

定形進行波の質量輸送

土屋義人*・岡村 隆**・安田孝志***・山下隆男****

1. 緒 言

定形進行波の水粒子の運動に存在する定常な変位いわゆる Stokes drift が Stokes¹⁾ (1847) によって指摘されて以来、これが海浜流や漂砂と密接に関係すると考えられて、波による質量輸送に関して多くの研究が行われてきた。しかしながら、従来の定形進行波の理論では、波速の決定に任意性があるため、質量輸送の表示も波速の定義によって異なる。一方、質量輸送に関する従来の実験においては、一般に有限長の波浪水槽を用いるため、Stokes の波速の第2定義に対応する条件を与えたことになる。このように、質量輸送に関する研究は、波速の定義に関連して波動内部を拘束した条件で行われてきたと思われる。著者らはこの観点から、有限振幅波理論を提案して、質量輸送の表示を与えるとともに、定形進行波の実験に必要な波浪水槽を試作し一連の実験を行ってきた。本論文ではそれらの結果に基づいて定形進行波の質量輸送を考察する。

2. 質量輸送の表示

(1) 従来の表示

定形進行波の質量輸送に関する研究は数多く発表されているが、それらは次の2つに大別される。その1つは完全流体の仮定に基づく波動理論による表示であり、他の1つは水面および底面における粘性効果を考慮したものである。

まず、前述した Stokes drift は Lagrange 座標における質量輸送であり、その表示は Stokes の波速の定義に依存して、次式で表わされる。

Stokes の波速の第1定義；

$$U_M = \frac{H^2 \sigma k \cosh 2kh}{8 \sinh^2 kh} \quad \dots\dots\dots (1)$$

Stokes の波速の第2定義；

$$U_M = \frac{H^2 \sigma k \cosh 2kh}{8 \sinh^2 kh} - \frac{H^2 \sigma \coth kh}{8h} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 U_M ；Lagrange 座標における質量輸送速度、 H ；波高、 h ；水深、 $\sigma=2\pi/T$ 、 T ；周期、 $k=2\pi/L$ 、および L ；波長であり、座標系は図—1に示すとおりである。一方、Euler 座標における質量輸送速度は、水平水粒子速度の1周期平均として定義され、次式で表示される。

$$\bar{u} = \frac{H^2 \sigma \coth kh}{8h} ; \quad -\frac{H}{2h} < \frac{z}{h} + 1 < \frac{H}{2h} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\bar{u}$ ；Euler 座標における質量輸送速度である。さらに、深海における定形進行波を対象として、Lévi-Civita の方法を用いて Stokes 波理論を展開し、Ursell の方法によって質量輸送速度を定式化した山田²⁾の取り扱いもある。一方、クノイド波の質量輸送については、Le Méhauté³⁾ が Laitone の第2近似解を用いた表示を与えているが、孤立波の場合平均の質量輸送速度が有限値となり、なお問題があるといわねばならない。

一方、質量輸送に及ぼす粘性効果については、Longuet-Higgins⁴⁾をはじめ Huang⁵⁾、Liu & Davis⁶⁾ らによって研究されてきたが、ここでは Longuet-Higgins の表示を示す。

$$U_M = \frac{H^2 \sigma k}{4 \sinh^2 kh} \left[3 + 2 \cosh 2kh + 3kh \left\{ 3 \left(\frac{z}{h} - 1 \right)^2 + 4 \left(\frac{z}{h} - 1 \right) + 1 \right\} \sinh 2kh + 3 \left\{ \left(\frac{z}{h} - 1 \right)^2 - 1 \right\} \left(\frac{\sinh 2kh}{2kh} + \frac{3}{2} \right) \right] \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、これは波速の第2定義によっているので、全質量輸送量は存在しない。図—1には、 $kh=1$ および $h/H=3$ の場合について以上の諸式を図示したが、これから次のことがわかる。まず、Euler 座標と Lagrange 座標とでは、質量輸送速度の鉛直分布が全く異なっている。次に、質量輸送に及ぼす粘性効果については、Longuet-Higgins の解にみられるように、水底における波の進行方向への強い質量輸送が存在することになるが、このことは古く Bagnold らの実験で見出された事実に対応している。ただし、Ünlüata & Mei⁷⁾ らによって指摘され

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所
 ** 正会員 工修 大阪府土木部 港湾事務所技師
 *** 正会員 工博 岐阜大学講師 工学部土木工学科
 **** 正会員 工修 京都大学助手 防災研究所

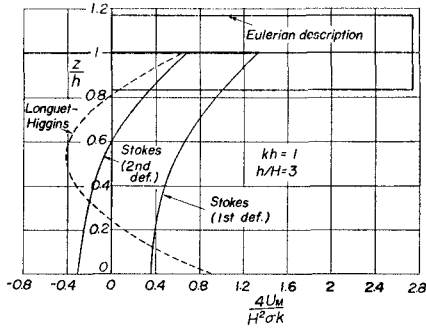


図-1 座標系と質量輸送速度の鉛直分布の従来の表示

ているように、この解は一定の水面勾配をもつ波動の場合に対応しているようである。

(2) 著者らの表示

著者らの提案した擬 Stokes 波理論⁸⁾およびクノイド波理論⁹⁾によれば、質量輸送速度は次のように表わされる。

a) 擬 Stokes 波理論による質量輸送: Lagrange 座標による質量輸送速度 U_M の表示は、次式で与えられる。

$$U_M / \sqrt{gh} = (\lambda_0^3 / 16) \{ 1 - (1/2)(2\pi h/L)^2 \} + (\lambda_0^3 / 8)(\sqrt{gh}/c) \times [1 + (2/3)(2\pi h/L)^2 \{ 3(z/h - 1)^2 - 1 \}] \quad (5)$$

これに対して Euler 座標では、水粒子の 1 周期平均として、次式で表わされる。

$$\bar{u} / \sqrt{gh} = (\lambda_0^3 / 16) \{ 1 - (1/2)(2\pi h/L)^2 \} \quad (6)$$

ここに、 λ_0 および波速 c は次式で与えられる。

$$\frac{H}{h} = \lambda_0 + \frac{1}{8\pi^2 \epsilon} \left(\frac{27}{512\pi^2 \epsilon} + \frac{45}{128} \right) \lambda_0^3, \quad \epsilon = \left(\frac{h}{L} \right)^2 \quad (7)$$

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{19}{360} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^4 - \frac{55}{3024} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{9\lambda_0}{64} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \quad (8)$$

b) クノイド波理論による質量輸送: Lagrange 座標における質量輸送速度は、

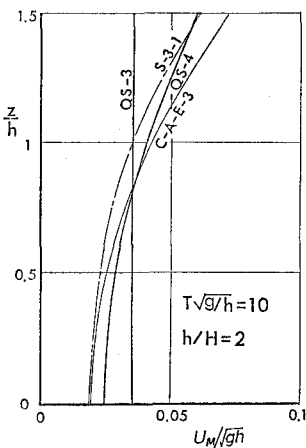
$$\begin{aligned} \frac{U_M}{\sqrt{gh}} = & \frac{\lambda^2}{6\kappa^4} \left\{ 1 + 2 \left(\frac{\sqrt{gh}}{c} \right) \right\} \\ & \times \left[- \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + 2\kappa^2 - 4 \right\} + \kappa^2 - 1 \right] \\ & + \frac{2\lambda^3}{5\kappa^6} \left(\frac{\sqrt{gh}}{c} \right) \left(\frac{z}{h} - 1 \right)^2 \\ & \times \left\{ 2 \left(\frac{E}{K} \right) (\kappa^4 - \kappa^2 + 1) - \kappa^4 + 3\kappa^2 - 2 \right\} \\ & + \frac{\lambda^3}{10\kappa^6} \left(\frac{\sqrt{gh}}{c} \right) \\ & \times \left[5 \left(\frac{E}{K} \right)^2 \left\{ 9 \left(\frac{E}{K} \right) + 10\kappa^2 - 17 \right\} \right. \\ & \left. + \left(\frac{E}{K} \right) (12\kappa^4 - 57\kappa^2 + 47) - 6\kappa^4 + 13\kappa^2 - 7 \right] \\ & + \frac{\lambda^3}{15\kappa^6} \left(\frac{\sqrt{gh}}{c} \right)^2 \left[15 \left(\frac{E}{K} \right)^2 \left\{ \left(\frac{E}{K} \right) + \kappa^2 - 2 \right\} \right. \\ & \left. + \left(\frac{E}{K} \right) (4\kappa^4 - 19\kappa^2 + 19) - 2(\kappa^4 - 3\kappa^2 + 2) \right] \quad (9) \end{aligned}$$

で表わされ、また Euler 座標では次式となる。

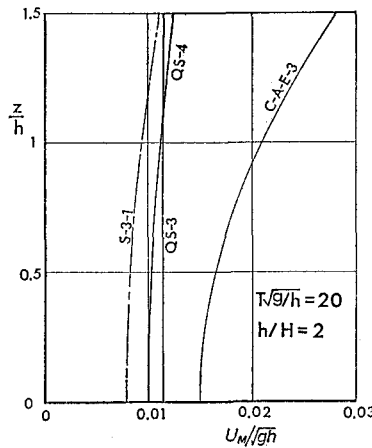
$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = & \frac{\lambda^2}{6\kappa^4} \left[- \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + 2\kappa^2 - 4 \right\} + \kappa^2 - 1 \right] \\ & + \frac{\lambda^3}{20\kappa^6} \left[35 \left(\frac{E}{K} \right)^2 \left(\frac{E}{K} + \kappa^2 - 2 \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{E}{K} \right) (6\kappa^4 - 41\kappa^2 + 41) - 3(\kappa^4 - 3\kappa^2 + 2) \right] \quad (10) \end{aligned}$$

ここに、

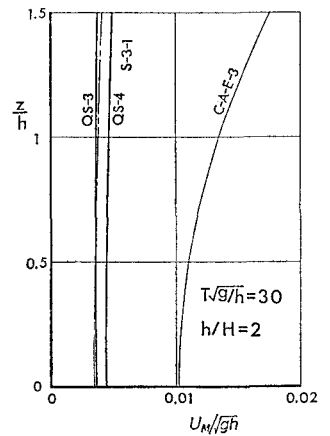
$$\begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{gh}} = & 1 - \frac{\lambda}{2\kappa^2} \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + \kappa^2 - 2 \right\} \\ & + \frac{\lambda^2}{40\kappa^4} \left[45 \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + 2\kappa^2 - 4 \right\} \right. \\ & \left. + 19\kappa^4 - 64(\kappa^2 - 1) \right] \quad (11) \end{aligned}$$



(a)



(b)



(c)

図-2 Lagrange 座標での質量輸送速度の鉛直分布

E および K はそれぞれ第1および第2種完全だ円積分, κ はその母数であり, λ は近似的に次式で与えられる,

$$\frac{H}{h} = \lambda + \frac{27}{4096\pi^4} \lambda^3 \dots\dots\dots (12)$$

式(6)および(10)によれば Euler 座標でも質量輸送が存在し, その分布は一樣となる. 一方, Lagrange 座標における質量輸送速度の鉛直分布は図-2のようになる. 図中 QS-3 および QS-4 は, それぞれ擬 Stokes 波理論の第3および第4近似解を示し, S-3-1 は式(1)であり, また C-A-E-3 は式(9)によるクノイド波の質量輸送速度である. この図から, $T\sqrt{g/h}$ の値が小さい場合には擬 Stokes 波の質量輸送の鉛直分布は従来の Stokes 波のそれにほぼ一致し, 波の進行方向に進むことになる. そして, $T\sqrt{g/h} = 10$ 付近ではクノイド波の場合とほぼ同じ分布となる. しかし, その値がさらに大きくなるとクノイド波理論の質量輸送速度は Stokes 波および擬 Stokes 波のそれよりも大きくなることがわかる.

3. 質量輸送に関する実験

(1) 波浪水槽に関する考察

定形進行波の輸送現象に関する実験を行うためには, 次に示す条件を満足する波浪水槽を用いることが必須である. まず, 波形, 波速, 水粒子速度および質量輸送速度に対して一様性および定常性が保たれ, かつ反射波による二次的じょう乱がないことである. これらの要請に対して, 従来この種の実験では, 造波直後の数波を除いた十分一様な規則波とみなせる波を対象としてきた. しかし, 実験によれば, 先導波による質量輸送や水槽内の副振動の影響のため, この領域においては波速および質量輸送速度の一様性および定常性は満たされない¹⁰⁾. そのうえ, 両端部を有する有限長の通常の波浪水槽では, 定常状態においても波動運動に対して Stokes の波速の第2定義に近い条件を必然的に与えることになる. 以上のことから, 著者らは定形進行波の輸送現象を解明するために, 新しい波浪水槽を2通り提案し, それらの特性について検討してきた¹⁰⁾. ここでは, その1つである二重床式波浪水槽を用いて質量輸送に関する実験を行うことにした.

(2) 実験水槽および方法

実験に用いた波浪水槽は, 図-3 に示すように, 上段には定形進行波の伝播する波水路部と, 下段にはそれに伴って輸送された質量を自然に循環させるための質量補給用暗きょ部 (30 cm × 50 cm) とから構成されており, それらは波の進行を乱さないことを配慮して側壁に設けられた補給口 (上段部: 1 × 170 cm, 下段部: 4.5 × 170

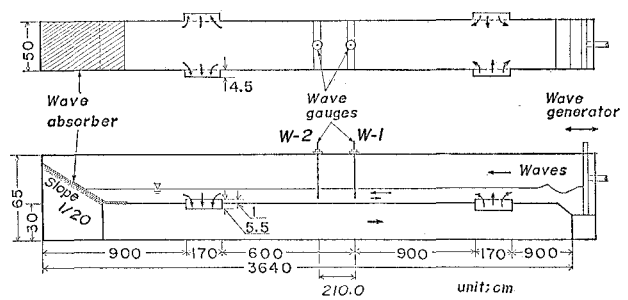


図-3 波浪水槽の概略図

cm) によって連続されている. また, 水槽下流端の消波装置はステラシートとパンチドメタルよりなる勾配 1/20 の斜面で, 反射率をほぼ 5% 以下に抑えられるようにしてある. 質量輸送速度の鉛直分布の測定は, 図-3 に示す 2 台の波高計 (W-1, W-2) の中央部で, ニトロベンゼン (比重 1.20) とキシレン (0.87) を混合し蛍光塗料で着色した中立粒子の運動を波の 10 周期程度の時間, 35 mm スティルカメラで開放撮影して解析した. 一方, 波形, 波高および波速は, 210.0 cm 離れた 2 台の容量式波高計で計測した.

(3) 質量輸送の実験結果および理論との比較

前述の方法により測定した波高および波速の時間的変化の 1 例を図-4 に示す. これから明らかなように, 波高および波速に関しては, 造波開始後 5 min ですでに定常状態に達しているのて, 以下波の特性に関する理論結果との比較では, この状態の波を

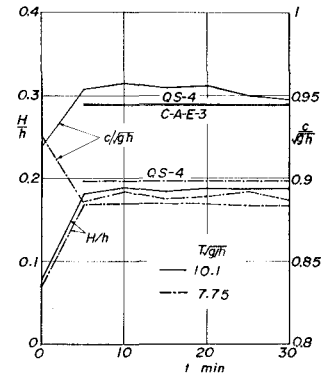


図-4 波高および波速の時間的変化

対象とする. 次に, 波速の実験結果と著者らの理論曲線とを比較したものは図-5 であるが, 両者がきわめて良い一致を示すことがわかる. 一方, この定形進行波の実験における波形を理論波形と比較した結果の 1 例を図-6 に示す. 図中, 実線は理論波形で, 点線は実験波形であり, 縦軸の z' は平均水面からの水面変

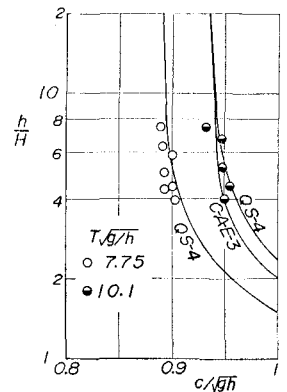


図-5 波速の実験結果と理論曲線との比較

動を示し、さらに W-1 および W-2 は 図-2 に設置位置を示した波高計によって計測されたものであることを意味する。これらの図から、波高計の間隔 210.0 cm の 2 点における波形は、定形でかつ理論とよく一致していることから、波の一樣性を確かめることができよう。

以上のように、波高、波速および波形に対してその定

常性および一樣性が保たれている場合について質量輸送速度の鉛直分布を測定した結果を 図-7, 8 および 9 に示す。ただし、図中には実験開始からの経過時間ごとに実験値を示してある。これから実験値はかなり散乱し、定常状態に達するまでの鉛直分布を明確にすることはできないが、若干分布特性が変わる場合もある。また、こ

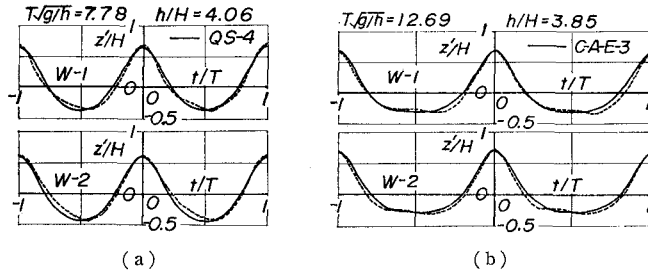


図-6 実験波形と理論波形との比較

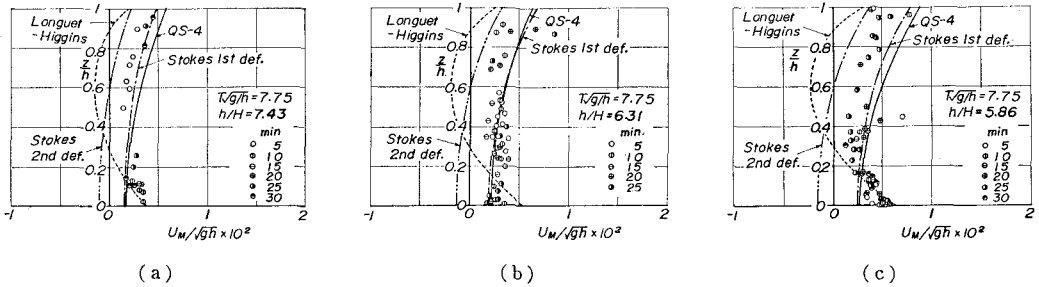


図-7 質量輸送速度の鉛直分布 (1)

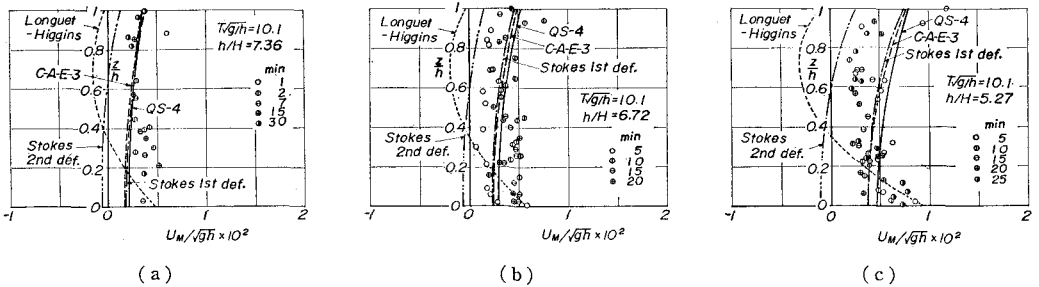


図-8 質量輸送速度の鉛直分布 (2)

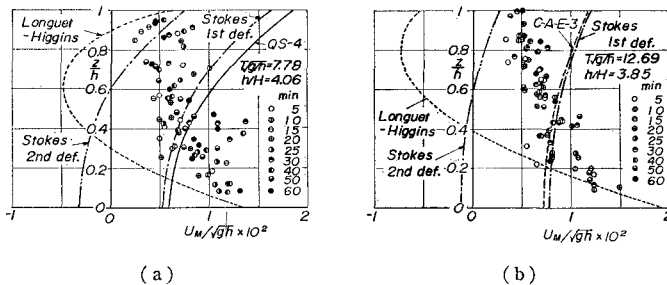


図-9 質量流束の大きい場合の質量輸送速度の鉛直分布

の測定法によると、水底近傍においては中立粒子が底面に付着することもある、その実験値は若干小さく出ているものと考えられる。図-7 および 8 は、それぞれ同一の周期で波高を変えた場合であり、両方とも波高の小さい場合は従来の Stokes 波および擬 Stokes 波理論による理論曲線と良く一致するが、波高の増大に伴って質量輸送速度の実験値は理論値に比べて水面付近で若干小さく水底で大きくなる傾向を示す。さらに、図-9 には、図-6 に示した波形の場合の質量輸送速度の鉛直分布を示すが、その分布形は理論曲線とかなり相違する。その理由としてつぎのことが考えられる。前述したように、波水路部の水深は約 10 cm であり、質量補給用暗きょ部の高さは 30 cm であるので、もし波の質量輸送に伴う水量がこれら両方の断面を一樣にもどるものとすれば、全質量輸送量の実験値は理論値の約 75% 程度になるものと思われる。一方、質量補給口は波にできるだけじょう乱を与えないために前述した大きさにしてあるので、波高が大きくなって全質量輸送量が増すとこの補給口の影響が現われ、また上流側の補給口からの流入の影響が残り、これが質量輸送速度の鉛直分布を変化させるものと想像されるが、これはこの水槽の限界ともいえる。いま 1 つは Longuet-Higgins の示した質量輸送に及ぼす粘性効果であり、さらに付加的にはわずかな反射波によるじょう乱も加わるであろう。しかしながら、これらの影響が比較的少ないすなわち全質量輸送量が大きくない場合の実験結果から、つぎのことが結論されるであろう。すなわち、定形進行波による質量輸送速度は全断面にわたり波の進行方向であり、その鉛直分布は波速の第 1 定義による従来の Stokes 波理論や著者らの提案した擬 Stokes 波およびクノイド波理論による結果とかなりよく一致する。しかし、より詳細に比較検討するためには、広範囲な波の特性について実験すべきであることはいうまでもない。

4. 結 語

以上、定形進行波の質量輸送の理論的表示について考察するとともに、この種の定形進行波の実験のためによく試作した波浪水槽を用いて質量輸送に関する実験を行って理論結果と比較した。その結果、定形進行波による質量輸送速度は全断面にわたって波の進行方向であり、Stokes の波速の第 1 定義による従来の Stokes 波理論や著者らの擬 Stokes 波およびクノイド波理論による表示とかなりよく一致することがわかった。

参 考 文 献

- 1) Stokes, G. G.: On the theory of oscillatory waves, Trans. Cambridge Phil. Soc., Vol. 8, pp. 441~455, 1847.
- 2) 山田彦児: Stokes 波の質量輸送, 九州大学応用力学研究所報, 第 15 号, pp. 39~49, 1960.
- 3) Le Méhauté, B.: Mass transport in cnoidal waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 73, No. 18, pp. 5973~5979, 1968.
- 4) Longuet-Higgins, M. S.: Mass transport in water waves, Phill. Trans. Roy. Soc. London, Series A, Vol. 245, No. 903, pp. 535~581, 1953.
- 5) Huang, N. E.: Mass transport induced by wave motion, Jour. Marine Res., Vol. 28, No. 1, pp. 35~50, 1970.
- 6) Li, A. and S. H. Davis: Viscous attenuation of mean drift in water waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 81, part 1, pp. 63~84, 1977.
- 7) Ünlüata, Ü. and C. C. Mei: Mass transport in water waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 75, No. 36, pp. 7611~7618, 1970.
- 8) 土屋義人・安田孝志: 減速せつ動法による擬 Stokes 波理論, 第 25 回海講演文集, pp. 6~9, 1978.
- 9) 土屋義人・安田孝志: 新しいクノイド波の試み, 第 21 回海講演文集, pp. 65~71, 1974.
- 10) 土屋義人・安田孝志・山下隆男: 新しい波浪水槽について, 第 25 回海講演文集, pp. 51~54, 1978.