

非線型津波の二次元遡上計算

後藤 智明*・首藤 伸夫**

1. 序

近年、津波の挙動を予測するのに、数値実験の手法がきわめて有効であることが認識されるようになった。しかしながら、特に陸岸付近の浅海や陸岸へ打ち上がった津波を考えるとときには、解決を要する幾多の問題点が残されていることも事実である。それらの問題点のなかで最も重要と思われることは、どのような運動方程式系がより実用的であるかという問題であろう。

本研究では、この運動方程式系の選択の問題に関する梶浦¹⁾・首藤²⁾の研究を背景として、物質座標系の考え方で、深水域での線型方程式系から、浅海域での有限波高性を考慮した非線型方程式系につなぐ数値計算モデルについて検討を行なった。

まずはじめに、平面二次元問題における有限波高性を考慮した非線型長波の式を新たに導いている。先に後藤³⁾が用いた展開を平面二次元問題に拡張したものは、非回転の条件式が面倒となり、水深方向に積分可能という長波特有の条件の算出が困難なため、新たな展開を用いている。

次に、非線型長波と線型のものとを比較するために、矩形湾湾奥の遡上高についての理論解を導いている。この矩形湾について線型および非線型の式を用いた数値計算を行なうことにより、数値計算法の検証および最大遡上高に関する比較を行なっている。

最後に、三陸地方越喜来湾を対象として、明治 29 年三陸大津波を想定し、線型および非線型の式を用いた計算を行ない過去の痕跡高と比較している。

2. 長波の非線型方程式

三次元非回転運動を対象とする。粘性は考えない。いま、静水時を時刻の原点に選び、座標 (a, b, c) に存在した水粒子が任意の時刻 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ に到達し、その水粒子の受けている圧力を $\hat{p}$ とする。連続および運動の式は、

$$\frac{\partial(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})}{\partial(a, b, c)} = 1 \quad \dots\dots\dots(2-1)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_a & \hat{y}_a & \hat{z}_a \\ \hat{x}_b & \hat{y}_b & \hat{z}_b \\ \hat{x}_c & \hat{y}_c & \hat{z}_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{tt} \\ \hat{y}_{tt} \\ \hat{z}_{tt} + g \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \hat{p}_a \\ \hat{p}_b \\ \hat{p}_c \end{pmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots(2-2)$$

である。ここで、 ρ は密度、 g は重力加速度である。

非回転の条件式は (2-2) に対して回転をとることにより導かれ、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\hat{x}, \hat{x}_t)}{\partial(a, b)} + \frac{\partial(\hat{y}, \hat{y}_t)}{\partial(a, b)} + \frac{\partial(\hat{z}, \hat{z}_t)}{\partial(a, b)} &= 0 \\ \frac{\partial(\hat{x}, \hat{x}_t)}{\partial(b, c)} + \frac{\partial(\hat{y}, \hat{y}_t)}{\partial(b, c)} + \frac{\partial(\hat{z}, \hat{z}_t)}{\partial(b, c)} &= 0 \\ \frac{\partial(\hat{x}, \hat{x}_t)}{\partial(c, a)} + \frac{\partial(\hat{y}, \hat{y}_t)}{\partial(c, a)} + \frac{\partial(\hat{z}, \hat{z}_t)}{\partial(c, a)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2-3)$$

となる。

いま、水平方向に l 、鉛直方向に d という特性長を考え、長波の運動は $d/l \ll 1$ によって特徴づけられるものとする。この特性長 l および d を用いて、(2-1)~(2-3)の変数を次のように無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{a}{l}, \quad B = \frac{b}{l}, \quad C = \frac{c}{d}, \quad T = \frac{\sqrt{gd}}{l} t \\ \hat{X} &= \frac{\hat{x}}{l}, \quad \hat{Y} = \frac{\hat{y}}{l}, \quad \hat{Z} = \frac{\hat{z}}{d}, \quad \hat{P} = \frac{\hat{p}}{\rho gd} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2-4)$$

ついで、従属変数 $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}, \hat{P}$ を次のように展開し、 σ に関して整理する。

$$\left. \begin{aligned} \hat{X} &= A + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \hat{X}_k, \quad \hat{Y} = B + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \hat{Y}_k \\ \hat{Z} &= C + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \hat{Z}_k, \quad \hat{P} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k \hat{P}_k \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2-5)$$

たとえば、連続の式 (2-1) に関して整理すると、

$$\left. \begin{aligned} O(\sigma^0) \quad 1 &= 1 \\ O(\sigma^1) \quad \hat{X}_{1A} + \hat{Y}_{1B} + \hat{Z}_{1C} &= 0 \\ O(\sigma^2) \quad \hat{X}_{2A} + \hat{Y}_{2B} + \hat{Z}_{2C} &= 0 \\ &= -\hat{Z}_{1C}(\hat{X}_{1A} + \hat{Y}_{1B}) + \frac{\partial(\hat{X}_1, \hat{Y}_1)}{\partial(A, B)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2-6)$$

となる。

またここで、 $O(\sigma^1)$ と $O(\sigma^2)$ の式を加えた式を作ると、(2-6) に対して、

* 正会員 工修 東北大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

$$(\sigma \hat{X}_1 + \sigma^2 \hat{X}_2)_A + (\sigma \hat{Y}_1 + \sigma^2 \hat{Y}_2)_B + (\sigma \hat{Z}_1 + \sigma^2 \hat{Z}_2)_C + \sigma^2 \hat{Z}_{10}(\hat{X}_{1A} + \hat{Y}_{1B}) + \sigma^2 \frac{\partial(\hat{X}_1, \hat{Y}_1)}{\partial(A, B)} = 0 \quad (2-7)$$

となる。いま、

$$\left. \begin{aligned} X &= \sigma \hat{X}_1 + \sigma^2 \hat{X}_2, & Y &= \sigma \hat{Y}_1 + \sigma^2 \hat{Y}_2 \\ Z &= \sigma \hat{Z}_1 + \sigma^2 \hat{Z}_2, & P &= \sigma \hat{P}_1 + \sigma^2 \hat{P}_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

とおくと、(2-7) は

$$X_A + Y_B + Z_C(1 + X_A + Y_B) + \frac{\partial(X, Y)}{\partial(A, B)} + O(\sigma^3) = 0 \quad (2-9)$$

となる。

他の式にも同様な操作をすると、

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} 1+X_A & Y_A \\ X_B & 1+Y_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{TT} \\ Y_{TT} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_A + P_A \\ Z_B + P_B \end{pmatrix} &= 0 \\ Z_C + P_C = 0, & Y_C = 0, X_C = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

が導かれる。この (2-9)、(2-10) が $O(\sigma^2)$ の長波近似としての基礎方程式である。

自由表面での境界条件は、最初自由表面を形成していた水粒子は常に水表面に存在することである。水底での条件は、最初水底にあった水粒子が水底を離れることがないというものである。したがって、

$$\left. \begin{aligned} C &= 0 \text{ で } P = 0 \\ C &= -H(A, B) \text{ で} \\ Z &= H(A, B) - H(A+X, B+Y) \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

で表わされる。ここで、 H は水深を意味する。

以下、これらの条件を用いて水深方向に積分された長波の式を考える。まず、連続の式を C について積分し境界条件を適用すると、

$$Z = -[C + H(A, B)] \frac{X_A + Y_B + \frac{\partial(X, Y)}{\partial(A, B)}}{1 + X_A + Y_B} + H(A, B) - H(A+X, B+Y) \quad (2-12)$$

が求まる。同様に鉛直方向の運動の式を積分すると、

$$P = C \frac{X_A + Y_B + \frac{\partial(X, Y)}{\partial(A, B)}}{1 + X_A + Y_B} \quad (2-13)$$

となり、この両式から、

$$N \equiv Z + P = -H(A, B) \frac{X_A + Y_B + \frac{\partial(X, Y)}{\partial(A, B)}}{1 + X_A + Y_B} + H(A, B) - H(A+X, B+Y) \quad (2-14)$$

である。この式を水平方向の運動の式に代入すると、

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1+X_A & Y_A \\ X_B & 1+Y_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{TT} \\ Y_{TT} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_A \\ N_B \end{pmatrix} \right\} = 0 \quad (2-15)$$

が導かれる。ここで、 N は $C=0$ のときの z の値であり、以下波形と呼ぶことにする。

以上の論議で明らかのように、(2-14) が長波の連続の式であり、(2-15) が運動の式である。

表一は、有次元表示で線型と非線型とを比較したものである。ただし、水平床の場合で、 x または y 方向へ進行する波を対象としている。

表一 線型と非線型方程式の比較

	線型 (微小振幅)	非線型 (有限振幅)
連続	$\eta + h(x_a + y_b) = 0$	$x_a + y_b + \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = 0$ $\eta + h \frac{1}{1 + x_a + y_b} = 0$
運動	$\begin{pmatrix} x_{tt} \\ y_{tt} \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} \eta_a \\ \eta_b \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} 1+x_a & y_a \\ x_b & 1+y_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{tt} \\ y_{tt} \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} \eta_a \\ \eta_b \end{pmatrix} = 0$
波速	$\sqrt{gh}$	$\sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h}\right)$
圧力	$\rho g(\eta - z)$	$\rho g(\eta - z)$
変位	微小変位	有限変位

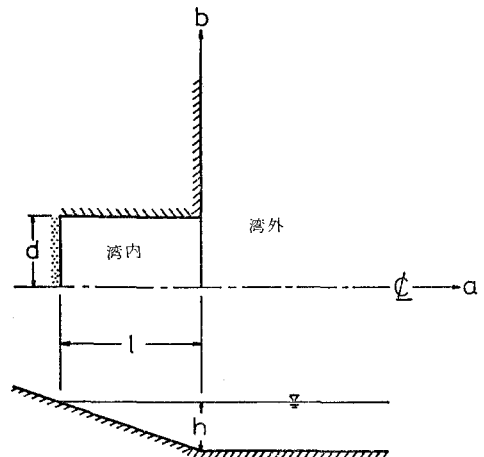
3. 矩形湾の遡上高に関する理論解

波の遡上に関する取り扱いにおいては、従来よく用いられて来た空間座標表示では、Carrier-Greenspan とか Tuck-Hwang 変換といった特殊な技巧を要する。しかし、物質座標で考えると、Ippen-Goda⁴⁾・酒井⁵⁾等が行なった方法で比較的容易に解を求めることができる。

図一のような、湾内の水深が湾軸方向に一樣に減少している矩形湾について考える。湾内では横振動を無視でき、一次元伝播として取り扱えるものと仮定する。海底摩擦は考えない。

いま、 H を沖波重複波高、 $F(a, b)$ を空間波形分布関数として、

$$\eta = H \exp(i\sigma t) F(a, b) \quad (3-1)$$



図一 矩形湾 (記号の説明)

とくと、境界条件は

$$\left. \begin{aligned} b=-d, d; -l \leq a \leq 0 \text{ で } F_{1b}=0 \\ |b| > d; a=0 \text{ で } F_{1a}=0 \\ a^2+b^2 \rightarrow \infty \text{ で } F_1=\cos(k_1 a) \\ |b| < d; a=0 \text{ で } F_{1a}=F_{2a}=\alpha k_1 \exp(i\omega) \\ F_1=F_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-2)$$

ここで、添字 1 は湾外、2 は湾内での量を表わすものとする。 σ は角振動数、 k は波数を意味し、 α と ω は未知定数である。

(1) 湾外の波の解

Ippen-Goda の空間座標と本論文の物質座標との表現の違いがあるが、基本的には Helmholtz の方程式

$$F_{1aa}+F_{1bb}+k_1^2 F_1=0 \dots\dots\dots (3-3)$$

を解くことに帰着され、解は

$$F_1=\cos(k_1 a)+\alpha k_1 \exp(i\omega)(iI_1-I_2) \dots\dots (3-4)$$

となる。ここで、 I_1, I_2 は次式であらわされる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{k_1} \frac{\sin(ud) \cos(ub)}{u \sqrt{k_1^2 - u^2}} \exp(-i \sqrt{k_1^2 - u^2} \cdot a) du \\ I_2 &= \frac{2}{\pi} \int_{k_1}^{+\infty} \frac{\sin(ud) \cos(ub)}{u \sqrt{u^2 - k_1^2}} \exp(-\sqrt{u^2 - k_1^2} \cdot a) du \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-5)$$

(2) 湾内の波の解

湾内においては、先に仮定したとおり一次元伝播として取り扱うため、Bessel の微分方程式

$$(a+l)F_{2aa}+F_{2a}+\frac{\sigma^2}{gs}F_2=0 \dots\dots\dots (3-6)$$

を解くことに帰着され、解は

$$F_2=-\alpha \exp(i\omega) J_0\left(\frac{\sigma}{\sqrt{gs}} \sqrt{a+l}\right) J_1^{-1}\left(4\pi \frac{l}{L}\right) \dots\dots\dots (3-7)$$

となる。ここで、 s は海底勾配、 L は沖波波長を示す。

(3) 未知係数 α および ω の決定

境界条件中、湾口水位連続条件 $F_1(0, b)=F_2(0)$ は湾口幅方向に平均して成立するものと考え、

$$\begin{aligned} 1+\alpha k_1 \exp(i\omega) \frac{1}{d} \int_0^a (iI_1-I_2) db \Big|_{a=0} \\ = -\alpha \exp(i\omega) J_0\left(4\pi \frac{l}{L}\right) J_1^{-1}\left(4\pi \frac{l}{L}\right) \end{aligned} \dots\dots\dots (3-8)$$

が常に成立する必要がある。故に、

$$\omega = -\arctan \left\{ \frac{J_1\left(4\pi \frac{l}{L}\right) \varphi_1}{J_0\left(4\pi \frac{l}{L}\right) - J_1\left(4\pi \frac{l}{L}\right) \varphi_2} \right\} \dots\dots\dots (3-9)$$

$$\alpha = J_1\left(4\pi \frac{l}{L}\right) \left[J_1\left(4\pi \frac{l}{L}\right) \varphi_1 \right]^2$$

$$+ \left\{ J_0\left(4\pi \frac{l}{L}\right) - J_1\left(4\pi \frac{l}{L}\right) \varphi_2 \right\}^2 \Big]^{-1/2} \dots\dots\dots (3-10)$$

が求まる。ここで φ_1 および φ_2 は次式であらわされる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{2}{\pi} (k_1 d) \int_0^{k_1 d} \frac{\sin^2 u}{u^2 \sqrt{(k_1 d)^2 - u^2}} du \\ \varphi_2 &= \frac{2}{\pi} (k_1 d) \int_{k_1 d}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2 \sqrt{u^2 - (k_1 d)^2}} du \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-11)$$

(4) 湾奥での遡上高

(3-1), (3-7) および (3-10) から矩形湾の遡上高 R は、梶浦の Tuck-Hwang 変換を用いた解¹⁾と一致し、

$$\begin{aligned} \frac{R}{H} = \left[\left\{ J_1\left(4\pi \frac{l}{L}\right) \varphi_1 \right\}^2 \right. \\ \left. + \left\{ J_0\left(4\pi \frac{l}{L}\right) - J_1\left(4\pi \frac{l}{L}\right) \varphi_2 \right\}^2 \right]^{-1/2} \end{aligned} \dots\dots\dots (3-12)$$

となる。

4. 数値計算法

計算は差分法とし、leap-frog 法を採用している。計算点の配置を図-2 に示す。

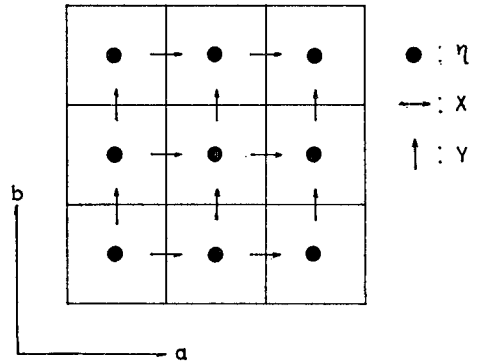


図-2 計算点の配置

(1) 基本方程式

非線型長波の式に海底摩擦の表現として、流速の 2 乗に比例する項を加え陽的な表現にすると、

$$\begin{aligned} \eta_t = -h(a, b) \left\{ x_a + y_b + \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} \right\} \{1 + x_a + y_b\}^{-1} \\ - h(a+x, b+y) + h(a, b) \end{aligned} \dots\dots\dots (4-1)$$

$$\begin{aligned} x_{tt} = -g \left\{ \eta_a + \frac{\partial(x, \eta)}{\partial(a, b)} \right\} \{1 + x_a + y_b + \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)}\}^{-1} \\ - f x_t |x_t| \{ \eta + h(a+x, b+y) \}^{-1} \end{aligned} \dots\dots (4-2)$$

$$\begin{aligned} y_{tt} = -g \left\{ \eta_b + \frac{\partial(x, \eta)}{\partial(a, b)} \right\} \{1 + x_a + y_b + \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)}\}^{-1} \\ - f y_t |y_t| \{ \eta + h(a+x, b+y) \}^{-1} \end{aligned} \dots\dots (4-3)$$

となる。ここで、 f は摩擦係数である。差分式は 図-2 の配置に従って中央差分をとればよい。線型の式についても同じである。

(2) 初期条件および境界条件

初期条件は、時刻の原点で静水状態を考え、全計算領域に対し次のようにおく。

$$x=y=\eta=0 \quad \dots\dots\dots(4-4)$$

波の入力条件としては、規則波に対し

$$x_i = \pm \sqrt{\frac{g}{h}} \eta \quad \text{又は} \quad y_i = \pm \sqrt{\frac{g}{h}} \eta \quad \dots\dots(4-5)$$

なる関係⁶⁾で与えた。ただし、後述の越喜来湾の計算では波源域モデル(空間座標表示)による計算値 u, v を物質座標系の変位量 x, y に変換している。この変換は

$$x = \int_0^t u dt \quad \text{および} \quad y = \int_0^t v dt \quad \dots\dots\dots(4-6)$$

で与えられ、空間座標表示の流速と物質座標表示の流速が等しいと考えたものである。両表示法の流速の差は長波の場合波高水深比に比例することから考え、海岸から充分離れた外洋で結合すれば問題はない。

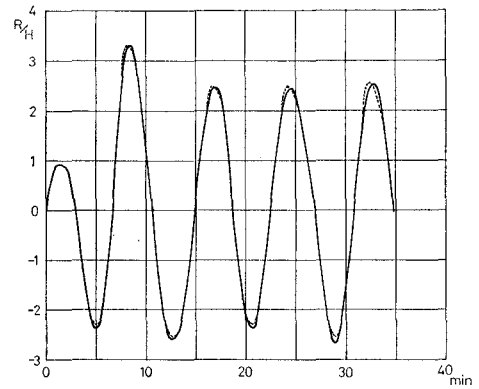
汀線における境界条件は、連続の式(4-1)を見ると明らかなように、静水時汀線に存在していた水粒子は地形形状に沿って地表上を移動することが保証されておりとりたてて必要ではない。

5. 矩形湾に関する数値計算

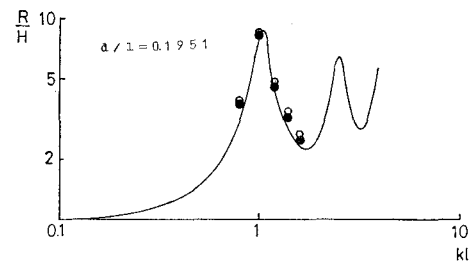
図一1に示す矩形湾を対象とする。格子近似のとり方は湾内および湾口から2kmのところまで100m正方格子としそれから沖は500m正方格子を用いている。なお、海底摩擦は理論解と同様に無視している。

図一3は計算結果の一例であり、遡上高の時間変化を描いたものである。実線が線型、破線が非線型の結果である。第1波は波高が小さい過渡的な波を入力している。第2波は第1波の影響で若干大きな遡上高となり、第3波以降はほぼ定常に達していることが読みとれる。線型と非線型の結果を比べると、非線型の方が波の峰谷共に高くなっていること、時間がたつにつれ、徐々に峰が高くなり前傾する量が大きくなることがわかる。

図一4は $d/l=0.1951$ に関して理論解と数値解とを比較したものである。黒丸印は線型、白丸印は非線型数値解を表わしている。両者とも第3波から第5波までの値を平均したものである。理論解と線型数値解の差は最大で10%程度であった。また、非線型数値解との差は最大20%前後に達する。



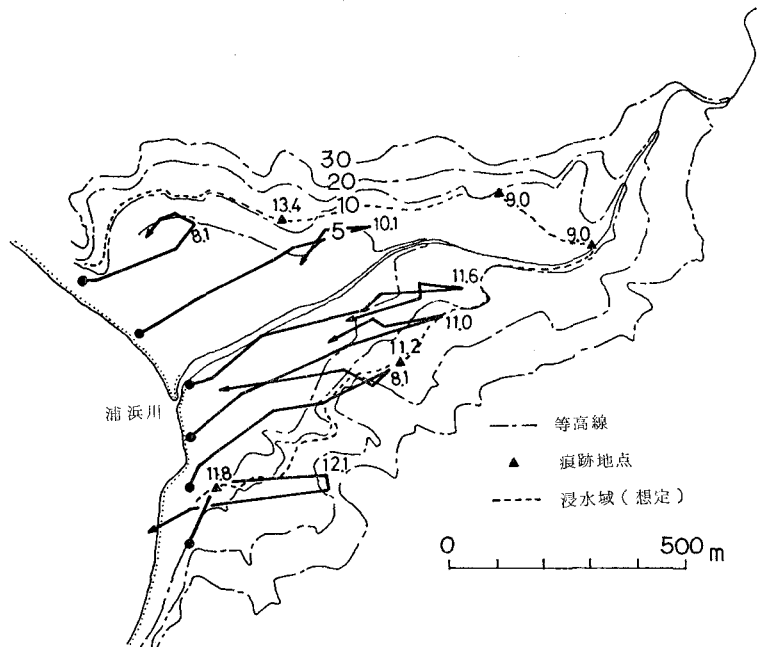
図一3 相対遡上高の時間波形 ($H/h=2 \times 10^{-2}$)



図一4 理論解と数値解の比較

6. 越喜来湾に関する津波の遡上計算

越喜来湾は三陸海岸南端近くに位置し、湾の形は湾口のせばまったほぼ楕円形をなしている。湾内には浦浜・泊・崎浜などの漁港が点在し、これらの地区は明治29年・昭和8年の三陸大津波によって顕著な浸水が認めら



図一5 浦浜地区の計算結果

れる地区でもある。

計算は北緯 $38^{\circ}51'32'' \sim 39^{\circ}7'45''$ ，東経 $141^{\circ}48'17'' \sim 142^{\circ}14'3''$ の地域を四つの領域に構成し， $10/3$ km 格子から湾に近づくに従って順次格子を細かくし最終的に湾内で $1/9$ km で地形を表現している。また，外側の三領域は線型，湾内では非線型計算を行なった。

入力波としては，明治 29 年に三陸大津波を想定した波源域モデルの計算結果を用いた。

図-5 は湾奥の浦浜地区の流跡線を描いたものである。黒丸印は静水時の水粒子の位置を示す。水粒子の運動は複雑であり，各水粒子の最大遡上高が異なっている。

本計算は陸上側の地形の表現は計算格子と同じ $1/9$ km 格子で与えており，その間の地点は補間で定めていることを考えると妥当な計算といえることができる。残念なことは浦浜川に沿って遡上する計算点がなかったことである。

7. 結 論

本研究においては，平面二次元問題に対する非線型長波の式を導き，その式を用いた数値計算について論議して来た。まず，理論解と線型計算解とを比較することにより計算法の妥当性について検証した。非線型計算では，線型に比べ Run-up は大きく，Run-down は小さくなり最大 20% 程度の差が見られることがわかった。

しかし，定性的な論議をするためには数多くの計算をする必要があることは明らかである。最後に，複雑な地形を有する実海岸に関しても比較的容易に計算することが可能であり，過去の痕跡をよく説明することがわかった。

謝辞：本研究をすすめるにあたり，東北大学岩崎敏夫教授，真野明助手から三陸大津波のデータをいただいた。計算整理にあたっては大学院生笹川稔郎君の助力を得た。本研究の一部は文部省科学研究費（代表者 東大地震研梶浦欣二郎教授）によって行われた。ここに記して厚く謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Kajiura, K.: Local behaviors of tsunamis, IUTAM symposium on "Surface gravity wave on water of varying depth", 1979.
- 2) 首藤伸夫：津波の計算における非線型項と分散項の重要性，第 23 回海講，pp. 432~436, 1976.
- 3) 後藤智明：物質座標系による非線型長波，第 25 回海講，pp. 128~131, 1978.
- 4) Ippen, A. T. and Y. Goda: Wave induced oscillations in harbors: Solution of a rectangular harbor connected to the open sea, M.I.T. Hydrodynamics Lab., Report No. 59, 1963.
- 5) 酒井哲郎：傾斜した海底を有する湾における長波の湾水振動，第 22 回海講，pp. 279~284, 1975.
- 6) 首藤伸夫・後藤智明：津波の遡上に関する数値解析，第 24 回海講，pp. 65~68, 1977.