

長い波に重なった短い波の振幅変化 (第2報)

佐藤道郎*, 中村和夫**, 宇田 隆***

1. 序

波長の長い波の表面を伝播する波長の短い波の振幅の変化について、第24回海岸工学講演会で Longuet-Higgins と Stewart (1960)¹⁾ の理論に関し、特に後のいくつかの研究の基礎となっている近似的表現について、問題点を示すとともに実験結果に基づいて検討した²⁾。そのときの結論は、摂動解ならびにその近似的表現ともに実験結果とは一致しないというものであった。その理由について、その後理論的にも検討してみたが、あまりはっきりさせることができなかった。一方、先の報告（以下〔1〕とする）の実験結果は、長い波と短い波の重なった波形から短い波の波形を求めるのに電気フィルターを用いたものであった。フィルターを用いるについては、フィルターの特性上あまり影響を受けないような場合について実験を行ったつもりであったが、データ処理上の問題という可能性も再検討の必要性が考えられた。そこで、再度実験を行い、短い波を分離するにあたっては、電気フィルターを用いずに、周波数分析をして短い波の成分と考えられる成分のフーリエ再合成によって短い波の波形を求めるという方法で処理を行って、その結果に基づいて再検討することとした。

本報告はその実験結果について述べたものである。再実験の結果、Longuet-Higgins と Stewart の摂動解（以下では「厳密解」と呼ぶ）は実験結果と合うことが明らかとなった。そして、〔1〕における理論と実験結果の不一致は、基本的には著者らが理論において短い波の振幅 a_1 として表わされているものに対して、長い波と重なる前の短い波が単独で存在しているときの振幅をとったことに起因するものであった。すなわち、重なる前と後では a_1 が異なったものになるという点を見逃していたことによるものである。

また、Longuet-Higgins と Stewart が結論的に与えている近似的表現（以下「近似解」と呼ぶ）では実際の現象の正しい表現になっていないことがはっきりしてきた

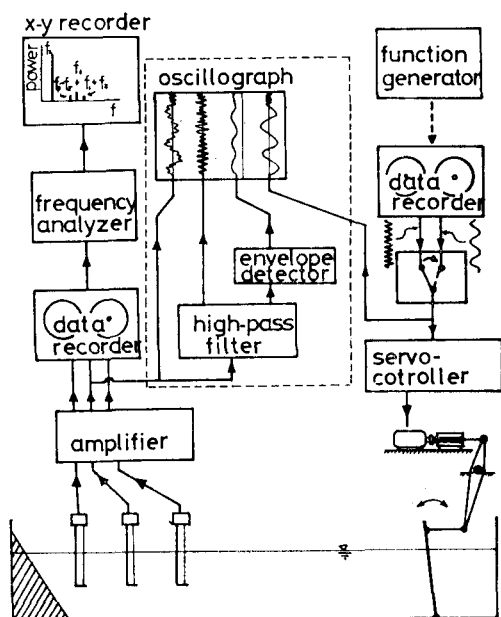
が、この点についても簡単な考察を加える。さらに、高次の相互作用によって生じた成分まで短い波の成分として考えた場合には、短い波の変調波形は複雑な様相を呈し、短い波は振幅変調のみならず、角度変調を受け周波数に変化するようになることが実験例によって示される。

2. 実験方法

実験装置ならびに短い波と長い波を重ねる方法については〔1〕と同じで、長さ 30 m の水路で短い波を先に走らせておき、長い波を後から追いかけて重ねた。

重なった波形から短い波を分離するには、周波数分析器（三栄測器製，シグナルプロセッサ）を用いて，短い波の基本周波数成分と，短い波ならびに長い波の周波数の和および差の周波数をもつ成分を取り出して，それから短い波の波形の再合成を行った。

実験方法の概要は図—1に示した。図中点線で囲まれた部分が〔1〕で採られた方法である。実験波は〔1〕と同様である。



圖—1 實驗方法

* 正会員 工博 鹿児島大学助教授 工学部海洋土木開発工学科

正会員 鹿児島大学技官 工学部海洋土木開発工学科

*** 鹿兒島県庁

3. 実験結果および考察

(1) 摂動解に関する検討

長い波と短い波の重なった波形をフーリエ変換し、パワーを求めたものの一例を図-2に示す。この実験データの処理に用いた周波数分析器のプログラムは内部的には信号のフーリエ変換と、逆変換によって任意の周波数帯の成分による波形の再合成を行うものであるが、外部に表示するのは各成分のパワーの相対的な分布と波形の

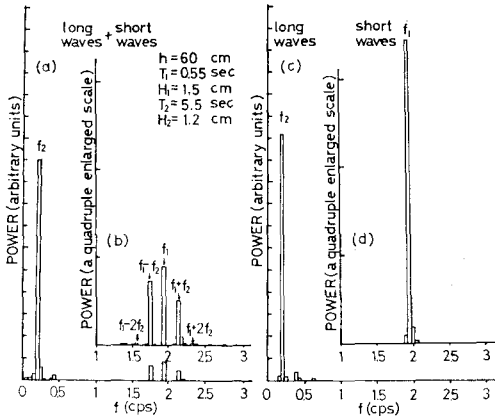


図-2 実験波のスペクトルの例

みである。素性の知れた信号をもとに絶対値を求めることも可能ではあるが、本研究においては絶対値そのものはあまり必要でもないで求めていない。したがって、図中の縦軸は絶対値の目盛りではない。図-2で、(a)で示されたのは長い波と短い波が重なったときの波形のスペクトルであり、(b)は短い波の成分のあたりを縦軸を4倍に拡大したものである。(c)は長い波だけの場合、(d)は短い波だけのものである。(d)については(b)と同様に縦軸を4倍に拡大してある。 f_1 , f_2 はそれぞれ短い波と長い波の基本周波数である。(a)あるいは(b)に現われている $f_1 \pm f_2$, $f_1 \pm 2f_2$ の成分は、(c), (d)に現われていないことから明かなように長い波と短い波が共存することによって非線形相互干渉によって生じたものである。 $f_1 \pm f_2$ の成分については、Longuet-Higgins と Stewart は長い波の上での短い波の振幅変化の計算における摂動解で、水位変化に対する寄与が次式で表わされることを示した。

$$\zeta^{(2)} = \frac{1}{2g} a_1 a_2 [C \cos(\phi_1 - \phi_2) - D \cos(\phi_1 + \phi_2)] \quad \dots\dots\dots (1)$$

g は重力加速度、 a は振幅、 ϕ は位相を表わし、添字 1, 2 はそれぞれ短い波および長い波に関する量であることを意味する。また C, D は次式で示される。

$$C = \frac{[2\sigma_1\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)(1 + \alpha_1\alpha_2) - \sigma_1^3(\alpha_1^2 - 1) - \sigma_2^3(\alpha_2^2 - 1)](\sigma_1 - \sigma_2)(\alpha_1\alpha_2 - 1)}{\sigma_1^2(\alpha_1^2 - 1) - 2\sigma_1\sigma_2(\alpha_1\alpha_2 - 1) + \sigma_2^2(\alpha_2^2 - 1)} + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1\sigma_2(\alpha_1\alpha_2 + 1) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$D = \frac{[2\sigma_1\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)(1 - \alpha_1\alpha_2) - \sigma_1^3(\alpha_1^2 - 1) - \sigma_2^3(\alpha_2^2 - 1)](\sigma_1 + \sigma_2)(\alpha_1\alpha_2 + 1)}{\sigma_1^2(\alpha_1^2 - 1) - 2\sigma_1\sigma_2(\alpha_1\alpha_2 + 1) + \sigma_2^2(\alpha_2^2 - 1)} + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1\sigma_2(\alpha_1\alpha_2 - 1) \quad \dots\dots\dots (3)$$

σ は角周波数、 $\alpha = \coth kh$, k は波数、 h は水深である。この式の誘導にあたっては何ら長い波と短い波の干渉ということに基づく仮定もなく、一般的な波の非線形干渉に関する解である。したがって、例えば浜田⁹⁾による表面波の二次干渉に関する計算結果と同じもので、表現が若干異なっているものの少し変形すれば全く同一のものであることが確かめられる。

まず、図-2に示されるような実験結果に基づいて式(1)について検討した。 $a_1 a_2 C/2g$ を $a_{f_1 - f_2}$ と表わし、 $a_1 a_2 D/2g$ を $a_{f_1 + f_2}$ として、さらに a_1 を a_{f_1} で表わし、 $|a_{f_1 \pm f_2}/a_{f_1}|$ を実験結果と計算結果の比較を行った。結果は図-3に示す通りである。図-3(a)は波形勾配と相対水深を一定とし周波数比との関連を示したものである。図-3(b), (c)はそれぞれ、波形勾配および相対水深との関連で実験結果を示したものである。理論と実験値は良く一致していると見ることができ、二次干渉に関する式(1)の関係を裏付けている。

(2) 短い波の振幅変化について

短い波の線形解 $a_1 \sin \phi_1$ と式(1)を組合わせることにより、Longuet-Higgins と Stewart は、短い波が次で表わされることを示した。

$$\zeta = a_1(1 + P) \sin \phi_1 + a_1 Q \cos \phi_1 \quad \dots\dots\dots (4)$$

P, Q は式(1)から、次で与えられることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{a_2}{2g} (C + D) \sin \phi_2, \\ Q &= \frac{a_2}{2g} (C - D) \cos \phi_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

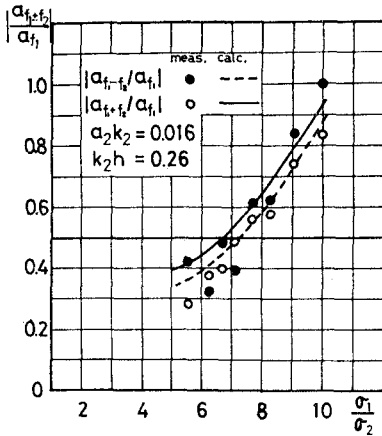
[1]で述べたように式(4)から長い波で変調された短い波の振幅は

$$a' = a_1 \sqrt{(1 + P)^2 + Q^2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

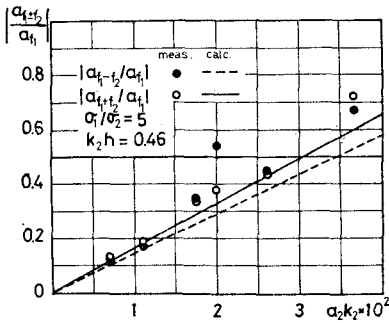
で与えられる。Longuet-Higgins と Stewart は、これをさらに簡単化して、次のように表わした。

$$a' = a_1(1 + P) \quad \dots\dots\dots (7)$$

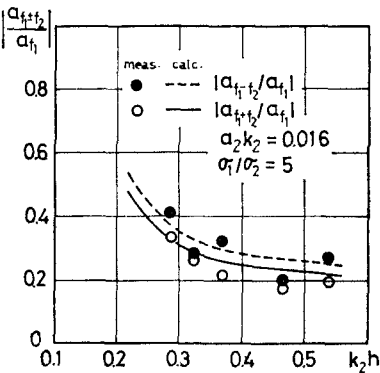
式(7)からは短い波の振幅は長い波の峰で増幅され、谷で小さくなるという変化が予想されるわけだが、[1]で示したように、式(6)からは、両者の波長がかなり異なる場合には Q が支配的になって、短い波は長い波の峰ではなく静水面を切る位相付近で増幅されることが予想される。そこで、この点について調べてみる。図-4は一つの実験例であり、上段に示された波形は重なったときのものであるが、この波形のスペクトル図の①で示した範囲の成分から波形を合成すると波形①が得



(a)



(b)



(c)

図-3 相互作用により生じた成分の振幅の実験値と理論値の比較

られる。②の範囲の成分から波形を合成すると波形②が得られ、短い波の振幅の変化がわかる。この図から、式(4)あるいは式(6)で予想されるようなものに近い変化はするものの、式(7)で予想されるものとは異なったものとなっていることは明らかである。図-5に、 f_1 , $f_1 \pm f_2$ の成分波ならびに、それらの合成されたものとしての短い波の波形の一例を示した。図-4、図-5から見られるように短い波は長い波の背面で最も増幅さ

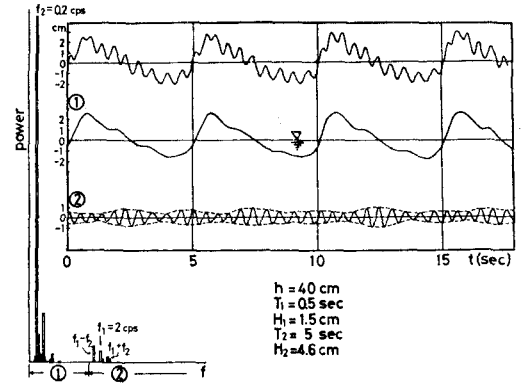


図-4 長い波と短い波の波形の分離

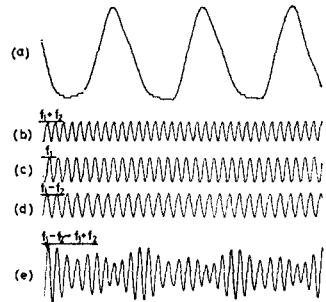
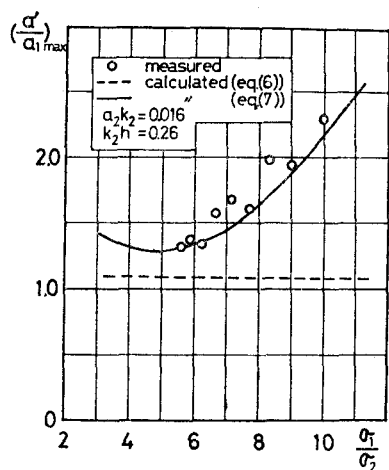


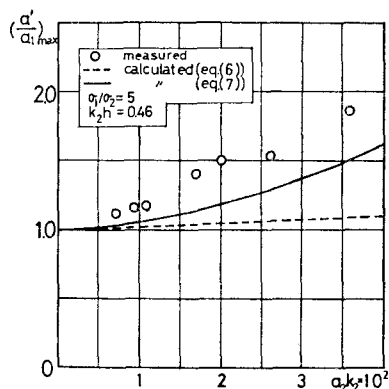
図-5 短い波の各成分の波形とその合成によって変調された波形

れ、前面でも増幅されており、また、長い波の峰付近で最も小さくなり、谷でも小さくなっている。図-5の(e)で示した $f_1 - f_2 \sim f_1 + f_2$ の合成波形の振幅を a' とし、(c)の f_1 成分の振幅を a_1 として $(a'/a_1)_{\max}$ を求め、式(6)ならびに式(7)と比べてみた。結果は図-6に示すように式(6)の関係とよく合うと考えてよいことがわかった。実験値と計算値の幾分のズレは実験誤差と考えられる。[1]では、式(6)とも一致しないという結論を出してしまったわけだが、それは、 a_1 として短い波が長い波と重ならず単独に存在しているときの波の振幅を考えてしまったところに原因があった。図-2からもわかるように、重なる前の f_1 成分の振幅と重なってから後の f_1 成分の振幅とはかなり異なったものとなって、後者はかなり小さくなる。そして、理論における a_1 というのは、重なった状態での f_1 成分波の振幅である。したがって、[1]における理論と実験結果の対比に関する記述は正しくないことを申し述べ、訂正させていただきたい。

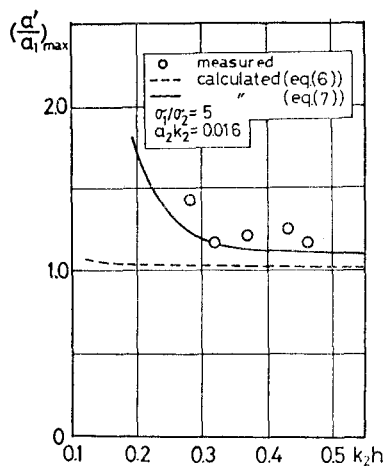
[1]における実験結果は、本来 H_1 なる波高を有する短い波の群に H_2 なる波高をもつ長い波が侵入してきた場合に短い波の波高がどんな変化をするかということを表わしており、これを理論的に検討していくには、重なる前の短い波の振幅と重なって後の振幅 a_1 との関係



(a)



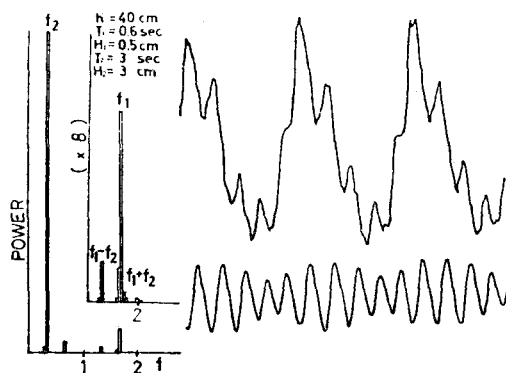
(b)



(c)

図—6 変調された短い波の最大振幅と基本周波数成分の比の実験値と理論値の比較

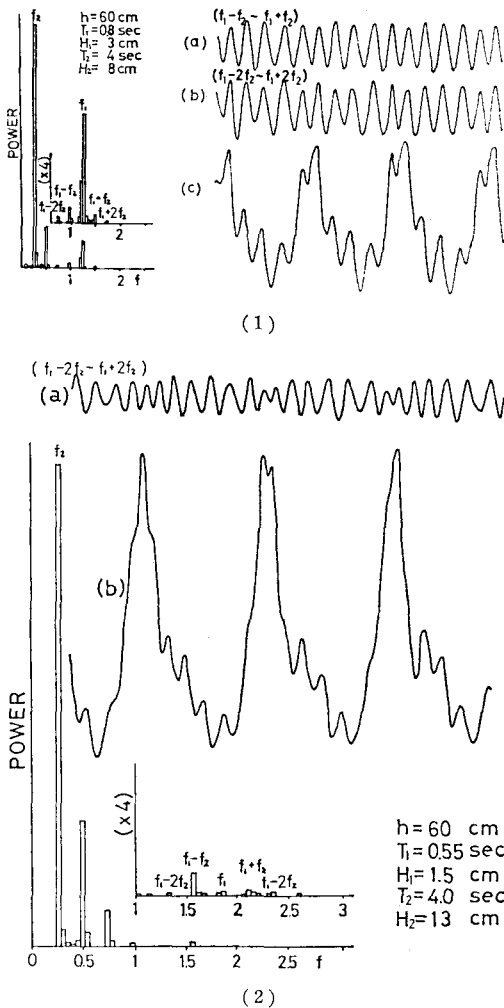
を明らかにしておく必要がある。それが決まれば a_1 と側波帯の振幅の関係は式 (1) で与えられるから計算されることになる。この点に関しては、もっと十分に検討



図—7 周波数比 σ_1/σ_2 が小さいときの短い波の波形

した上で報告したいと考えている。なお、短い波の波高の変化に二つのタイプがあることを示したが、その点については同様な結果が今回も得られている。図—5 に示したのはタイプ (b) としたもの一例であり、周波数比 σ_1/σ_2 が小さい場合に見られる長い波の一サイクルの間に短い波が 1 回ずつ大きくなったり小さくなったりするような変化 (タイプ (a)) の一例を 図—7 に示す。

さて、これまでの実験結果は長い波の波形勾配のかなり小さな場合について得られた結果に基づいている。これは一つには数秒程度の周期の波になると造波装置の性能の面からあまり波高の大きな波を起こすことができないという著者らの実験上の制約があったわけだが、一方、Longuet-Higgins と Stewart の理論は最低次の相互作用までを考慮したもので、その検証という面から見れば不都合はなかった。しかし、現実の自然界の現象を解釈しようとするれば、もっと波高が高く波形勾配の大きな長い波と重なったかどうかという点も調べておく必要がある。先にも述べたように著者らの使用した実験装置では十分な範囲でデータを取り系統的に議論するということができそうにないので、少ない実験例から二つ提示して簡単に触れておく。図—8 は著者らの実験においては長い波の波高が大きい方のものである。長い波の波高が大きくなると $f_1 \pm f_2$ の成分に対して、 $f_1 \pm 2f_2$ の成分が相対的に無視し得なくなる。そこで $f_1 \pm 2f_2$ の成分も短い波を構成するものとして含めてみたときの波形を 図—8 (1) (b) ならびに (2) (a) に示した。これらを見ると $f_1 - f_2 \sim f_1 + f_2$ の範囲で考えたときよりもかなり複雑な様相を呈しており、図—8 (2) では明らかに振幅変調のみならず周波数変調を伴っているのがわかる。したがって、長い波の波形勾配が幾分か大きくなると、短い波の変化を考えるには式 (1) で示された解では不十分で、さらに高次のものを考慮に入れる必要がでてくると思われる。また、長い波と短い波の周波数がかなり離れている場合、すなわち σ_1/σ_2 が十分大きな場合は別として、それらが近く、かつ長い波の波形勾配がかなり

図-8 $f_1 \pm f_2$ 成分波を含めたときの波形

大きくなると、その高次のひずみ成分が短い波の成分に対して無視し得ないものとして短い波の周波数帯に混入してくることが考えられ、ますます複雑な様相を呈するようになることが考えられる。

(3) 短い波の振幅に関する近似解について

式(1)ならびにそれから導かれた式(4)の厳密解の妥当性については実験的に明らかになった。その結果、Longuet-Higgins と Stewart が結論的に示し、かつ、radiation stress を用いて物理的に解釈を試みた式(7)の近似解は適切でないことも実験的に明らかになった。そこで、ここで厳密解と近似解の関係について簡単に述べる。

話を簡単にするために深水波として考える。まず式(7)から近似解による短い波の水位は

$$\zeta = a_1(1 + a_2 k_2 \sin \psi_2) \sin \phi_1 \quad \dots\dots\dots (8)$$

で表わされることになる。これは次のようにも表わすことができる。

$$\zeta = a_1 \sin \phi_1 + \frac{a_1 a_2 k_2}{2} \cos(\phi_1 - \psi_2) - \frac{a_1 a_2 k_2}{2} \cos(\phi_1 + \psi_2) \quad \dots\dots\dots (9)$$

一方、厳密解の方は次のように表わされる。

$$\zeta = a_1 \sin \phi_1 + \frac{a_1 a_2 k_2}{2} \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) \cos(\phi_1 - \psi_2) - \frac{a_1 a_2 k_2}{2} \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) \cos(\phi_1 + \psi_2) \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(9)、(10)を比べてみれば、式(9)が式(10)の近似式となり得るのは k_1/k_2 が1に比べて十分に小さいと仮定される場合であることがわかる。しかし、 k_1 は短い波の波数、 k_2 は長い波の波数であり、 k_1/k_2 は必ず1よりも大きな値であるから、そのような仮定は満たされ得ない。したがって、長い波の上での短い波の振幅変化を式(7)で表わすのは適切ではないことがわかる。

4. 結 語

長い波に重なった短い波の振幅の変化について Longuet-Higgins と Stewart の理論における摂動解は実験結果とよく合うことがわかった。前報において厳密解とも合わないとした点については訂正させていただくとともにお詫びを申し上げる次第である。一方、彼らによって与えられ、広く受け入れられていると思われる近似的表現については適切でないことははっきりした。

今後、短い波の基本周波数成分の振幅が重なる前の単独に存在する場合と重なった後でどのような変化をするかという点と、より高次の干渉を考慮した場合の変化について検討していきたいと考えている。

おわりに、先に報告した結果について御意見、御批判を賜った諸先生方に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Longuet-Higgins, M. S. & R. W. Stewart: Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents, Jour. Fluid Mech., Vol. 8, pp. 565~583, 1960.
- 2) 佐藤道郎・中村和夫・吉住昌久: 長い波に重なった短い波の振幅変化, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 132~136, 1977.
- 3) Tokuichi Hamada: The secondary interaction of surface waves, Rep. of Port and Harbour Tech. Res. Inst., No. 10, 1965.
- 4) Peter H. Y. Lee: Doppler measurements of the effects of gravity waves on wind-generated ripples, Jour. Fluid Mech., Vol. 81, pp. 225~240, 1977.