開法と比較することにより明確となる。

本文では 2 次元問題の応用例として、水平振動を行うタンク内の発生波と造波板による発生波についての計算結果を示し、高山⁴⁾の実験値と比較し、有効なことを示す。

1. 基礎方程式

(1) 基本方程式

流体は非粘性、非圧縮性の完全流体で、重力の場で静止状態から始まる 2 次元運動を行うものとするから、この運動は速度ポテンシャルをもつ。静水面に原点 0、水平と鉛直上方に x 軸と z 軸をとり、時間を t で表わす。流体の密度を ρ 、重力の加速度を g 、流体運動の水平と鉛直流速および圧力をそれぞれ u , w , p とするときは、これらは速度ポテンシャル $\Phi(x, z; t)$ により次式で与えられる。

$$u = \Phi_x, \quad w = \Phi_z; \quad \frac{p}{\rho} = -\Phi_t - \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_z^2) - gz \quad \dots\dots\dots(1.1)$$

(2) 境界条件

自由表面を $z = \zeta(x; t)$ とすると、自由表面での運動と連続方程式は次式のようになる。

$$\Phi_t = -g\zeta - \frac{1}{2}[\Phi_x^2 + \Phi_z^2], \quad (z = \zeta) \quad \dots\dots\dots(1.2)$$

$$\zeta_t = \Phi_x - \zeta_x \Phi_x, \quad (z = \zeta) \quad \dots\dots\dots(1.3)$$

自由表面上の点に関する速度ポテンシャルの増加率は $[D\Phi/Dt]_{z=\zeta}$ により与えられ、式 (1.2), (1.3) の関係を用い、自由表面に沿う切線を s 、内向き法線を ν とすると、自由表面上のポテンシャル増加率と自由表面上の昇速度を与える次式をうる。

$$\frac{D\Phi}{Dt} = -g\zeta + \frac{1}{2}[\Phi_\nu^2 - \Phi_s^2] - \zeta_x \Phi_\nu \Phi_s \quad \dots\dots\dots(1.4)$$

$$\zeta_t = -\sqrt{1 + \zeta_x^2} \Phi_\nu \quad \dots\dots\dots(1.5)$$

また不透過の固定境界面では次式が成立つ。

$$\Phi_\nu = 0 \quad \dots\dots\dots(1.6)$$

(3) グリーンの公式

速度ポテンシャルをもつ流体域の境界線上の点を (ξ, η) で示すと、点 (ξ', η') におけるポテンシャル $\Phi(\xi', \eta')$ は $\Phi(\xi, \eta)$ およびその法線微分値 $\Phi_\nu(\xi, \eta)$ と次の関係に在る。

$$-\Phi(\xi', \eta') = \frac{1}{\pi} \oint \left[\Phi(\xi, \eta) \frac{\partial \log R}{\partial \nu} - \Phi_\nu(\xi, \eta) \log R \right] ds \quad \dots\dots\dots(1.7)$$

* 正 会 員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学科

** 学生会員 九州大学大学院工学研究科 修士課程

R は境界上の点 (ξ', η') と点 (ξ, η) との距離 ($R = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}$) 法線は内向き, 積分は境界に沿う線積分である.

境界線を N ケの小線分に分割し, 中央点の座標を $j = (\xi_j, \eta_j)$, ($j=1, 2, \dots, N$), 線分の長さを ds_j , また $i=(\xi_i, \eta_i)=(\xi', \eta')$ ($i=1, 2, \dots, N$) とすると式 (1.7) は次式で近似される.

$$-\phi(i) = \frac{1}{\pi} \left[\sum_{j=1}^N \Phi(j) \int_{ds_j} \frac{\partial \log R}{\partial \nu} ds - \sum_{j=1}^N \Phi_v(j) \int_{ds_j} \log R ds \right] \quad \dots\dots(1.8)$$

上式は境界線上の Φ と Φ_v との一次関係を与えるもので, 各点における Φ を知れば Φ_v が計算されることを示すものである. また Φ および Φ_v が知れると流体域内の任意点での Φ も類似の式によって計算される (グリーンの定理).

(4) 無次元表示

流体域の大きさと時間を代表する値をそれぞれ h および σ とし

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x}{h}, \quad z' = \frac{z}{h}, \quad R' = \frac{R}{h}, \\ \zeta' &= \frac{\zeta}{h}, \quad s' = \frac{s}{h}, \quad \nu' = \frac{\nu}{h}; \\ t' &= \sigma t, \quad u' = \frac{u}{\sigma h}, \quad w' = \frac{w}{\sigma h}, \\ p' &= \frac{p}{\rho g h}, \quad \Phi = \frac{gh}{\sigma} \Phi_v, \quad \Gamma = \frac{\sigma^2 h}{g} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(1.9)$$

として無次元化し, その後ダッシュを省いて無次元表示をすると, 式 (1.1), (1.4), (1.5), (1.8) は次のように書かれる.

$$u = \frac{1}{\Gamma} \phi_x, \quad w = \frac{1}{\Gamma} \phi_z, \quad p = -\phi_t - \frac{1}{2\Gamma} (\phi_x^2 + \phi_z^2) - z \quad \dots\dots(1.10)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = -\zeta + \frac{1}{2\Gamma} (\bar{\phi}^2 - \hat{\phi}^2) - \frac{1}{\Gamma} \zeta_x \bar{\phi} \hat{\phi} \quad \dots\dots(1.11)$$

$$\zeta_t = -\frac{1}{\Gamma} \sqrt{1 + \zeta_x^2} \bar{\phi} \quad \dots\dots(1.12)$$

$$\sum_{j=1}^N F_{ij} \phi(j) - \sum_{j=1}^N E_{ij} \bar{\phi}(j) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots(1.13)$$

上式で

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi} &= \phi_v, \quad \hat{\phi} = \phi_s, \\ F_{ij} &= \delta_{ij} + \bar{E}_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & (j \neq i) \\ 1, & (j = i) \end{cases} \\ E_{ij} &= \frac{1}{\pi} \int_{ds_j} \log R ds, \quad \bar{E}_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{ds_j} \frac{\partial \log R}{\partial \nu} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(1.14)$$

2. 計 算 法

図-1 に示す, h により無次元化された座標系で, 静

止時に AOBCA で示される流体域があり, AOB を自由表面, BC を固定没水面, CA をポテンシャルまたは法線流速が与えられる境界面とする. それぞれにおけるポテンシャル ϕ と内向き法線微分値 $\bar{\phi}$ ($=\phi_v$) を添字で示し, 境界線を N_1, N_2, N_3 ケの線分に分割し, 中点位置を j , 長さを s_j で示すことにする.

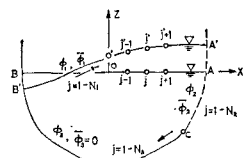


図-1 Definition Sketch

任意時刻 t に自由表面は $A'O'B'$ に在り, 静止時の点 j はその鉛直線上の点 j' に移り, 線分の長さは s_j から s'_j になる. 時間間隔を τ , $t=n\tau$ ($n=0, 1, 2, \dots$) とすると, 式 (1.11), (1.12) は中央差分により次式で表わされる.

$$\begin{aligned} \phi_1(j: n+1) &= \phi_1(j: n-1) + 2\tau \left[-\zeta(j: n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\Gamma} \{ \bar{\phi}_1^2(j: n) - \hat{\phi}_1^2(j: n) \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma} \zeta_x(j: n) \bar{\phi}_1(j: n) \hat{\phi}_1(j: n) \right] \quad \dots\dots(2.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta(j: n+1) &= \zeta(j: n-1) - 2 \frac{\tau}{\Gamma} \sqrt{1 + \zeta_x^2(j: n)} \bar{\phi}_1(j: n) \quad \dots\dots(2.2) \end{aligned}$$

上式で

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi}_1(j: n) &= \frac{\phi_1(j+1: n) - \phi_1(j-1: n)}{s_{j-1, j} + s_{j, j+1}} \\ \zeta_x(j: n) &= \frac{\zeta(j+1: n) - \zeta(j-1: n)}{d_{j-1, j} + d_{j, j+1}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(2.3)$$

$s_{j-1, j}$, $d_{j-1, j}$ はそれぞれ点 (j) と点 $(j-1)$ との直線距離とその水平投影長を示す. 式 (2.1), (2.2), (2.3) は時刻 $n\tau$ における自由表面 $A'O'B'$ 上の点 $(j-1)'$, j' , $(j+1)'$, $\dots$ における諸量について成り立つもので, 上式ではダッシュを省いている.

固定没水面 $B'C$ では式 (1.6) により $\bar{\phi}_3=0$ である. 境界面 $A'C$ では法線流速 $\bar{\phi}_2$ が与えられるものとする. これらの条件を考慮すれば式 (1.13) は次のようになる.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_1} E_{ij} \bar{\phi}_1(j: n) - \sum_{j=1}^{N_2} F_{ij} \phi_2(j: n) - \sum_{j=1}^{N_3} F_{ij} \phi_3(j: n) \\ = \sum_{j=1}^{N_1} F_{ij} \phi_1(j: n) - \sum_{j=1}^{N_2} E_{ij} \bar{\phi}_2(j: n) \quad \dots\dots(2.4) \end{aligned}$$

($i=1 \sim N_1, 1 \sim N_2, 1 \sim N_3; n=0, 1, 2, \dots$)

上式は与えられた ϕ_1 と $\bar{\phi}_2$ に対して $\bar{\phi}_1, \phi_2, \phi_3$ を決める連立方程式で, E_{ij}, F_{ij} は時刻 $n\tau$ における流体域の境界面に関して式 (1.14) により次のように計算される.

$$\left. \begin{aligned} E_{ij} &= R_e \frac{1}{\pi} e^{i\alpha} [z_1 \log z_1 - z_1 - z_2 \log z_2 + z_2] \\ z_1 &= (\xi_j - \xi_i) + i(\eta_j - \eta_i) \\ z_2 &= (\xi_{j+1} - \xi_i) + i(\eta_{j+1} - \eta_i) \\ e^{i\alpha} &= -\frac{\xi_{j+1} - \xi_j - i(\eta_{j+1} - \eta_j)}{[(\xi_{j+1} - \xi_j)^2 + (\eta_{j+1} - \eta_j)^2]^{1/2}} \\ E_{ii} &= \frac{1}{\pi} \left(\log \frac{s_j}{2} - 1 \right) s_j, \quad \bar{E}_{ij} = \frac{\theta_{ij}}{\pi}, \quad \bar{E}_{ii} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.5)$$

(θ_{ij} は点 i が線分 s_j に対して張る角度)

時刻 $(n-1)\tau$ における $\phi_1(j; n-1)$, $\zeta(j; n-1)$ は既知で, 時刻 $n\tau$ での $\bar{\phi}_2(j; n)$ と $\phi_1(j; n)$ (したがって $\hat{\phi}_1(j; n)$) および $\zeta(j; n)$ (したがって $\xi_x(j; n)$) が与えられると式 (2.4) により $\bar{\phi}_1(j; n)$, $\phi_2(j; n)$, $\phi_3(j; n)$ が計算される. これによる $\bar{\phi}_1(j; n)$ を用いて式 (2.1) から $\phi_1(j; n+1)$ (したがって $\hat{\phi}_1(j; n+1)$), また式 (2.2) から $\zeta(j; n+1)$ (したがって $\xi_x(j; n+1)$) が計算され, この自由表面形をもつ流体域に関する式 (2.4) から $\bar{\phi}_1(j; n+1)$, $\phi_2(j; n+1)$, $\phi_3(j; n+1)$ が計算され, 逐次各時刻の値が求められることになる.

(1) 第1次近似値

第1次近似の計算では式 (2.1), (2.2) の右辺の自乗項が省略され, 式 (2.4) は常に初めの流体域の形 ($\xi=0$) について計算される. 諸量に肩符 (1) をつけて示すと次のようである.

$$\phi_1^{(1)}(j; n+1) = \phi_1^{(1)}(j; n-1) - 2\tau \zeta^{(1)}(j; n) \dots\dots\dots (2.6)$$

$$\zeta^{(1)}(j; n+1) = \zeta^{(1)}(j; n-1) - 2 \frac{\tau}{\Gamma} \bar{\phi}_1^{(1)}(j; n) \dots\dots\dots (2.7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_1} E_{ij}^{(1)} \bar{\phi}_1^{(1)}(j; n) - \sum_{j=1}^{N_2, N_3} F_{ij}^{(1)} \phi_2^{(1)}(j; n) \\ = \sum_{j=1}^{N_1} F_{ij}^{(1)} \phi_1^{(1)}(j; n) - \sum_{j=1}^{N_2} E_{ij}^{(1)} \bar{\phi}_2^{(1)}(j; n) \end{aligned} \dots\dots\dots (2.8)$$

(2) 第2次近似値

諸量に肩符 (2) をつけて示すと次のようである.

$$\begin{aligned} \phi_1^{(2)}(j; n+1) &= \phi_1^{(2)}(j; n-1) + 2\tau \left[-\zeta^{(2)}(j; n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\Gamma} \{ \bar{\phi}_1^{(1)2}(j; n) - \hat{\phi}_1^{(1)2}(j; n) \} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (2.9)$$

$$\begin{aligned} \zeta^{(2)}(j; n+1) &= \zeta^{(2)}(j; n-1) \\ &\quad - 2 \frac{\tau}{\Gamma} \sqrt{1 + \zeta_x^{(1)2}(j; n)} \bar{\phi}_1^{(2)}(j; n) \end{aligned} \dots\dots\dots (2.10)$$

式 (2.4) は第1次近似による $\zeta^{(1)}(j; n)$ の境界面について計算される (上式の第1次近似値は微小振幅波を与え, 第2次近似値は摂動展開法における第2次近似値を

与える). 以下同様にして高次近似値が計算される.

(3) 計算の安定と精度

この計算の安定は式 (2.1), (2.2) の時間間隔 τ の大きさによって支配され, MAC 法におけるように, 考えられる最小の波数と最大の水深に対する波速 c と τ の積が境界線の分割要素の最小長さ s をこえないことを必要とする. 計算誤差は主として式 (2.4) の計算精度により支配される. この式は連続 (ラプラス) 方程式の積分で, 本質的に線型であり, 分割長が小さい程誤差は小さい. しかし誤差を小さくするために s を小さくするときは τ も小さくなり計算量は $1/s\tau$ の程度で増加する. この外に式 (2.1), (2.2) の自乗項の誤差は n の増加と共に累積する可能性があるから, 一般の非線型計算におけるように, n の増加に伴って適当な平滑化を行いながら計算を進めることが必要となる場合もある.

3. 計 算 例

(1) 水平振動を行うタンク内の波の発達

図-2 に示すように水を満した任意断面形のタンクが静止の状態から振幅 a , 周波数 σ の水平振動を始めるときは, 水平変位 $\xi(t)$ は次式で表わされる.

$$\left. \begin{aligned} t \leq 0 \quad & \xi(t) = 0 \\ t > 0 \quad & \xi(t) = a \sin \sigma t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.1)$$

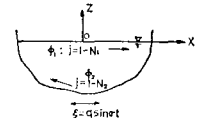


図-2 Horizontal Oscillation of Tank

タンクに固定した座標系について考えると, 流体運動は速度ポテンシャルをもち, 流速は式 (1.1) の第1, 第2式, 圧力は第3式右辺に $-x \cdot d^2\xi/dt^2$ を加えて示され, タンク壁面での法線流速は0である. 水面条件とグリーンの式を無次元化すると, 式 (2.2) はそのまま, 第2次近似までを示すと式 (2.1), (2.4) は次のようになる.

$$\begin{aligned} \phi_1(j; n+1) &= \phi_1(j; n-1) - 2\tau \left[\zeta(j; n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\Gamma} \{ -\bar{\phi}_1^{(2)}(j; n) + \hat{\phi}_1^{(2)}(j; n) \} + x_j \xi_{(n)}^{(2)} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^{N_1} E_{ij} \bar{\phi}_1(j; n) - \sum_{j=1}^{N_2} F_{ij} \phi_2(j; n) = \sum_{j=1}^{N_1} F_{ij} \phi_1(j; n) \dots\dots\dots (3.3)$$

式 (3.2) で x_j は自由表面上の計算点座標, $\xi_{(n)}^{(2)} = -(a/h)\Gamma \sin(n\tau)$ である.

高山⁴⁾は矩形断面のタンクについて微小振幅波としての数式解析と検証実験を行った. その1例として深さ $h=20$ cm, 長さ 100 cm の矩形タンクで振幅 $a=0.57$ cm, 周波数 $\sigma=2\pi f=2\pi \times 0.7$ (sec⁻¹) の場合, タンクの側壁から 2.9 cm の位置での水面変動について, 本方法による第1次, 第2次近似値と高山の実験値を示すと 図-3

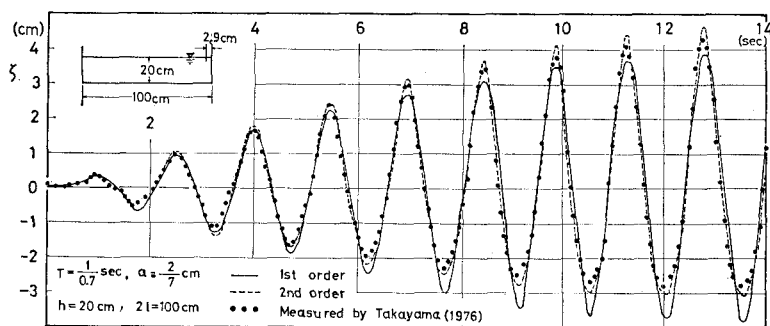


図-3 Wave Generation by Horizontal Oscillation of Tank

のようである。本計算では $N_1=30$, $N_2=20$, $\tau=T/60$ sec とし $n>150$ において n の 30 毎に ϕ_1 と ϕ_2 を最小自乗法で 5 次の多項式近似として平滑化した。図-3 の第 1 次近似値は高山の微小振幅波解と全く一致しており、振幅の成長と共に有限振幅性が現われ、波の山と谷における実測値との差が明らかになることが分る。第 2 次近似値において実測値とほぼ一致する。

(2) 造波板による発生波 (静止座標系)

図-4 に示す流体域で、 $x=0$ での鉛直面 OC が式 (3.1) に示す変位を行うときは、原点から必要距離だけ はなれた仮想面 AB を考え、境界上のポテンシャルと計算点数を図のように取り、仮想面で常に $\phi_0=0$ とする。このときは式 (2.1),

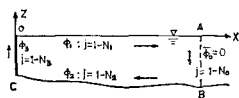


図-4 Wave Generation in Channel

(2.2) はそのまま、式 (2.4) が次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_1} E_{ij} \bar{\phi}_1(j, n) - \sum_{j=1}^{N_0, N_2, N_3} F_{ij} \phi_{0,2,3}(j; n) \\ &= \sum_{j=1}^{N_1} F_{ij} \phi_1(j; n) + \frac{a}{h} \sin(n\tau) \sum_{j=1}^{N_3} E_{ij} \\ & \dots\dots\dots (3.4) \end{aligned}$$

($i=1 \sim N_0, N_1, N_2, N_3$; $n=0 \sim n^*$)

ポテンシャルの初期値を 0 とすると、波が仮想面に到達するまで ϕ_0 の計算値は 0 を示し、その後有限値を示すようになる。この時刻を $n^*\tau$ とすると $n>n^*$ では $\phi_0=0$ の条件が成立しないから計算を打切る。

造波板に作用する流体圧力 p_3 は式 (1.10) により次のように計算される。

$$\begin{aligned} p_3(j; n) &= -\frac{\phi_3(j; n+1) - \phi_3(j; n-1)}{2\tau} \\ & \quad - \frac{1}{2\Gamma} \dot{\phi}_3^2(j; n), \quad j=1 \sim N_3 \\ & \dots\dots\dots (3.5) \end{aligned}$$

高山⁴⁾は水深 $h=40$ cm の造波水路での微小振幅波解析を行ったが、その中の $a=0.357$ cm, $\sigma=2\pi \times 1.5$ (sec^{-1}) の場合につき、本計算で $OA=250$ cm, $N_1=90$, $N_0=10$, $N_2=30$, $N_3=10$, $\tau=T/50$ sec とした結果と、高山の実験値を示すと 図-5 のようである。これは造波板か

ら 6.5 cm 前の点での水面変動であるが、初期には造波板の始動位置が異っているため計算値と測定値の相異が見られる点を除くと計算値と実測値は一致していると考えられる。ただしこの場合は、波の振幅そのものが微小で、有限振幅性の影響は余り現われない。

4. 結 言

グリーンの公式を用いることにより、微小振幅波の場合は、極めて簡単に解をうることが出来、また第 2 次近似値までは十分に正確な解析を行うことが出来る。第 3 次近似値に進むためには、計算点数を多少増さねばならない。しかし本計算法での近似度は振動展開法での近似度と同じで、多くの場合実用的には第 2 次近似まででほぼ充分と考えられる。なお種々の場合への適用を試みる予定である。

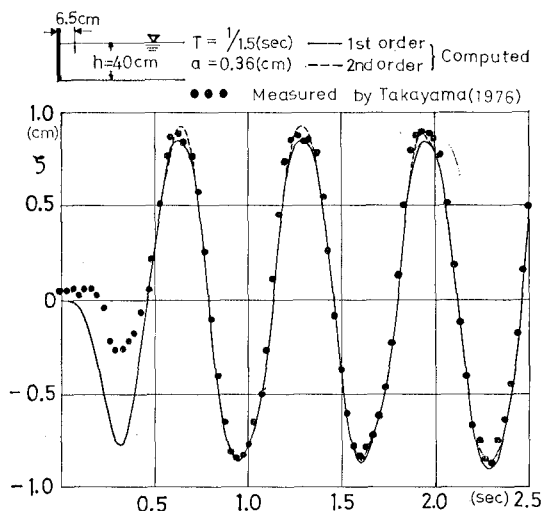


図-5 Wave Generation by Horizontal Oscillation of Paddle in Wave Channel

参 考 文 献

- 1) Welch, J. E., F. H. Harlow, J. P. Shannon and B. J. Daly: The MAC method, A computing technique for solving viscous, incompressible, transient fluid-flow problems involving free surfaces, Los Alamos Scientific Laboratory of University of California, 146 p., 1969.
- 2) 例へば、滝川 清・田淵幹修: 有限要素法による波動解析について、第 25 回海講論文集, pp. 28-32, 1978.
- 3) 井島武士・周 宗仁: グリーンの公式による 2 次元水面波の境界値問題の解析, 土木学会論文報告集, No. 252, pp. 28-32, 1976.
- 4) 高山知司: 振動外力を受けるタンク内発生波の非定常解について、港湾技術研究所報告, 第 15 巻, 第 2 号, 53 p., 1976.