

津波遡上計算時に生ずる短周期振動について

首 藤 伸 夫*

1. はじめに

物質座標系の方程式を用いて津波遡上の数値計算を行なう際、物理的には無意味と思われる短周期振動が生ずることがある^{1),2),3),4)}。時としては計算不安定につながるこの短周期振動の特性は、計算格子の寸法、海浜斜面の勾配、入射波の特性などに関連していることが、数値実験の結果から認められた^{2),3)}。短周期振動のない解をうするためには、方程式や境界条件の差分化の方法を変えたり、あるいは平滑化を行なうことなどが考えられる。ただし、平滑化を行なう場合には、短周期振動の原因を明確にしておかないと、物理現象そのものを不正確にしよう恐れもある。

短周期振動の発生する場所には2種類ある。

ひとつは、水深の急変する場所である¹⁾。空間座標系の方程式でも生ずる場合があり³⁾、その特性は計算格子の大きさと関連があるらしい²⁾。

他のひとつは、津波の最先端部である^{1),2),3),4)}。ここでの振動は津波の遡上そのものに直接影響する。

この論文では、この後者の振動について考察する。

まず、数値実験の結果から、短周期振動の周期・振幅の大きさをとりまとめてしめす。

この振動の成因を明らかにし、理論的な考察からえられる関係が、上記の実験結果と一致することをしめし、ついで、人為的摩擦の導入により、短周期振動を消去する。この摩擦項の大きさは、短周期振動は消えるけれども、本振動には実質的な減衰が生じないように選ぶことができる。

最後に、人為的摩擦項の効果の計算例をしめす。

2. 短周期振動の発生例

計算対象とする地形が波伝播方向のみに変化する一次元の場合とする。一定水深部分と一様勾配傾斜部分とが結合された単純な地形である。

初期条件としては、全域にわたって運動がないと設定する。

海側の境界は、一定水深部で汀線から十分遠く離れた

所とし、ここから正弦波が入射するものとする。計算は、海浜からの反射波が海側境界に到達する前に打切る。

計算に使用する基本方程式は、物質座標系により、

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial a} \left\{ -h(a) \frac{\partial x}{\partial a} - h(a+x) + h(a) \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\eta = -h(a) \frac{\partial x}{\partial a} - h(a+x) + h(a) \quad \dots\dots\dots (2)$$

である¹⁾。ここで、 g ；重力の加速度、 a ；水粒子の静水時の水平座標、 x 、 η ；水表面にある水粒子の、初期位置($a, 0$)からの水平および鉛直変位、 $h(a)$ 、 $h(a+x)$ ；地点 a 、 $a+x$ での水深、である。

岸側の境界条件としては、数値解をもとめるにあたり、仮想境界を導入して、

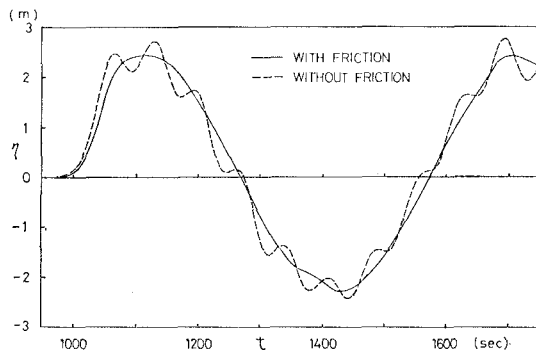
$$x_{-1,j} = 2x_0,j - x_{1,j} \quad \dots\dots\dots (3)$$

を採用する¹⁾。添字0は汀線位置、 $-1, 1$ はそれぞれ汀線よりひとつ岸側・沖側をしめし、 j は時間ステップ数をしめす。

エクスプリシット差分スキームの場合、中央差分を用いた。

計算にあたっては、CFLの安定条件を採用した。

この結果生じた汀線水粒子の鉛直変位の時間波形の例を図一にしめす。点線がそれである。入力した波の周期にくらべて短い周期の振動が重なっていることが明らかに認められる。



図一 汀線部水粒子鉛直変位計算例

$\alpha=1/25$, $h_{\max}=40$ m, 入射波振幅 1 m,
同周期 600 sec, $\Delta t=2$ sec, $\Delta a=100$ m,

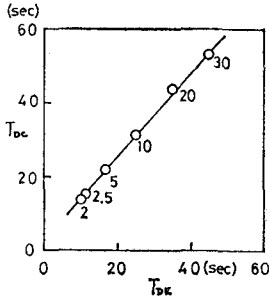


図-2 短周期振動の周期
 $\alpha=1/30$. 添字は Δa (単位は m).

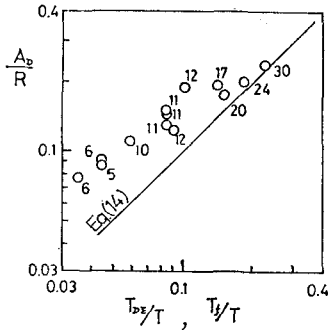


図-3 短周期振動の振幅
 $\alpha=1/30$. 添字は斜面長 l を入射波波長 L で割り, 100 倍した値.

移動平均によって平均的な振動をきめ, これとの差が短周期振動であるとして, その周期, 振幅を図-2, 3 にしめす²⁾.

図-2 の横軸は, 上記のようにして決定した, 数値計算結果の短周期振動の周期 T_{DE} である. 縦軸の T_{DC} は, 最も陸側にある計算格子の特性により計算したものである. 区間距離 Δa , 斜面勾配 α のとき,

$$T_{DC} = 4\sqrt{2} \sqrt{\frac{\Delta a}{g\alpha}} \quad (4)$$

である. これは, 長さ Δa , 平均水深 $\alpha\Delta a/2$ の長方形湾の第一次共振周期である. 図からあきらかな通り, T_{DE} , T_{DC} の間には良い対応があり, 図中の直線は

$$T_{DC} = 1.26 T_{DE} \quad (5)$$

であたえられる.

短周期振動の振幅 A_D は, 斜面長 l と波長 L の比, 格子間隔 Δa , 入射波振幅 A などによって影響され, 場合によっては不安定となるため, 簡単には表わされえない. 図-3 では, T_{DE}/T , A_D/R の関係としてしめす. R は移動平均をおこなってえた最大うちあげ高である.

以上の短周期振動は, 通常のインプリシット差分スキームによっては除去できない⁴⁾.

3. 短周期振動の発生原因

最も陸側にある計算格子について考えることとし, そこでの斜面勾配を α とすると, 問題は

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \alpha g a \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} + 2\alpha g \frac{\partial x}{\partial a} \quad (6)$$

を, 初期条件

$$t=0 \text{ で } x = \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

境界条件

$$x = I_m[x_1 e^{i\omega t}], \quad t \geq 0, \quad a = \Delta a \text{ で } (8)$$

$$x \text{ は } a=0 \text{ で有限値をとる } (9)$$

のもとに解くことに帰着する.

この解は, 次節の一般的な場合の式 (25) において C_f を零として,

$$x|_{a=0} = \frac{\partial^2 x_1}{\delta^2 - \omega^2} \sin \omega t - \frac{\partial^2 x_1}{\delta^2 - \omega^2} \frac{\omega}{\delta} \sin \delta t \quad (10)$$

であたえられる. ここで

$$\delta = \sqrt{\frac{2\alpha g}{\Delta a}} \quad (11)$$

である. 第二項が励起された自由振動であり, その周期は,

$$T_f = \frac{2\pi}{\delta} = \sqrt{2} \pi \sqrt{\frac{\Delta a}{\alpha g}} \quad (12)$$

となる. 式 (4), (5) とから

$$T_{DE} = 1.01 T_f \quad (13)$$

をうる. すなわち, 数値実験でみられた短周期振動は, 最も陸側の計算格子が見かけ上の自由振動を行っているものに対応する.

このとき, A_D/R には, (第二項の振幅)/(第一項の振幅) に対応するから

$$\frac{A_D}{R} = \frac{\omega}{\delta} = \frac{T_f}{T} \div \frac{T_{DE}}{T} \quad (14)$$

で, 図-3 の直線がこれである. l/L が長い時には, 数値実験値は式 (14) にちかづく. l/L が小さくなると次第にずれてくるが, これは $\Delta a/l$ が大きくなることと関連した不安定の影響が無視できなくなることによると思われる³⁾.

4. 人為的摩擦の導入

前節の結果から, Δa を小さくするほど, 短周期振動は目立たなくなることが結論されるが, 計算時間が増加することになる. そこで, 人為的摩擦項を導入し, 短周期の振動を消し, しかも物理的に必要な振動は影響をうけないように調整することとする.

扱うべき式は,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \alpha g a \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} + 2\alpha g \frac{\partial x}{\partial a} - C_f \frac{\partial x}{\partial t} \quad (15)$$

である。最後の項が人為的摩擦項で、 C_f は後程決定される定数である。

初期条件、境界条件は式(7)、(8)、(9)である。

x の時間に関するラプラス変換 X を

$$X(a, \sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} x(a, t) dt \quad \dots\dots\dots (16)$$

とすると、式(15)は

$$(\sigma^2 + C_f \sigma) X = \alpha g a \frac{\partial^2 X}{\partial a^2} + 2\alpha g \frac{\partial X}{\partial a} \quad \dots\dots\dots (17)$$

で、これを

$$a=0 \text{ において } X \text{ は有限} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$a=\Delta a \text{ において } X = \frac{x_1}{\sigma - i\omega} \quad \dots\dots\dots (19)$$

のもとに解くこととなる。

式(17)をそのまま解くとベッセル関数、ノイマン関数がでてくるが、後に述べる理由から、これらを採用する必要はない。そのかわりにベッセル関数の級数展開に対応する

$$X = A_0 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 + C_f \sigma}{\alpha g} a + \frac{1}{12} \left(\frac{\sigma^2 + C_f \sigma}{\alpha g} \right)^2 a^2 + \dots \right] \quad \dots\dots\dots (20)$$

を採用すれば十分である。

差分化した式で、仮想境界条件式(3)を用いるため、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial a^2} \Big|_{a=0} &= \frac{1}{(\Delta a)^2} [X_{1,j-2} - 2X_{0,j} + X_{-1,j}] \\ &= \frac{1}{(\Delta a)^2} [X_{1,j-2} - 2X_{0,j} + 2X_{0,j-1} - X_{-1,j}] = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial a} \Big|_{a=0} &= \frac{1}{2(\Delta a)} [X_{1,j} - X_{-1,j}] \\ &= \frac{1}{(\Delta a)} [X_{1,j} - X_{0,j}] \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

となつて、式(17)の右辺は

$$(\sigma^2 + C_f \sigma) A_0 + \frac{1}{12} A_0 \frac{(\sigma^2 + C_f \sigma)^2}{\alpha g} \Delta a \quad \dots\dots\dots (23)$$

であるのに、左辺は $(\sigma^2 + C_f \sigma) A_0$ となつて、級数解式(20)の第三項に起因する誤差が残ることになる。

いいかえると、中央差分と式(3)とを組合せるかぎり、式(20)の第二項迄の精度でしか解の決定ができない。したがって、ベッセル関数などを使用する必要はない。解として、

$$X = A_0 \left[1 + \frac{1}{2\alpha g} (\sigma^2 + C_f \sigma) a \right] \quad \dots\dots\dots (24)$$

とし、境界条件(19)より A_0 をきめ、その結果をラプラス逆変換すればよい。 C_f はそれ程大きくない、波運動は基本波の重ね合せであらわさるう、 Δa の間を波が伝播する時間は入射波の周期にくらべて十分小さい、波のフロントが汀線に到達して十分時間が経過したのちの現象に対する解を考える、などの仮定のもとにラプラ

ス逆変換をおこなうと、解は、

$$\begin{aligned} x|_{a=0} &= \frac{\partial^2 x_1}{\sqrt{(\delta^2 - \omega^2)^2 + C_f^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \theta_1) \\ &\quad - \frac{\omega}{\sqrt{\delta^2 - \frac{C_f^2}{4}}} \frac{\partial^2 x_1}{(\delta^2 - \omega^2)^2 + C_f^2 \omega^2} \\ &\quad \times \left\{ \left(\delta^2 - \omega^2 - \frac{C_f^2}{2} \right)^2 + C_f^2 \left(\delta^2 - \frac{C_f^2}{4} \right) \right\}^{1/2} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{C_f}{2} t\right) \sin\left(\sqrt{\delta^2 - \frac{C_f^2}{4}} t - \theta_2\right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ただし、

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{\omega C_f}{\delta^2 - \omega^2} \right\}, \quad \theta_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{C_f \sqrt{\delta^2 - \frac{C_f^2}{4}}}{\delta^2 - \omega^2 - \frac{C_f^2}{2}} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

である。第一項が強制振動、第二項が自由振動である。自由振動の振幅には $\exp[-C_f t/2]$ があり、 C_f の選び方によって振幅を抑制できる。

5. 人為的摩擦による短周期振動の除去

本来我々の必要とするものは、式(10)の第一項である。これに対する式(25)第一項の比 r_0 は、

$$r_0 \doteq 1 - \frac{1}{2} \frac{C_f^2}{\delta^2} \frac{\omega^2}{\delta^2} \quad \dots\dots\dots (27)$$

で、これが1に近いことが望ましい。所で、(人為的摩擦下の自由振動の振幅)/(本来の強制振動の振幅)の値は小さい方がよい。津波のうちあげ高でもっとも重要なのは $t=T/4$ 時のものであるから、この時のこの比 r_f をもとめると、

$$r_f \doteq \frac{\omega}{\delta} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{C_f^2}{\delta^2} \right) \exp\left(-\frac{C_f T}{8}\right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

で、これが小さくなるように C_f をきめる。

たとえば、 $T=250$ sec, $\Delta a=10$ m, $\alpha=1/10$ のとき r_f が 10^{-3} のとき $C_f=0.129$ で、 r_0 は $1-1.3 \times 10^{-4} \doteq 1$ で、実質上問題はない。

図一の実線は以上のようにして計算した一例である。

6. 結 論

式(1)、(2)を仮想境界(3)のもとにとく時に生ずる短周期振動の発生原因をあきらかにした。これを消去するためには式(15)のように人為的摩擦項を使用する。この係数 C_f を r_f は小さく r_0 は1に近くなるように決定すれば、短周期振動は消え、本来の振動は悪影響をうけることがない。

謝辞: この研究の一部は、文部省科学研究費(代表者 東大地震研究所梶浦欣二郎教授)によつた。計算には、

佐藤 淳 (現日本自動機工), 後藤和博 (現パシフィック
コンサルタント), 長谷川賢一 (ユニック), 稲葉英夫
(同) 各氏の助力をえた。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 首藤伸夫・後藤智明: 津波の遡上に関する数値解析, 第 24
回海講論文集, pp. 65-68, 1977.
 - 2) 佐藤 淳・首藤伸夫: 津波遡上の数値解析法に関する検討,
昭和 52 年度東北支部講演概要, pp. 106-107, 1978.
 - 3) 佐藤 淳・首藤伸夫: 津波遡上の数値解析法に関する検討,
第 33 回年講演演概要集, pp. 846-847, 1978.
 - 4) 後藤和博・首藤伸夫: Implicit 差分スキームによる津波の
遡上解析, 昭和 53 年度東北支部講演概要, pp. 95-96, 1979.
 - 5) 相田 勇: 大振幅津波の入射による湾水の振動, Bull.
Earthq. Res. Inst., Vol. 53, pp. 1151-1165, 1978.
 - 6) 相田勇博士の私信.
-