

K-dV 方程式による斜面上の波の変形

安田 孝志*・山下 隆 男**・後藤 真太郎***・土屋 義 人****

1. 緒 言

本研究は、斜面勾配の影響をあらわに評価した K-dV 方程式の数値解を求めることによって、斜面上の波の変形特性を究明しようとするものである。この方法は、エネルギーフラックス法などでは不可能であった shoaling に及ぼす斜面勾配や波形変化の影響を評価することができ、しかも MAC 法などに比べて計算労力を大幅に軽減することができるという点に特徴があるものと思われる。

2. 斜面上における K-dV 方程式の誘導

一様な傾斜海浜上における非回転の波動を対象とし、図 1 に示すように、座標および記号を定めれば、その基礎方程式は次式で与えられる。

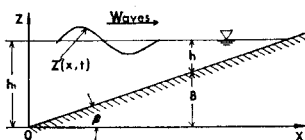


図-1 座標系および記号の説明

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0, & \phi_t + (\phi_x^2 + \phi_z^2)/2 + g(z - h_1)|_{z=h_1+z'} &= 0 \\ z'_t + z'_x \phi_x - \phi_z|_{z=h_1+z'} &= 0, & \phi_z - B_x \phi_x|_{z=h_1+z'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 ϕ : 速度ポテンシャル、 z' : 静水面からの水面変動量、 B : 水平座標から水底までの高さ、 h_1 : 座標原点での平均水深、および g : 重力の加速度である。まず、水深 h_1 を基準長として、

$$\left. \begin{aligned} \phi^* &= \phi_1/h_1 \sqrt{gh_1}, & z^* &= z/h_1, & x^* &= x/h_1, \\ t^* &= t\sqrt{g/h_1}, & z'^* &= z'/h_1, & B^* &= B/h_1, \\ h^* &= h/h_1 = (h_1 - B)/h_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

を定義し、角 $\epsilon^{1/2}$ にならって、このときの波動の伝播に対して、非線形、分散および斜面勾配の諸効果が平衡関係にあると仮定する。すなわち、

$$\xi = \epsilon^{1/2} \left(\int dx^*/c_0 - t^* \right), \quad \tau = \epsilon^{3/2} x^*, \quad \zeta = z^* \quad (3)$$

で定義される変換を導入して、次式のせつ動解を考える。

$$\left. \begin{aligned} z'^* &= \epsilon \eta_1(\xi, \tau) + \epsilon^2 \eta_2(\xi, \tau) + \dots \\ \phi^* &= \epsilon^{1/2} \{ \phi_1^*(\xi, \tau, \zeta) + \epsilon \phi_2^*(\xi, \tau, \zeta) + \dots \} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、 $\epsilon = (h_1/L_1)^2 \ll 1$ および $c_0 = \sqrt{1 - B^*} = \sqrt{h^*}$ である。

以上の式(2)、(3)および(4)を式(1)に適用し、 ϵ の各オーダーごとに整理すれば、最終的に次のような傾斜海浜上を伝播する浅水長波の水面変動量 η および速度ポテンシャル Ω に関する連立偏微分方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \eta_\tau + 3\eta\eta_\xi/2c_0^3 + c_0\eta_{\xi\xi\xi}/3 - B_\tau^*\eta/4c_0^2 \\ = \epsilon \{ -c_0^3\eta_{\xi\xi\xi\xi\xi}/15 - 3\eta_\xi\eta_{\xi\xi}/2c_0 - 2\eta\eta_{\xi\xi\xi}/3c_0 \\ - 2c_0\eta_{\xi\xi\tau}/3 + B_\tau^*\eta_{\xi\xi}/2 - 3\eta^2\eta_\xi/2c_0^3 \\ - \eta_\xi\Omega_\tau/c_0^2 - 3\eta\eta_\tau/c_0^2 - \Omega_{\tau\tau}/2c_0 - 5B_\tau^*\eta^2/8c_0^3 \\ + B_\tau^*\Omega_\tau/2c_0 \} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Omega_\xi - \eta = \epsilon \{ c_0\eta_{\xi\xi}/2 + \eta^2/2c_0^3 \} + O(\epsilon^2) \quad (6)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta_1 + \eta_2 + \dots, \\ \phi^* &= \epsilon^{1/2} \{ \Omega - \epsilon^2 \Omega_{\xi\xi}/2 + \epsilon^2 \Omega_{\xi\xi\xi\xi}/4! - \dots \} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで、座標原点における波は一樣水深場における定形進行波に接続するものとすれば、著者らがクノイド波理論の展開に用いたと同様の仮定をこの場合にも適用でき、式(5)および(6)より次式が導かれる。

$$\Omega_\tau = -3\eta^2/4c_0^3 - c_0\eta_{\xi\xi}/6 + B_\tau^* \int_0^\xi \eta d\xi/4c_0^3 \dots \quad (8)$$

したがって、これを式(5)に適用すれば、 η のみで表示された傾斜面上での波動方程式が得られる。計算の便宜のため、初期波の波高および周期がともに1となるように、次式の変換

$$Y = \epsilon \eta / (H_1/h_1), \quad \xi = (c/\sqrt{gh})^{-1} \sigma \quad (9)$$

によって、波形の規準化を行う。ここに、 c : 初期波の波速、および H_1 : 初期波の波高である。以上より、式(5)および(6)は最終的に次式のような数値計算に都

* 正会員 工博 岐阜大学講師 工学部土木工学科
 ** 正会員 工修 京都大学助手 防災研究所
 *** 学生会員 岐阜大学大学院工学研究科
 **** 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

合の良いいわゆる発展系の波動方程式に書き換えられる。

$$\begin{aligned} Y_{\tau} + \lambda_1 Y Y_{\sigma} + \lambda_2 Y_{\sigma\sigma\sigma} + \lambda_3 Y \\ = \epsilon \left(\lambda_4 Y_{\sigma\sigma\sigma\sigma} + \lambda_5 Y_{\sigma} Y_{\sigma\sigma} + \lambda_6 Y Y_{\sigma\sigma\sigma} + \lambda_7 Y_{\sigma\sigma} \right. \\ \left. + \lambda_8 Y^2 Y_{\sigma} + \lambda_9 Y^2 + \lambda_{10} Y_{\sigma} \int_0^{\sigma} Y d\sigma \right. \\ \left. + \lambda_{11} \int_0^{\sigma} Y d\sigma \right) + O(\epsilon^2) \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 3U_s c^*/2c_0^3, \\ \lambda_2 &= c_0 c^*/6, \\ \lambda_3 &= -B_{\tau}^*/4c_0^3, \\ \lambda_4 &= -(24c_0^3 - 40c_0 + 5)c_0 c^*/360, \\ \lambda_5 &= -(32c_0^3 - 72c_0 + 9)U_s c^*/24c_0^3, \\ \lambda_6 &= -(2c_0^3 - 12c_0 + 3)U_s c^*/12c_0^3, \\ \lambda_7 &= (5c_0 - 2)B_{\tau}^* c^*/12c_0, \\ \lambda_8 &= 3(10c_0^3 - 3)U_s^* c^*/8c_0^3, \\ \lambda_9 &= -(56c_0^3 - 27)B_{\tau}^* U_s/32c_0^3, \\ \lambda_{10} &= -B_{\tau}^* U_s c^*/4c_0^4, \\ \lambda_{11} &= (4c_0^3 - 5)B_{\tau}^*/32c_0^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

3. 基礎方程式の数値計算

差分法によって数値解を求める場合、まず、用いるべき最適な差分形式を決定する必要がある。このため、式(10)を直接解くのではなく、次式のような級数解

$$Y = Y_1 + \epsilon Y_2 \dots\dots\dots(12)$$

を仮定して逐次近似法によることにし、さらに高階の微係数の数値微分その他の問題から、収束性や安定性に対する制約が少い陰解法による差分形式を用いることにした。その結果、第1次近似式については、斜面勾配の影響を除けば絶対安定となっており、Laxの同等定理からかなりの精度を期待できた。しかしながら、第2次近似式では、5階の微係数を含む非同次項の問題に加えて、この種の方程式が永年項を解に含むという方程式自体の特性から絶対安定の条件を満足させることが一般に困難であるため、数値解の精度が必ずしも保証されない。しかしながら、数値解の精度やその適用性に関する判断は、最終的には解析解または水理実験の結果との比較によってなされるべきであろう。したがって、これらとの比較によって最適な差分法を決定することにしたが、本文では紙面の都合上その結果のみを述べる。

図-2 は、解析解の誘導が可能である一様水深場において、初期波としてクノイド波を与えたときの時間波形の場所的変化を数値計算し、解析解と比較したものである。これから、計算回数 $N=120$ においても第1次近似式では解析解との相違は全く見られず、初期波の波形がそのまま保存され、その収束性と安定性が十分に満足

されていることがわかる。また、第2次近似式においても、波高の若干の減衰は見られるが、ほぼ初期波の波形は保存され、不安定現象は全く見られない。

図-3 は、一様水深場での水理実験の結果との比較を示したものである。これから、第1および第2次近似解のいずれも水理実験の結果と良く対応しており、ここで用いた差分法によってほぼ満足すべき精度を持つ解が得られていることがわかる。また、この図から、一様水深場での波の変形に関しては、第2次近似解による補正は小さく、solitonの分裂特性はいわゆる K-dV 方程式のみではほぼ説明できるように推察される。

図-4 は、勾配が $1/20$ の一様傾斜面上における碎波直前までの波形変化を計算

し、水理実験の結果と比較したものの1例である。この場合、水理実験においては、碎波によるもどり流れの影響を除去し、かつ反射率を約5%以下に抑えて実験した。

表-1 は、このときの実験条件および波の諸量を示したものである。図-4 から、斜面上においても、第1次近似解は水理実験の結果と碎波直前まで良く対応しており、十分な適用性を持つことがわかるであろう。これに

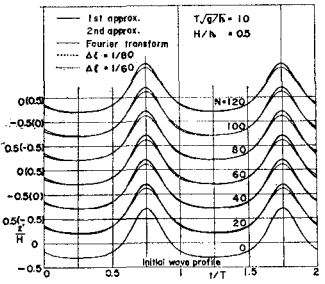


図-2 一様水深場における数値解と解析解の比較

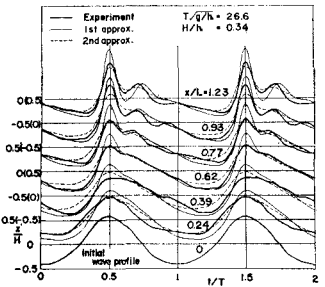


図-3 一様水深場における水理実験結果との比較

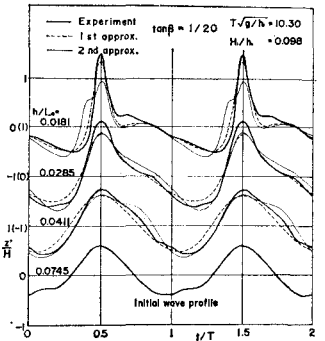


図-4 一様傾斜面上における水理実験結果との比較

表-1 実験条件および波の諸量

ch.	h_1 cm	H_1 cm	T sec	H_1/h_1	$T\sqrt{g/h}$	h_1/L_0	H_1/H_0	L_1/L_0
1	36.8	3.61	2.00	0.098	10.30	0.0745	0.971	0.630
2	20.3	4.15	2.00	0.204	13.86	0.0411	1.116	0.630
3	14.1	5.05	2.00	0.358	16.63	0.0285	1.361	0.630
4	9.0	7.27	2.00	0.483	20.88	0.0181	1.958	0.630

対して、第2次近似式では、水深・沖波波長比 h/L_0 が約 0.02 以下になると、峯付近に生じる数値誤差の影響が増大し、その適用性が悪化することがわかる。

このように、第2次近似式では、それ自体の精度は高いにもかかわらず、5階の微係数の数値微分に伴う誤差や方程式自体に起因する不安定性のために、第1次近似式に比べてその数値計算の精度と実験結果との比較による適用性においてはなお問題があるといわなければならない。また、安定な第2次近似式が得られている場合には、第2次近似の補正はかなり小さく、実用上斜面上の波の変形については、第1次近似式で十分であると思われるので、以下では第1次近似式によって斜面上における波の変形特性を考察する。

4. 斜面上における波の変形特性

(1) 支配パラメーターの誘導

前述したように、式 (10) は非線形、分散および斜面勾配の各効果が平衡関係にある場合の斜面上の波に対する数理モデルであるので、これから斜面上の波の変形における支配パラメーターを導くことができよう。そこで、発展方程式 (10) を $0 \sim \tau_0$ の領域にわたって積分すれば、 $\tau = \tau_0$ における時間波形 $Y(\tau_0)$ は、次式で与えられる。

$$Y(\tau_0) = Y(0) + \int_0^{\tau_0} (B_1^*/4c_0)[-6U_sYY_0/B_1^*c_0 - 2c_0Y_{000}/3B_1^* + Y + \epsilon G] d\tau \quad \dots\dots(13)$$

ここに、 ϵG は式 (10) の右辺の非同次項である。これから、波形は規準化されているので、 $Y(0)$ は初期条件に関係なくほぼ一定であり、また、砕波に至る過程での波形の変化は小さいと考えられるので、 ϵG は他の項に比べて微小であるとすれば、 $Y(\tau_0)$ は被積分関数の特性を支配するパラメーターである右辺第1項の係数 $6U_s/B_1^*c_0$ および第2項の係数 $2c_0/3B_1^*$ のみに依存することがわかる。前者は、非線形項と斜面勾配項との比を表すので、これを K_{ns} とし、 $B_1^* = \tan \beta / (h_1/L_1)^2$ を用いて書き換えると、次式となる。

$$K_{ns} = 6U_s/c_0 B_1^* = 6(h_1/L_1)/c_0 \tan \beta \quad \dots\dots(14)$$

これは、Battjes²⁾ によって定義された surf-similarity parameter $\tan \beta / (H_0/L_0)^{1/2}$ の逆数に比例し、同義なパラメーターであり、またこれは、 YY_0 の係数であることから、波形の前傾化を強め、その効果は浅水化に伴って一様に増大し、しかも緩勾配の場合ほどその傾向はより顕著となる。後者は、分散項と斜面勾配項との比を示し、これを K_{as} とすれば、次式となる。

$$K_{as} = 2c_0/3B_1^* = (h_1/L_1)^2 c_0 / \tan \beta \quad \dots\dots(15)$$

ここに、 h_1/L_1 は基点における値であるので、これを一定値とすれば、 K_{as} は斜面勾配と水深のみに依存することになり、浅水化に伴って分散効果が抑えられることに

なる。したがって、砕波直前の極浅水域では、 K_{as} が減少するが、 K_{ns} は増大して支配パラメーターになるものと推定される。この結果生じる波形の前傾は、波の峯での曲率を増大させて分散効果を高め、波形の尖鋭化を伴う新たな平衡関係を生じさせることになるが、この領域での支配パラメーターとして K_{ns} を考えることは十分意義があるといえよう。

(2) 波形変化の特性

図-5 は、数値計算上の最大波高に達するまでの浅水変形を示したものである。図中の太い実線は第1次近似の数値解、および細い実線はクノイド波理論の第1次近似解を示す。これから、浅水変形に伴って波形が歪み、それは斜面勾配 $\tan \beta$ のみならず沖波波長勾配 H_0/L_0 にも依存し、前述の無次元量 K_{ns} と明確な対応のあることがわかる。したがって、斜面勾配の影響はそれ自体で決まるものではなく、波の非線形および分散性との相対的な関係で決まるものであると言えよう。

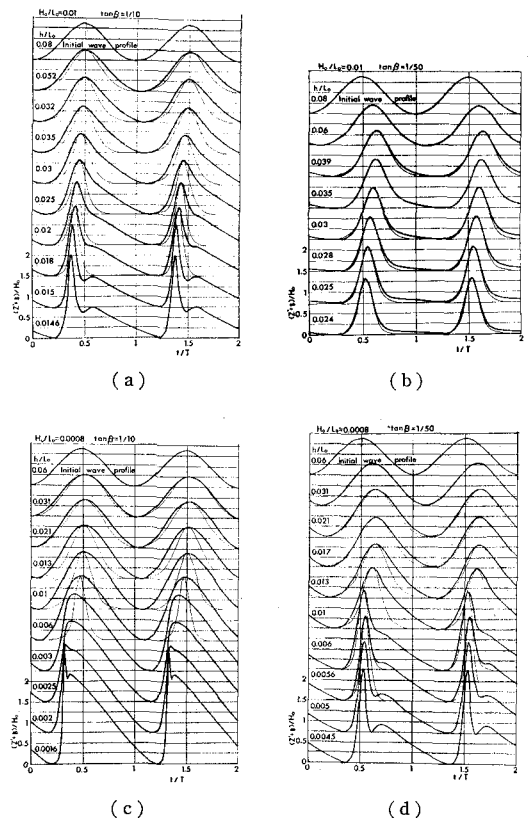
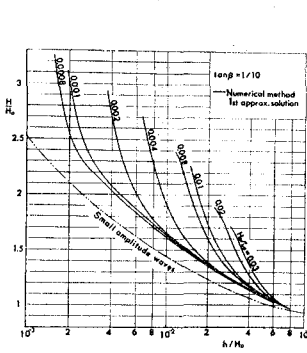


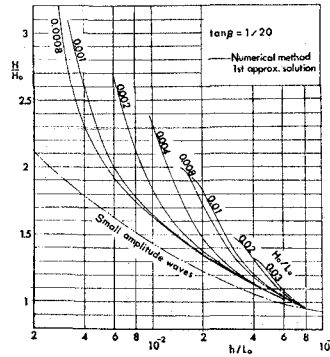
図-5 浅水変形における波形の変化

(3) 波高変化の特性

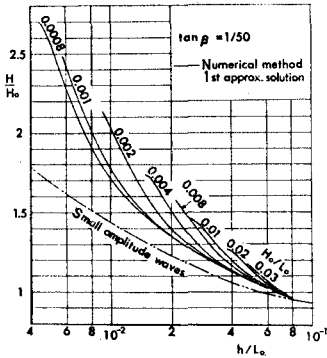
ここでは、従来のエネルギーフラックス法による浅水変形の計算結果との比較を行うため、斜面上の波の変形特性を波高変化に関して考察する。図-6 は、エネルギーフラックス法による浅水変形の理論曲線とともに数値



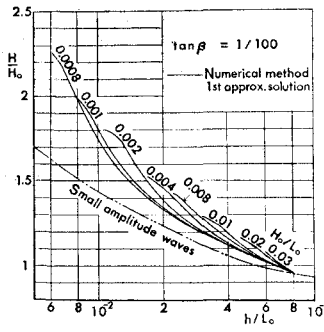
(a)



(b)



(c)



(d)

図-6 沖波波形勾配をパラメーターとしたときの浅水変形の特徴

結果と同様に緩斜面になるに従って波高の増加率が增大する傾向は見られるが、それは H_0/L_0 の値が大きくなるに従って弱くなり、一定の増加率に近づく傾向のあることがわかる。このように、波高の増加率についても無次元量 K_{ns} との対応が見られ、その値が大きくなるに従って波高増加率および最大波高も増大する傾向にあることがわかる。

図-8 は、数値解によって得られた浅水変形の理論曲線と実験結果とを比較したものであるが、両者の対応は良好であることがわかる。

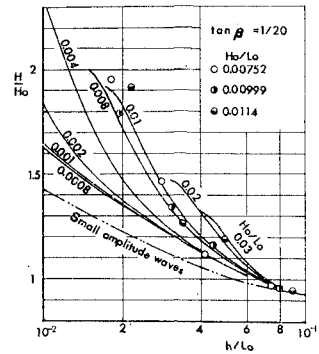
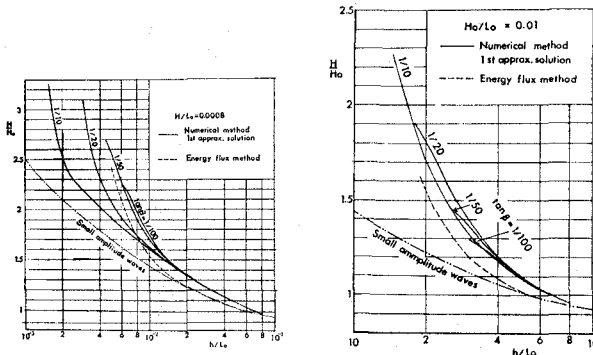
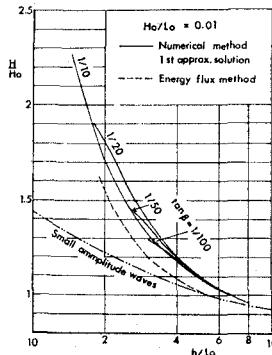


図-8 波高変化に関する実験結果との比較



(a)



(b)

図-7 斜面勾配をパラメーターとしたときの浅水変形の特徴

計算の結果を示したものであり、図中の (H/H_0) の最大値は数値計算による極限波高に対応している。これから、エネルギーフラックス法による結果と同様に、 H_0/L_0 が大きくなるに従って波高の増加率も増大し、また斜面勾配が小さくなるに従って波高増加率に及ぼす H_0/L_0 の影響は低下し、 H_0/L_0 に関係なく一定の波高の増加率に近づく傾向にあることがわかる。

図-7 は、斜面勾配をパラメーターとしたときの浅水変形の特徴を示したものである。これから、岩垣ら³⁾の

(4) 波形の前傾度および尖鋭度の特徴

ここでは、図-9 に示すように波形の変形に関する指標 K_g および K_s を定義し、これによって変形特性を考察する。すなわち、 K_g は波形の前

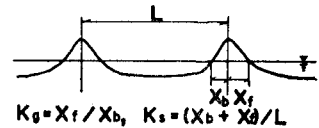


図-9 波形の前傾度および尖鋭度の定義

傾の程度を、また K_s は波形の尖鋭化による上下の非対称性を表す。図-10 は、浅水変形に伴うこれらの変化を H_0/L_0 をパラメーターとして

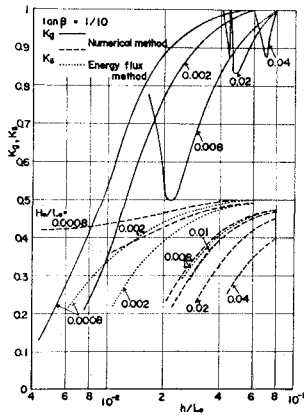
示したものであり、これから、 H_0/L_0 が大きい場合、すなわち K_{ns} が大きくなるに従って、波形の前傾が強まり、 K_g の値は小さくなるが、同時に K_g の値に極値が生じるようになる。このような K_g と K_{ns} との関係は、初期波の K_{ns} が小さくなるに従って、碎波形式が巻き波形に移行することと対応しているように思われる。その原因としては、 K_{as} の効果がいまだ有効な水深での波形の前傾が、曲率の増大によって分散効果を強め、逆に前傾を波形の尖鋭化という形で抑える波自体の平衡作用

にあると考えられる。ついで K_s については、 K_{ns} が大きくなるに従って K_s も増大し、エネルギーフラックス法による結果ともよく対応するようになる。これは、前述したように、 K_{ns} の大きい波においては結果的により平衡関係が保たれ易くなっているためとも考えられる。

4. 結 語

以上、本研究によって明らかとなった主な事項は、つぎのように要約される。

- 1) 角谷の手法によって、斜面勾配の影響をあらわに導入した高次の K-dV 方程式を誘導することができた。
- 2) 本研究で用いた差分法によれば、十分な精度と適用性を持つ第 1 次近似の数値解を得ることができた。ま



図—10 浅水変形に伴う前傾度および尖鋭度の変化

た、第 2 次近似による補正は小さいことから、斜面上の波の変形を究明するためには、第 1 次近似解で十分であろう。

3) 波動方程式から導かれた非線形項・斜面勾配比 K_{ns} は、斜面上の波の特性を規定するパラメーターとして有効である。

4) 波形変化の特性は、斜面勾配のみならず沖波波形勾配に依存し、 K_{ns} が小さくなるに従って定形波の波形との相違が増大する。また、波形変化の程度を表す前傾度および尖鋭度のいずれも K_{ns} と良く対応しており、 K_{ns} が大きくなるに従ってこれらも大きくなる傾向にある。

5) 波高変化についても、 K_{ns} との間に明瞭な対応が見られ、 K_{ns} が大きくなるに従って波高の増加率および極限波高も増大する。

参 考 文 献

- 1) Kakutani, T.: Effect of an even bottom on gravity waves, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 30, No. 1, pp. 272~276, 1971.
- 2) Battjes, J. A.: Surf similarity, Proc. 14th Conf. on Coastal Engg., pp. 466~480, 1974.
- 3) 岩垣雄一・酒井哲郎: 一様勾配斜面上の有限振幅長波について, 土木学会論文報告集, 第 196 号, pp. 65~74, 1971.