

ハイパボリック波の表現式の再検討

岩 垣 雄 一*・塩 田 啓 介**

1. 結 言

著者の1人によって提案されたハイパボリック波は、クノイド波の水理特性を表わす各式を、ある条件の下で Jacobi の楕円関数やその母数、あるいは第1種および第2種の完全楕円積分を含まない初等関数によって近似表現したものであり¹⁾、これを用いると、クノイド波理論の近似値を容易に算出することができる。従来のハイパボリック波の理論式は、Laitone²⁾ のクノイド波理論の第2近似解より誘導したものであるが、これによって実際に計算を行う場合、ときどき不都合なことが起こることがわかった。例えば、最高波の条件として、波の峰での水平方向水粒子速度が波速に等しいという Rankine-Stokes の条件を用いて波高水深比 H/h の値を求めると、Laitone のクノイド波理論そのものを用いても、一般にいわれている値よりかなり小さく、砕波付近の水粒子速度に関しては、その適用に問題があることがわかった³⁾。したがって、Laitone のクノイド波理論から誘導されたハイパボリック波の式にも砕波点近傍での適用性に疑問があった。また従来のハイパボリック波は、Laitone のクノイド波理論における谷からの水深 h_t を平均水深 h に変換する際に第1近似式を用いており、かつ式中に H/h の3次の項が含まれていることもあって再検討する必要にせまられていた。一方、Laitone はその後この水深変換の際に第2近似式を用いて計算し、水深として平均水深 h で表現したクノイド波の第2近似式を示していることがわかった⁴⁾。本研究では、Laitone によって後に示されたクノイド波理論の第2近似解に基づいて、新しいハイパボリック波の表現式を誘導し、従来のハイパボリック波と比較するとともに、さらに Chappellear⁵⁾ が Laitone と同様な摂動法によって求めたクノイド波の第2近似解からハイパボリック波の理論式を誘導し、Laitone のそれと比較する。

2. 新しいハイパボリック波の表現式

座標系を 図-1 のようにとると、Laitone および Chap-

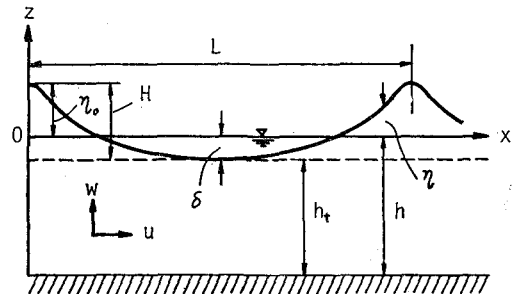


図-1 座 標 系

pelear のクノイド波理論の第2近似解より新しく誘導したハイパボリック波の表現式は、それぞれ次のようになる。

(1) Laitone のクノイド波理論⁴⁾より導いたハイパボリック波の表現式

a) 静水面の位置*)

$$\frac{\delta}{H} = \frac{1}{K} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \frac{H}{h} - \frac{1}{4} \frac{1}{K} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (1)$$

b) 波 形

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{h} = & \left(\operatorname{sech}^2 v - \frac{1}{K} \right) \frac{H}{h} \\ & + \left(-\frac{3}{4} \operatorname{sech}^2 v + \frac{3}{4} \operatorname{sech}^4 v + \frac{1}{4} \frac{1}{K} \right) \left(\frac{H}{h} \right)^2 \\ & \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

c) 波 速

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{gh}} = & 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \right) \frac{H}{h} \\ & + \left\{ -\frac{3}{20} + \frac{1}{8} \frac{1}{K} + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{K} \right)^2 \right\} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \\ & \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

d) 波 長

$$\frac{L}{h} = \frac{4K}{\sqrt{3(H/h)}} \left\{ 1 + \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{2} \frac{1}{K} \right) \frac{H}{h} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

e) 水粒子速度

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \left(\operatorname{sech}^2 v - \frac{1}{K} \right) \frac{H}{h}$$

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

** 学生会員 京都大学大学院工学研究科

*) Laitone の原論文 2) および 4) が間違っているのに注意

$$+ \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{K} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{K} \operatorname{sech}^2 v \right. \\ \left. - \left[\frac{5}{4} + \frac{3}{2} \left\{ 2 \frac{z_t}{h} + \left(\frac{z_t}{h} \right)^2 \right\} \right] \operatorname{sech}^2 v \right. \\ \left. + \left[\frac{5}{4} + \frac{9}{4} \left\{ 2 \frac{z_t}{h} + \left(\frac{z_t}{h} \right)^2 \right\} \right] \operatorname{sech}^4 v \right] \\ \times \left(\frac{H}{h} \right)^2 \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{w}{\sqrt{gh}} = \left(1 + \frac{z_t}{h} \right) \sqrt{3 \left(\frac{H}{h} \right)^3} \tanh v \\ \times \operatorname{sech}^2 v \left[1 + \left[-\frac{7}{8} + \frac{5}{2} \frac{1}{K} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{z_t}{h} + \left(\frac{z_t}{h} \right)^2 \right\} - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 v \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{2} \left\{ 2 \frac{z_t}{h} + \left(\frac{z_t}{h} \right)^2 \right\} \operatorname{sech}^2 v \right] \frac{H}{h} \right] \\ \dots\dots\dots (6)$$

f) 圧 力

$$\frac{p}{\rho gh} = \left(\operatorname{sech}^2 v - \frac{1}{K} \right) \frac{H}{h} \\ + \left(-\frac{3}{4} \operatorname{sech}^2 v + \frac{3}{4} \operatorname{sech}^4 v + \frac{1}{4} \frac{1}{K} \right) \\ \times \left(\frac{H}{h} \right)^2 - \frac{3}{4} \left\{ 2 \frac{z_t}{h} + \left(\frac{z_t}{h} \right)^2 \right\} \\ \times (2 \operatorname{sech}^2 v - 3 \operatorname{sech}^4 v) \left(\frac{H}{h} \right)^2 - \frac{z}{h} \\ \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $v = 2K(x - ct)/L$ であり、 K は第1種完全楕円積分である。 z_t は波の谷からの鉛直座標であり、静水面からの鉛直座標との関係は次式で示される。

$$\frac{z_t}{h} = \frac{z}{h} + \frac{1}{K} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{H}{h} \right) \frac{H}{h} \dots\dots\dots (8)$$

つぎに、第1種完全楕円積分 K の値は (3) と (4) 式から H/h と $T\sqrt{g/h}$ の関数として求められるが、この関係を次式で近似することができる。

$$K = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{H}{h} \right)^{0.5} T\sqrt{g/h} \left\{ 1 - 0.168 \left(\frac{H}{h} \right)^{1.124} \right\} \\ \dots\dots\dots (9)$$

その場合の (9) 式による近似誤差は 1% 以内である。

(2) Chappellear のクノイド波理論より導いたハイパボリック波の表現式

a) 波 形

$$\frac{\eta}{h} = 2L_0 + 2L_3 - L_0 \tanh^2 v + \frac{141}{20} L_0^3 + 12L_0L_3 + L_3^3 \\ - (5L_0^2 + 6L_0L_3) \tanh^2 v + \frac{3}{4} L_0^2 \tanh^4 v \\ \dots\dots\dots (10)$$

b) 波 速

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 + L_3$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{K} \right) \left\{ L_0 + \left(3 - \frac{1}{K} \right) L_0^3 + 5L_0L_3 \right\} \\ \dots\dots\dots (11)$$

c) 波 長

$$\frac{L}{h} = \frac{4K}{\sqrt{3}L_0} \dots\dots\dots (12)$$

d) 水粒子速度

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = L_0 \left(1 - \frac{1}{K} \right) - L_0 \tanh^2 v \\ + L_0^3 \left\{ \frac{15}{4} - 4 \frac{1}{K} + \left(\frac{1}{K} \right)^2 \right\} \\ + 5L_0L_3 \left(1 - \frac{1}{K} \right) - 5(L_0^2 + L_0L_3) \tanh^2 v \\ + \frac{5}{4} L_0^3 \tanh^4 v + \left\{ 2 \frac{z}{h} + \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} L_0^3 \\ \times \left(\frac{3}{4} - 3 \tanh^2 v + \frac{9}{4} \tanh^4 v \right) \\ \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{w}{\sqrt{gh}} = \left(1 + \frac{z}{h} \right) \frac{3}{\sqrt{3}L_0} L_0^2 \tanh v \operatorname{sech}^2 v \\ \dots\dots\dots (14)$$

e) 圧 力

$$\frac{p}{\rho gh} = 2L_0 + 2L_3 - L_0 \tanh^2 v + \frac{141}{20} L_0^3 \\ + 12L_0L_3 + L_3^2 - (5L_0 + 6L_0L_3) \tanh^2 v \\ + \frac{3}{4} L_0^2 \tanh^4 v + \left\{ 2 \frac{z}{h} + \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} L_0^3 \\ \times \left(\frac{3}{4} - 3 \tanh^2 v + \frac{9}{4} \tanh^4 v \right) - \frac{z}{h} \\ \dots\dots\dots (15)$$

ただし、波速については Laitone のクノイド波理論と同様に、Stokes の第2定義を採用した。

なお、 L_0 および L_3 に関する式は次のようである。

$$\frac{H}{h} = L_0 \left(1 + \frac{17}{4} L_0 + 6L_3 \right) \dots\dots\dots (16)$$

$$L_0 \left(1 + \frac{1}{K} \right) + 2L_3 + L_0^3 \left(\frac{14}{5} + 4 \frac{1}{K} \right) \\ + 6L_0L_3 \left(1 + \frac{1}{K} \right) + L_3^3 = 0 \dots\dots\dots (17)$$

この両式から K と H/h を与えて L_0 と L_3 を求め、それらを (10)~(15) 式に代入して各種の波の特性を算出するわけであるが、(16)、(17) の両式から L_0 と L_3 の厳密解を求めることはかなり面倒である。そこで L_0 と L_3 を表現する近似式を考える。いまこれを次式のように表わす。

$$L_3 = -0.5 \frac{H}{h} + 0.21 \left(\frac{H}{h} \right)^{1.59} - 0.33 \frac{1}{K} \left(\frac{H}{h} \right)^{0.85} \\ \dots\dots\dots (18)$$

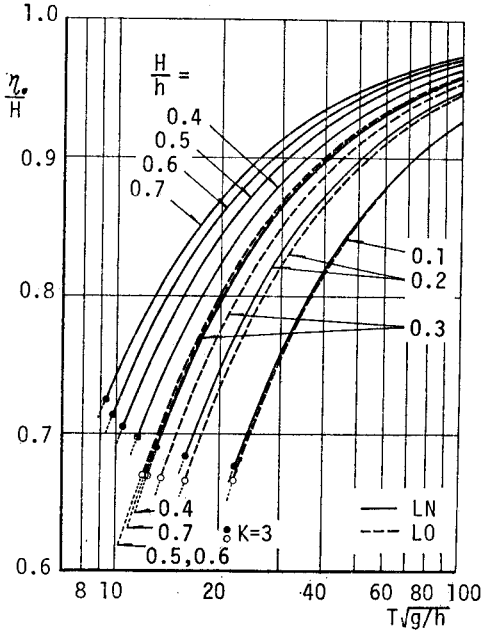
$$L_0 = \frac{2}{17} \left\{ -(1 + 6L_3) + \sqrt{(1 + 6L_3)^2 + 17(H/h)} \right\} \\ \dots\dots\dots (19)$$

ただし、(19) 式は (16) 式を変形したものであって近似式ではない。厳密解に対する (18) および (19) 式による近似誤差は、 L_0 について 1% 程度以内、 L_s について 2% 程度以内である。この近似式を用いた水理特性の計算値においては、波速および水粒子速度については 1% 程度以内、波の峰高については 2% 程度の誤差となる。したがって、後述の波の峰高の計算においては、

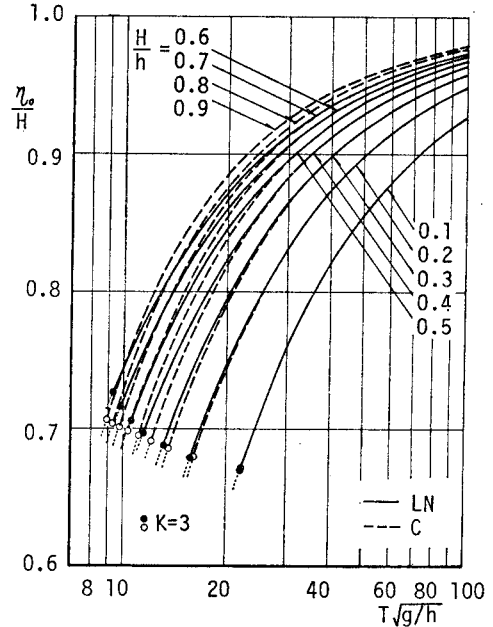
(16) および (17) 式を用いることにする。

つぎに、第 1 種完全楕円積分 K は Laitone のときの (9) 式に対して、この場合次式で近似することができる。

$$K = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{H}{h} \right)^{0.5} T \sqrt{g/h} \left\{ 1 + 0.106 \left(\frac{H}{h} \right)^{2.25} \right\} - 1.09 \left(\frac{H}{h} \right)^{1.24} \quad \dots\dots\dots (20)$$

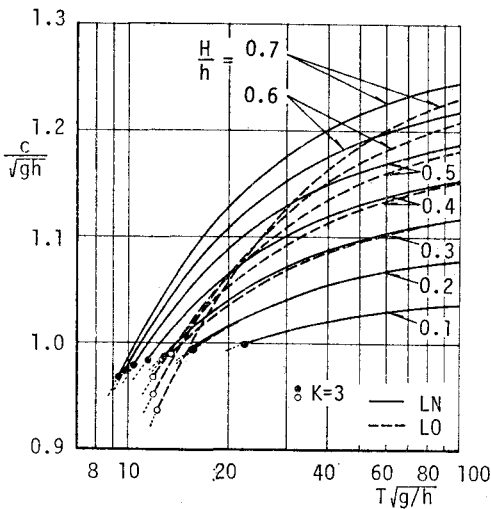


(a)

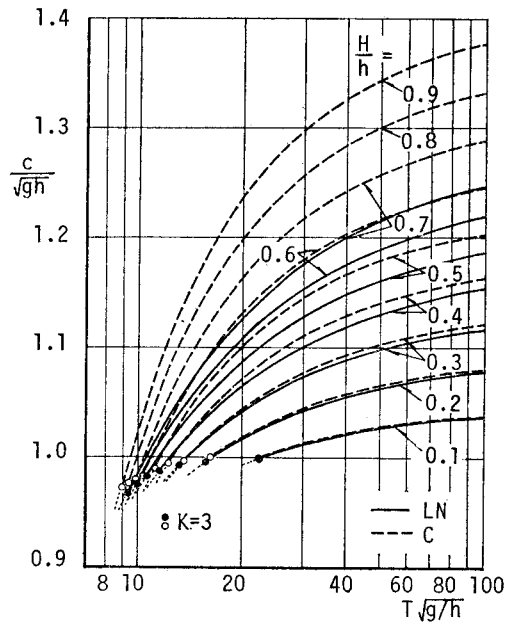


(b)

図—2 波の峰高の理論曲線の比較



(a)



(b)

図—3 波速の理論曲線の比較

(20) 式による近似誤差は, $H/h \leq 0.5$ において 1% 程度以内, $H/h > 0.5$ において 2% 程度以内である.

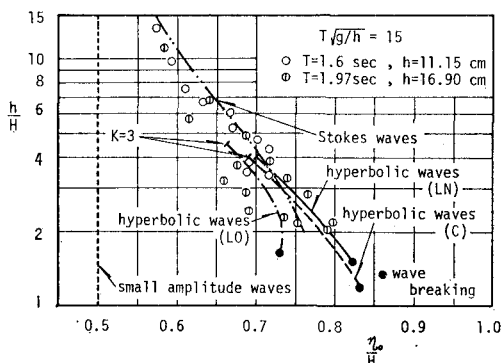
3. ハイパボリック波の理論曲線の比較

図-2(a), (b) および 図-3(a), (b) はそれぞれ波の峰高および波速を, $T\sqrt{g/h}$ および H/h をパラメーターにとって示したものである. 記号 LO, LN および C はそれぞれ, Laitone のクノイド波理論にもとづく従来のハイパボリック波と新しいハイパボリック波((1)~(9) 式) および Chappellear のクノイド波理論にもとづくハイパボリック波((10)~(20) 式)を示す. それぞれの理論曲線を比較すると次のことがいえる. まず波の峰高においては, LO と LN の曲線は H/h が小さいときは一致するが, H/h が增大すると離れる. しかし, 4% 程度の誤差を許せば $H/h=0.3$ までは従来の式でも適用可能である. LN による値は H/h の増加とともに増大するが, LO による値は $H/h=0.5$ 程度で最大値をとる. また $T\sqrt{g/h}$ が増大すると LN による曲線と C による曲線は接近し一致するようになる. 波速においては, LO と LN による値は峰高の場合と同様な傾

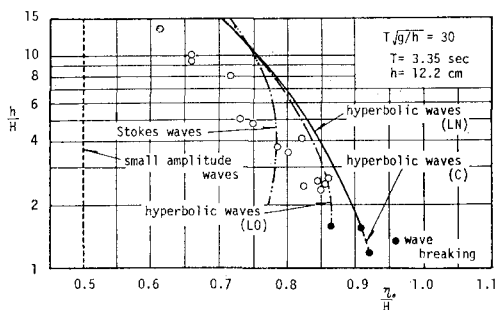
向を示し, 2% 程度の差を許すとすれば $H/h=0.4$ までは LO の適用が可能である. また C による曲線は LN による曲線より大きな値をとり, その差は H/h および $T\sqrt{g/h}$ が大きくなるほど増大し, $H/h=0.7$ においては 3% 程度の差となる.

4. 各理論曲線と従来の実験値の比較

図-4(a), (b), 図-5(a), (b) および 図-6(a), (b) はそれぞれ波の峰高, 波速および波の峰の位置における水平方向水粒子速度の鉛直分布について, 岩垣ら^{6),7),8)}が行った実験結果を点描し, それぞれのハイパボリック波理論と微小振幅波理論および第3次のストークス波理論の曲線を比較した例である. 波の峰高については, LN と C による曲線はほぼ同じような値をとり, $T\sqrt{g/h}=15$ の場合では実験値ともよく一致している. LO による曲線は h/H が小さくなると LN や C の曲線とも離れて小さな値をとるようになる. 波速では, $h/H=2$ 以下になると LO による曲線が他のハイパボリック波理論による曲線から大きく離れてくる. ただし $T\sqrt{g/h}=15$ の場合には LO による曲線の方が実験値に

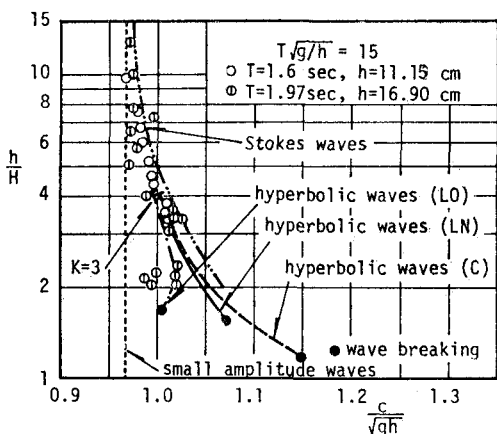


(a)

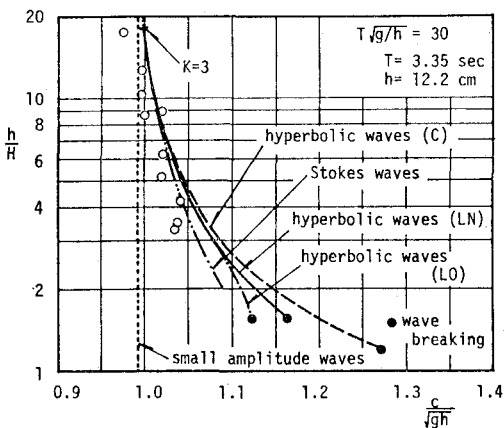


(b)

図-4 波の峰高についての理論曲線と実験値の比較

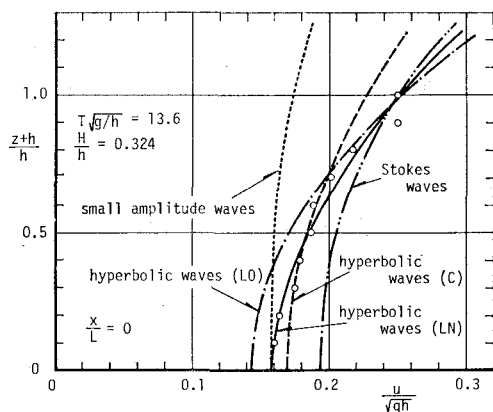


(a)

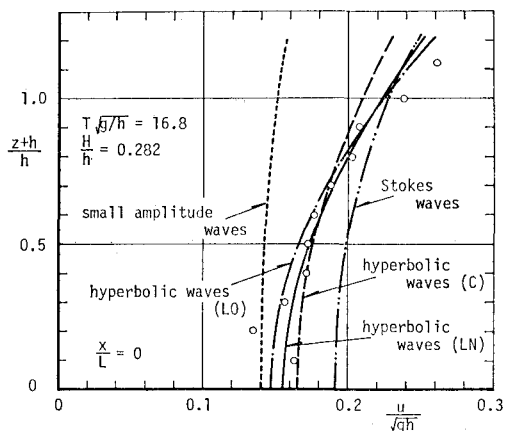


(b)

図-5 波速についての理論曲線と実験値の比較



(a)



(b)

図-6 水平方向水粒子速度の鉛直分布についての理論曲線と実験値の比較

近いが、 $T\sqrt{g/h}=30$ の場合も含めて実験値が少ないので明確ではない。つぎに水平方向水粒子速度の鉛直分布については、LN による曲線が実験値と最もよく一致している。これに対して C による曲線は水面近くでは実験値よりかなり小さな値をとっており、Laitone と Chappellear によるクノイド波理論式の相違が顕著に現われている。

5. 結 論

(1) 従来のハイパボリック波は H/h が大きくなって 0.4 程度以上になると、その理論曲線の傾向がかなり異なってくる。

(2) 従来のハイパボリック波と Laitone のクノイド波理論から新しく導いたハイパボリック波の表現式との差は H/h の増大とともに大きくなる。この性質は $T\sqrt{g/h}$ の値が小さいほど顕著に現われる。 $H/h=0.3$ の場合の両者の差は、波の峰高では最大約 4%、波速では約 1%、水粒子速度では約 4% である。したがって、 $H/h \leq 0.3$ の場合には従来の表現式を用いてよい。

(3) 従来のハイパボリック波はとくに $H/h \geq 0.4$ においてその適用性に問題がある。したがって、(2) の結論を考えれば、 $H/h > 0.3$ に対しては Laitone のクノイド波理論の近似値計算として、新しいハイパボリック波の表現式を用いるべきである。

(4) Laitone のクノイド波理論にもとづく新しいハイ

パボリック波と Chappellear にもとづくそれとの相違は、水平方向水粒子速度の鉛直分布において最も顕著に現われ、実験値と比較すると前者の方がよく一致している。

(5) 砕破点近傍における両クノイド波理論の適用性については、もっと多くの実験値と比較して検討する必要がある。

参 考 文 献

- 1) 岩垣雄一：クノイド波に関する研究(第4報)—hyperbolic waves について (1)一，京大防災研究所年報，第10号 B，pp. 283~294，1967。
- 2) Laitone, E. V.: The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 9, pp. 430~444, 1961。
- 3) 岩垣雄一・酒井哲郎：クノイド波に関する研究(第9報)—砕波近傍におけるクノイド波理論の適用性一，京大防災研究所年報，第14号 B，pp. 327~345，1971。
- 4) Laitone, E. V.: Series Solutions for Shallow Water Waves, Jour. of Geophys. Res., Vol. 70, No. 4, pp. 995~998, 1965。
- 5) Chappellear, J. E.: Shallow-Water Waves, Jour. of Geophys. Res., Vol. 67, No. 12, pp. 4693~4704, 1962。
- 6) 岩垣雄一・細見昌彦：クノイド波に関する研究(第3報)—波形，波速および波長に関する実験一，京大防災研究所年報，第9号，pp. 637~645，1966。
- 7) 岩垣雄一・山口正隆：クノイド波に関する研究(第6報)—クノイド波理論の適用限界について一，京大防災研究所年報，第11号 B，pp. 477~502，1968。
- 8) 岩垣雄一・酒井哲郎：クノイド波に関する研究(第8報)—水平方向水粒子速度に関する実験一，京大防災研究所年報，第13号 B，pp. 373~389，1970。